В помощь поступающим в вузы

Н. Парфентьева, М. Фомина

Решение задач по физике

Часть 1

Издательство «Мир»

Решение задач по физике

В помощь поступающим в вузы

Н. Парфентьева, М. Фомина

Решение задач по физике

Часть 1

Издание второе, исправленное

Москва «Мир» 1995

ББК 22.3
П18
УДК 371.64/69

Парфентьева Н. А., Фомина М. В.

П18 Решение задач по физике. В помощь поступающим в Вузы. Часть 1. Издание 2-е, исправленное. — М.: Мир, 1995. — 216 с., ил.

ISBN 5-03-002959-1

Авторы книги — преподаватели, имеющие большой опыт работы с абитуриентами. Книга учит грамотному подходу к решению задач по физике и поможет самостоятельно подготовиться к выпускным экзаменам в школе и вступительным экзаменам в ВУЗ. Часть 1 посвящена механике, молекулярной физике и термодинамике.

Для школьников старших классов, абитуриентов и преподавателей физики.

ББК 22.3

Редакция литературы по физике и астрономии

ISBN 5-03-002959-1
ISBN 5-03-002958-3

Предисловие и методические рекомендации

Уважаемый читатель, перед тобой пособие по физике, изучение которого поможет самостоятельно подготовиться к выпускным экзаменам в школе и успешно сдать вступительные экзамены в ВУЗ. Данное пособие подготовлено на основе большого практического опыта, накопленного авторами при работе с абитуриентами, при приеме вступительных экзаменов и при работе со студентами первых курсов, что позволило выявить наиболее сложные для понимания школьниками вопросы физики и дать краткое, но корректное их изложение.

Каждая глава начинается с теории, несмотря на краткость изложения которой она включает почти все вопросы, имеющиеся в программе по физике для вступительных экзаменов. После теоретической части приведены и подробно разобраны решения задач, расположенных в порядке возрастания сложности. Опыт показывает, что именно решение задач оказывается "камнем преткновения" при поступлении в ВУЗ. Нельзя дать рецепта для решения всех задач по физике, можно только научить грамотному подходу к задаче, который позволит найти ее решение.

Первая часть пособия посвящена таким разделам физики, как механика, молекулярная физика и термодинамика. Кроме того, авторы сочли необходимым включить в пособие главу, посвященную свойствам жидкости. Хотя этой темы в настоящее время нет в программе, однако задачи, связанные с этой темой, довольно часто предлагаются на вступительных экзаменах на физические факультеты некоторых ВУЗов. Заметим, что знание основ механики необходимо для решения задач почти всех последующих разделов курса физики, таких, как электростатика, в которой изучаются условия равновесия электрических зарядов (решаются фактически задачи статики), магнетизм, где рассматриваются движения проводников с током в магнитном поле (динамика), движение зарядов в магнитном поле (динамика вращательного движения тела) и т. д. Поэтому авторы настоятельно рекомендуют обратить особое внимание на методику решения задач по механике.

Простое чтение данного пособия вряд ли будет особенно полезным. Авторы рекомендуют изучать изложенный материал с карандашом в руках и попытаться сразу же после прочтения повторить решение самостоятельно, следуя логике изложения решения в пособии. Мы советуем обратить внимание на проверку наименования (размерности) полученных величин. Правильное наименование есть одно из подтверждений правильности решения. Заметим, что все вычисления проводятся в СИ (международная система единиц). Поэтому, если величина в условии задачи приведена в другой системе единиц, то в скобках указывается значение в СИ. Кроме того, при решении мы приводим не только конечные формулы и численный результат, но и подробно показываем, как он был получены, какие конкретные цифры были подставлены. Обращаем внимание читателя на рисунки к решениям задач, особенно по механике. Чертежи, грамотно расставленные силы, действующие на тело, облегчают решение задачи.

В конце каждой главы дается несколько задач, которые мы предлагаем решить самостоятельно.

Авторы и издательство будут очень благодарны читателям, которые сообщат о замеченных в книге опечатках и неточностях. Издательство учтет их при переиздании книги.

Желаем успеха!

Авторы

Механика

Глава 1
Введение. Кинематика

Механика изучает механическое движение, условия и причины, вызывающие данное движение, а также условия равновесия тел. Механическим движением называется изменение положения тела или его частей относительно других тел с течением времени. Всякое движение относительно. Характер движения зависит от того, относительно каких тел мы рассматриваем данное движение.

Тело, относительно которого мы рассматриваем положение других тел в пространстве, называется *телом отсчета.*

Системой отсчета называют систему координат, связанную с телом отсчета, и выбранный метод отсчета времени, т. е. часы.

Выбор системы отсчета зависит от условий данной задачи. Движение реальных тел, как правило, сложное. Поэтому для упрощения рассмотрения движений пользуются *законом независимости движений*: всякое сложное движение можно представить как сумму независимых простейших движений. К простейшим движениям относятся *поступательное* и *вращательное.*

В физике широко пользуются моделями, которые позволяют из всего многообразия физических свойств выбрать главное, определяющее данное физическое явление. Одними из первых моделей реальных тел являются материальная точка и абсолютно твердое тело.

Материальной точкой называется тело, размерами и формой которого можно пренебречь в условиях данной задачи. *Абсолютно твердым телом* называется тело, расстояние между любыми двумя точками которого остается постоянным при его движении.

Эти модели позволяют исключить деформацию тел при движении.

Поступательным называется движение, при котором отрезок, соединяющий любые две точки твердого тела, перемещается при движении параллельно самому себе. Из этого следует, что все точки тела при поступательном движении движутся одинаково, т. е. с одинаковыми скоростями и ускорениями. Примером поступательного движения может служить движение кабины "чертова колеса".

Вращательным называется движение, при котором все точки абсолютно твердого тела движутся по окружностям, центры которых лежат на одной прямой, называемой осью вращения, причем эти окружности лежат в плоскостях, перпендикулярных оси вращения.

Пользуясь законом независимости движений, сложное движение твердого

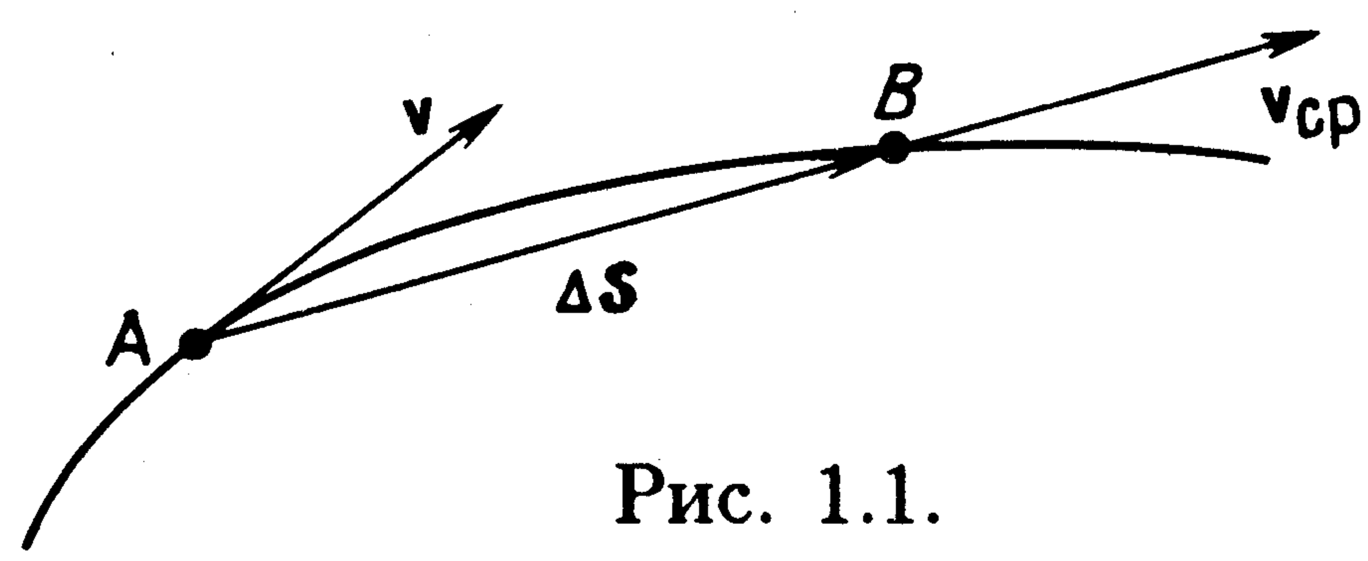


Рис. 1.1.

тела можно рассматривать как сумму поступательного и вращательного движений.

Одним из первых разделов механики является *кинематика*, изучающая механическое движение тел без выяснения причин, вызывающих данное движение.

Можно воспользоваться понятием материальной точки для изучения поступательного движения абсолютно твердого тела, так как все точки движутся одинаково. Для определения положения материальной точки в пространстве и описания ее движения необходимы следующие понятия.

Перемещение $\Delta\mathbf{s}$ — вектор, соединяющий начальную и конечную точки траектории, по которой двигалась материальная точка некоторый промежуток времени Δt.

Траектория — линия, описываемая при движении материальной точкой в пространстве.

Путь l — сумма длин отрезков траектории.

При *прямолинейном* движении (траектория — прямая линия) модуль перемещения $\Delta\mathbf{s}$ равен длине пути l, если движение происходит в одном направлении.

Быстрота изменения положения материальной точки в пространстве с течением времени характеризуется *средней* и *мгновенной скоростями.*

Средняя скорость — векторная величина, равная отношению перемещения к промежутку времени, за которое это перемещение произошло:

$$\mathbf{v}_{\text{ср}} = \Delta\mathbf{s}/\Delta t. \tag{1.1}$$

Пусть точка движется по траектории от A до B. На рис. 1.1 показаны перемещение $\Delta\mathbf{s}$ и вектор средней скорости $\mathbf{v}_{\text{ср}}$.

Часто для характеристики движения вводится средняя скорость прохождения пути, равная отношению пути к промежутку времени, за который этот путь пройден:

$$v_{\text{ср}(l)} = \Delta l/\Delta t. \tag{1.2}$$

На рис. 1.1 Δl — это длина дуги AB. Ясно, что, поскольку $|\Delta\mathbf{s}| \le \Delta l$, то $|\mathbf{v}_{\text{ср}}| \le$ $\le v_{\text{ср}}(l)$. Скорость в данный момент времени определяется мгновенной скоростью.

Мгновенной скоростью называется предел отношения перемещения $\Delta\mathbf{s}$ к промежутку времени Δt, за который это перемещение произошло, при стремлении Δt к нулю:

$$\mathbf{v}_{\text{мгн}} = \lim_{\Delta t \to 0} \Delta\mathbf{s}/\Delta t. \tag{1.3}$$

Мгновенная скорость направлена по касательной к траектории. Это вытекает из следующих соображений: $\mathbf{v}_{\text{ср}}$ направлено вдоль секущей AB (рис. 1.1). Если Δt стремится к нулю, то в пределе точки A и B сольются в одну точку, при этом секущая превращается в касательную.

Равномерное прямолинейное движение

Равномерным прямолинейным называется движение, при котором материальная точка за любые равные промежутки времени совершает одинаковые перемещения. При этом движении мгновенная скорость совпадает со средней:

$$\mathbf{v}_{\text{мгн}} = \mathbf{v}_{\text{ср}} = \Delta\mathbf{s}/\Delta t.$$

Если выбрать ось x вдоль направления движения, то проекция скорости на ось x равна величине скорости:

$$v_x = v.$$

Из определения скорости следует

$$v = (x - x_0)/t,$$

откуда закон движения материальной точки, т. е. $x = f(t)$, имеет вид

$$x = x_0 + vt, \tag{1.4}$$

где x_0 — координата материальной точки в момент времени $t = 0$. Если скорость направлена в сторону, противоположную положительному направлению оси x, то

$$x = x_0 - vt. \tag{1.5}$$

На рис. 1.2 показаны зависимости $v(t)$ и $x(t)$ от времени.

Относительность движения

Для описания движения необходимо выбрать систему отсчета. В ряде задач приходится рассматривать движение одного и того же тела относительно разных систем отсчета, причем эти системы могут двигаться относительно друг друга. Обозначим скорость движущейся системы отсчета относительно неподвижной $\mathbf{v}_0$, скорость тела относительно неподвижной системы отсчета $\mathbf{v}$. Обычно в качестве неподвижной принимается система отсчета, связанная с Землей. Пусть в начальный момент времени начала координат, связанных с подвижной и неподвижной системами отсчета, совпадают (рис. 1.3,*а*). Материальная точка находится в начале координат. За время Δt материальная точка перемещается в неподвижной системе на $\Delta\mathbf{s}$, в подвижной на $\Delta\mathbf{s}'$, начало же подвижной системы переместилось на $\Delta\mathbf{s}_0$ (рис. 1.3,*б*). Из рисунка видно, что $\Delta\mathbf{s} = \Delta\mathbf{s}_0 + \Delta\mathbf{s}'$.

Разделив на Δt левую и правую части равенства, получим

$$\frac{\Delta\mathbf{s}}{\Delta t} = \frac{\Delta\mathbf{s}_0}{\Delta t} + \frac{\Delta\mathbf{s}'}{\Delta t},$$

откуда

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}'. \tag{1.6}$$

Полученное уравнениие выражает классический закон сложения скоростей.

Примеры решения задач

Задача 1. 1) Поезд прошел первую половину пути со скоростью $v_1 = 72$ км/ч, вторую половину пути — со скоростью 36 км/ч.

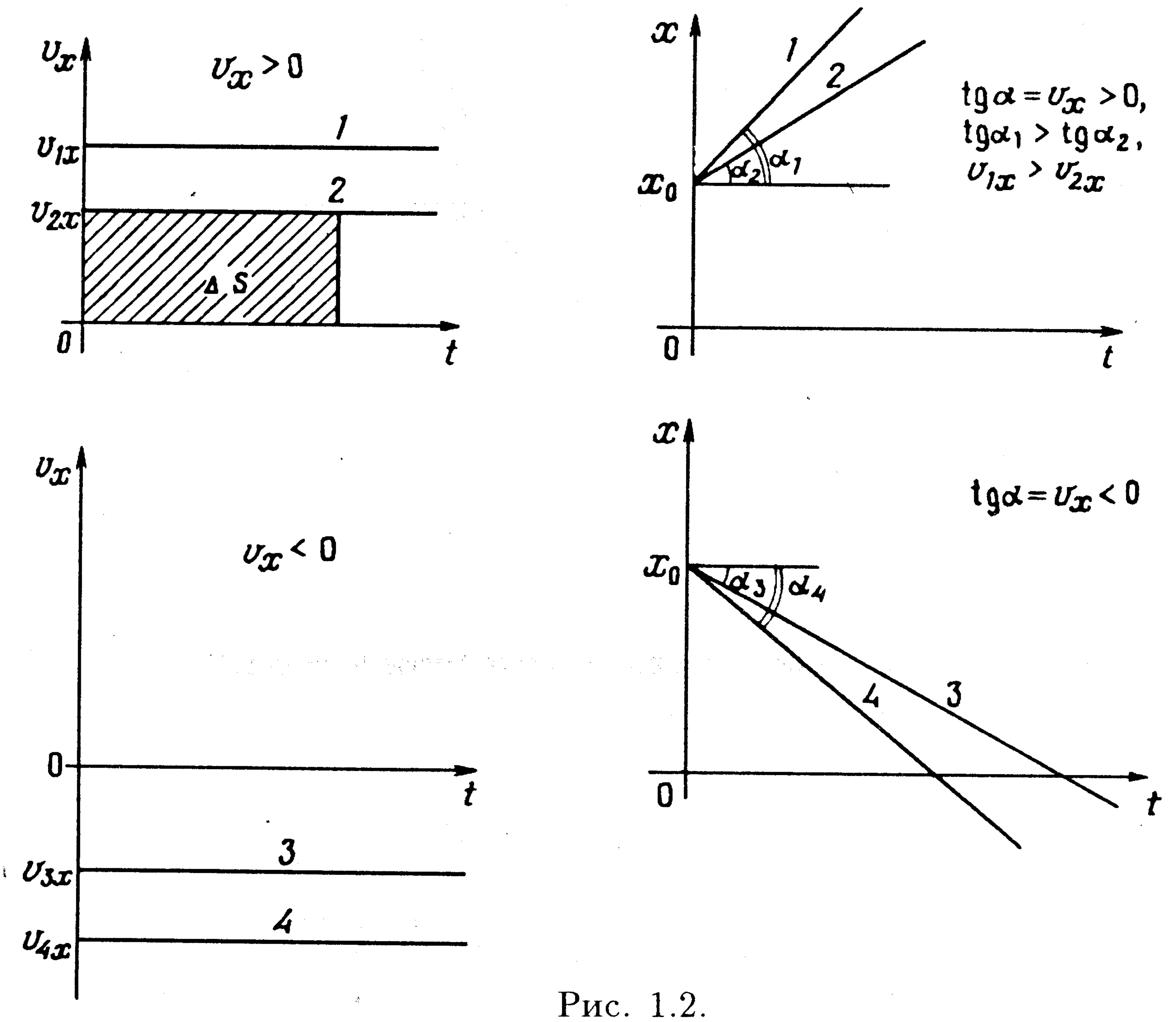


Рис. 1.2.

2) Поезд шел первую половину времени движения со скоростью 72 км/ч, а вторую половину времени со скоростью 36 км/ч.

Определить среднюю скорость поезда в первом $v'_{\text{ср}}$ и во втором $v''_{\text{ср}}$ случаях.

Дано: $v_1 = 72\,\text{км/ч}\,(20\,\text{м/с})$, $v_2 = 36\,\text{км/ч}\,(10\,\text{м/с})$; $v'_{\text{ср}}$ — ? $v''_{\text{ср}}$ — ?

Решение. Средняя скорость прохождения пути

$$v_{\text{ср}} = l/t.$$

1) Время движения складывается из двух разных промежутков времени: t_1 — времени, в течение которого поезд движется со скоростью v_1 и равного $l/2v_1$, и t_2 — времени, в течение которого поезд движется со скоростью v_2 и равного $l/2v_2$:

$$t = t_1 + t_2 = l/2v_1 + l/2v_2,$$

откуда

$$v'_{\text{ср}} = \frac{l}{l/2v_1 + l/2v_2} = \frac{2v_1v_2}{v_1 + v_2},$$

$$v'_{\text{ср}} = \frac{2 \cdot 20 \cdot 10}{30}\,\text{м/с} = 13,3\,\text{м/с}.$$

2) Длина пути слагается из двух разных участков пути: на первом поезд движется со скоростью v_1 и длина участка равна $l_1 = v_1t/2$, на втором поезд

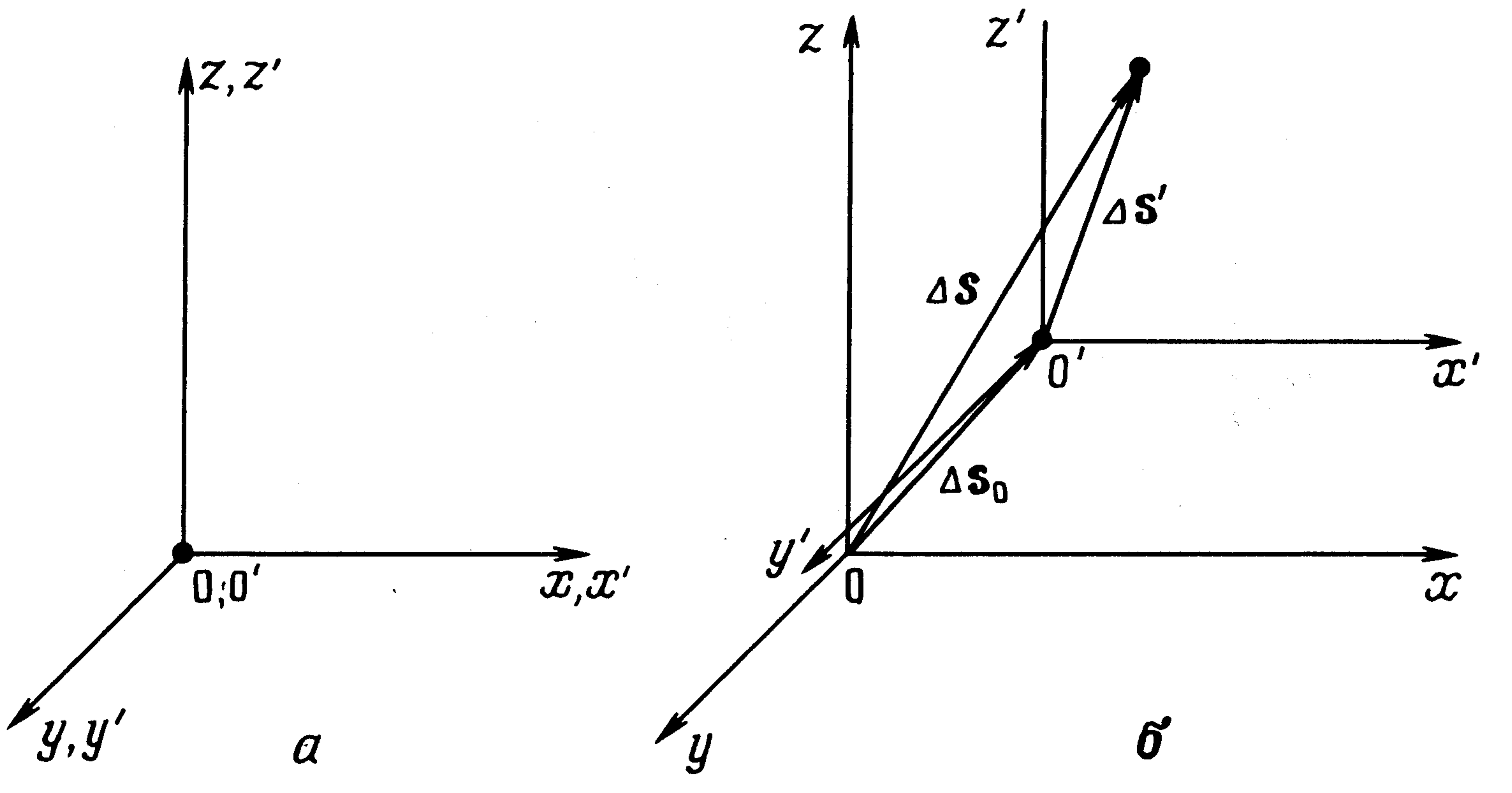


Рис. 1.3.

движется со скоростью v_2 и длина этого участка пути $l_2 = v_2 t/2$:

$$l = l_1 + l_2 = (v_1 t)/2 + (v_2 t)/2.$$

Отсюда

$$v''_{\text{ср}} = l/t = (v_1 + v_2)/2, \quad v''_{\text{ср}} = 15\,\text{м/с}.$$

Задача 2. Сколько времени пассажир, сидящий у окна поезда, идущего со скоростью $v_1 = 54$ км/ч, будет видеть проходящий мимо него встречный поезд, скорость которого $v_2 = 36$ км/ч, длина $l = 150$ м.

Дано: $v_1 = 54\,\text{км/ч}\,(15\,\text{м/с})$, $v_2 = 36\,\text{км/ч}\,(10\,\text{м/с})$, $l = 150\,\text{м}$; t — ?

Решение. Промежуток времени, в течение которого пассажир будет видеть поезд, равен l/v'', где v'' — скорость второго поезда относительно пассажира. Рассмотрим движение пассажира относительно земли и относительно 2-го поезда, с которым свяжем движущуюся систему отсчета. Согласно (1.6),

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}',$$

где $\mathbf{v}_0$ — скорость второго поезда относительно земли, т. е. $\mathbf{v}_0 = \mathbf{v}_2$; $\mathbf{v}_1$ — скорость пассажира относительно земли, т. е. $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1$; $\mathbf{v}'$ — скорость пассажира относительно второго поезда, скорость $\mathbf{v}'$ по величине равна $\mathbf{v}''$:

$$\mathbf{v}' = \mathbf{v} - \mathbf{v}_0 = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2.$$

По правилу вычитания векторов (см. рис. 1.4)

$$v' = v_1 + v_2, \quad t = l/v' = l/(v_1 + v_2), \quad t = \frac{150}{15 + 10}\,\text{с} = 6\,\text{с}.$$

Задача 3. Лодочник перевозит пассажиров с одного берега на другой за время $t = 10$ мин по траектории AB (рис. 1.5). Скорость течения реки $v_{\text{р}} = 0,3$ м/с. ширина реки 240 м. С какой скоростью v относительно воды и под каким углом α к берегу должна двигаться лодка, чтобы достичь другого берега за указанное время?

Дано: $v_{\text{р}} = 0,3\,\text{м/с}$, $l = 240\,\text{м}$, $t = 10\,\text{мин}\,(600\,\text{с})$; v — ? α — ?

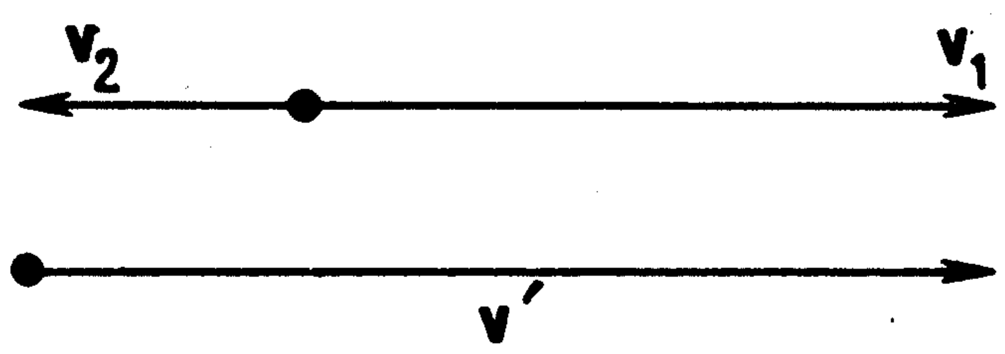


Рис. 1.4.

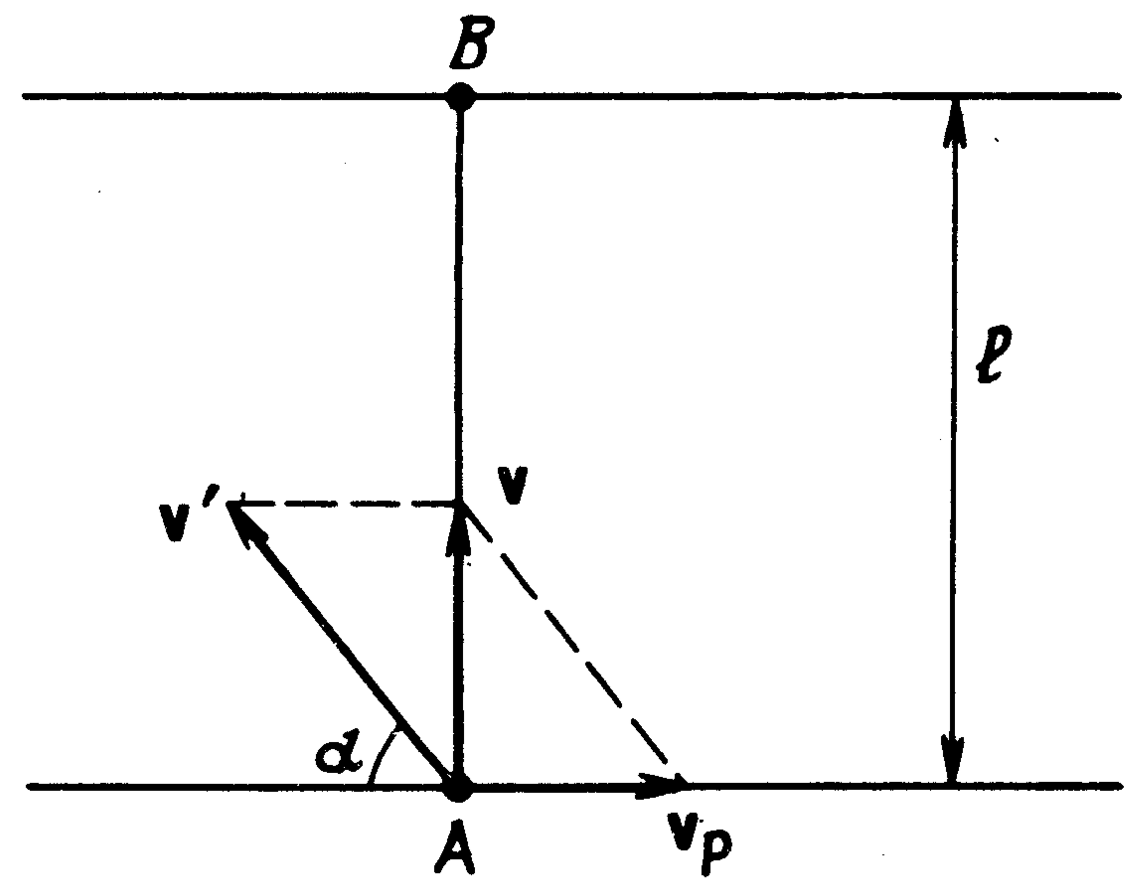


Рис. 1.5.

Решение. Относительно берега (неподвижной системы координат) скорость лодки равна

$$v = l/t.$$

Эта скорость является суммой двух скоростей: скорости лодки относительно воды v' (скорости относительно подвижной системы отсчета) и скорости реки $v_\text{р}$ (скорости подвижной системы отсчета относительно неподвижной). Согласно (1.6),

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_\text{р} + \mathbf{v}'.$$

Так как по условию задачи скорость лодки относительно берега направлена вдоль AB, а скорость реки перпендикулярно AB, то скорость лодки относительно воды

$$v' = \sqrt{v^2 + v_\text{р}^2}, \quad v' = 0,5\text{м/с}.$$

Искомый угол можно найти из выражения

$$\text{tg}\alpha = \frac{v}{v_\text{р}} = \frac{l}{tv_\text{р}},$$

$$\text{tg}\alpha = \frac{240}{0,3 \cdot 600} = \frac{0,4}{0,3} = \frac{4}{3}, \quad \alpha \approx 53^\circ.$$

Движение с переменной скоростью

Величина, характеризующая быстроту изменения скорости, называется *ускорением.*

Среднее ускорение — величина, равная отношению изменения скорости к промежутку времени, за который это изменение произошло:

$$\mathbf{a}_\text{ср} = \Delta\mathbf{v}/\Delta t. \tag{1.7}$$

Если $\mathbf{v}_1$ и $\mathbf{v}_2$ — мгновенные скорости в моменты времени t_1 и t_2, то

$$\Delta\mathbf{v} = \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1, \quad \Delta t = t_2 - t_1.$$

На рис. 1.6 изображены векторы мгновенных скоростей. Чтобы их сравнить, сделаем параллельный перенос вектора $\mathbf{v}_2$ в точку A. Тогда $\Delta\mathbf{v}$ определит направление $\mathbf{a}_\text{ср}$.

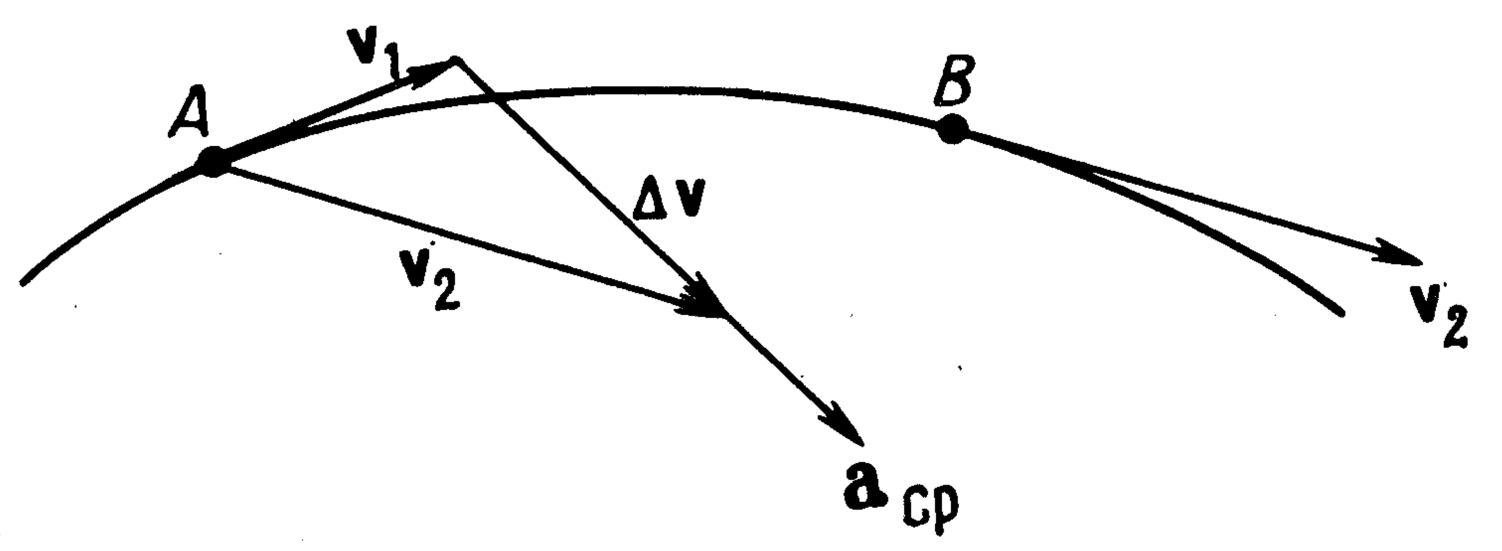


Рис. 1.6.

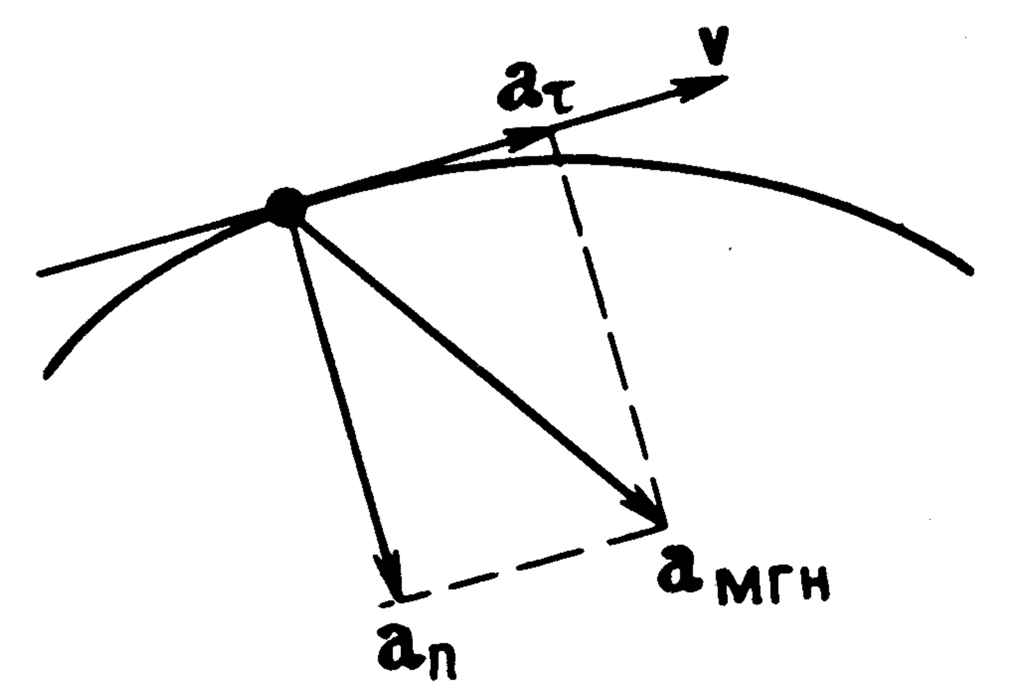


Рис. 1.7.

Мгновенное ускорение — ускорение тела в данный момент времени. Это физическая величина, равная пределу отношения изменения скорости к промежутку времени, за который это изменение произошло, при стремлении промежутка времени к нулю:

$$\mathbf{a}_{\text{мгн}} = \lim_{\Delta t \to 0} \Delta\mathbf{v}/\Delta t. \tag{1.8}$$

Вектор $\mathbf{a}_{\text{мгн}}$ направлен так же, как и вектор $\Delta\mathbf{v}$ при $\Delta t \to 0$, и не совпадает в общем случае с направлением вектора скорости $\mathbf{v}$.

Пусть $\mathbf{a}_{\text{мгн}}$ направлен, как указано на рис. 1.7, под углом к вектору скорости. Ускорение характеризует изменение скорости по величине и по направлению. Разложим ускорение на две составляющие: a_τ — тангенциальное ускорение и a_n — нормальное (центростремительное) ускорение. Компонента a_τ направлена по касательной к траектории и характеризует изменение скорости по величине, $\mathbf{a}_n$ направлено к центру кривизны траектории (по нормали к скорости) и характеризует изменение скорости по направлению. Компонента $a_n = v^2/R$ (покажем ниже), где $\mathbf{v}$ — мгновенная скорость, R — радиус кривизны траектории в данной точке,

$$\mathbf{a}_{\text{мгн}} = \mathbf{a}_\tau + \mathbf{a}_n. \tag{1.9}$$

Модуль мгновенного ускорения равен

$$a_{\text{мгн}} = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}. \tag{1.10}$$

Прямолинейное равноускоренное движение

Если $a_n = 0$, т. е. скорость не изменяется по направлению, а a_τ остается постоянным, то материальная точка движется прямолинейно и равноускоренно. В этом случае среднее ускорение равно мгновенному:

$$\mathbf{a}_{\text{ср}} = \mathbf{a}_{\text{мгн}}.$$

Направим ось x вдоль направления движения ($a_x = a$, $v_{0x} = v_0$, $v_x = v$). Тогда из определения ускорения следует

$$a = (v - v_0)/t,$$

откуда

$$v = v_0 + at. \tag{1.11}$$

При равномерном движении перемещение равно $\Delta s = vt$ и, как видно из рис. 1.2, численно равно площади прямоугольника. Если скорость изменяется со временем, то, разделяя промежуток времени на малые промежутки, в пределах каждого из которых скорость можно считать постоянной, получим, что перемещение

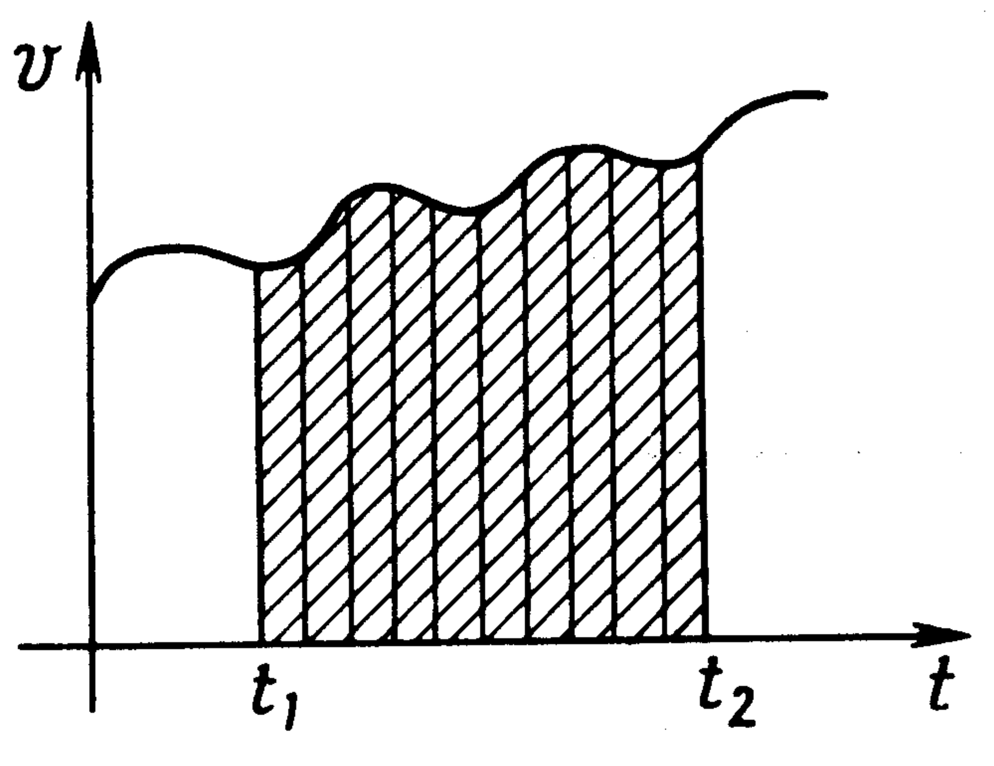


Рис. 1.8.

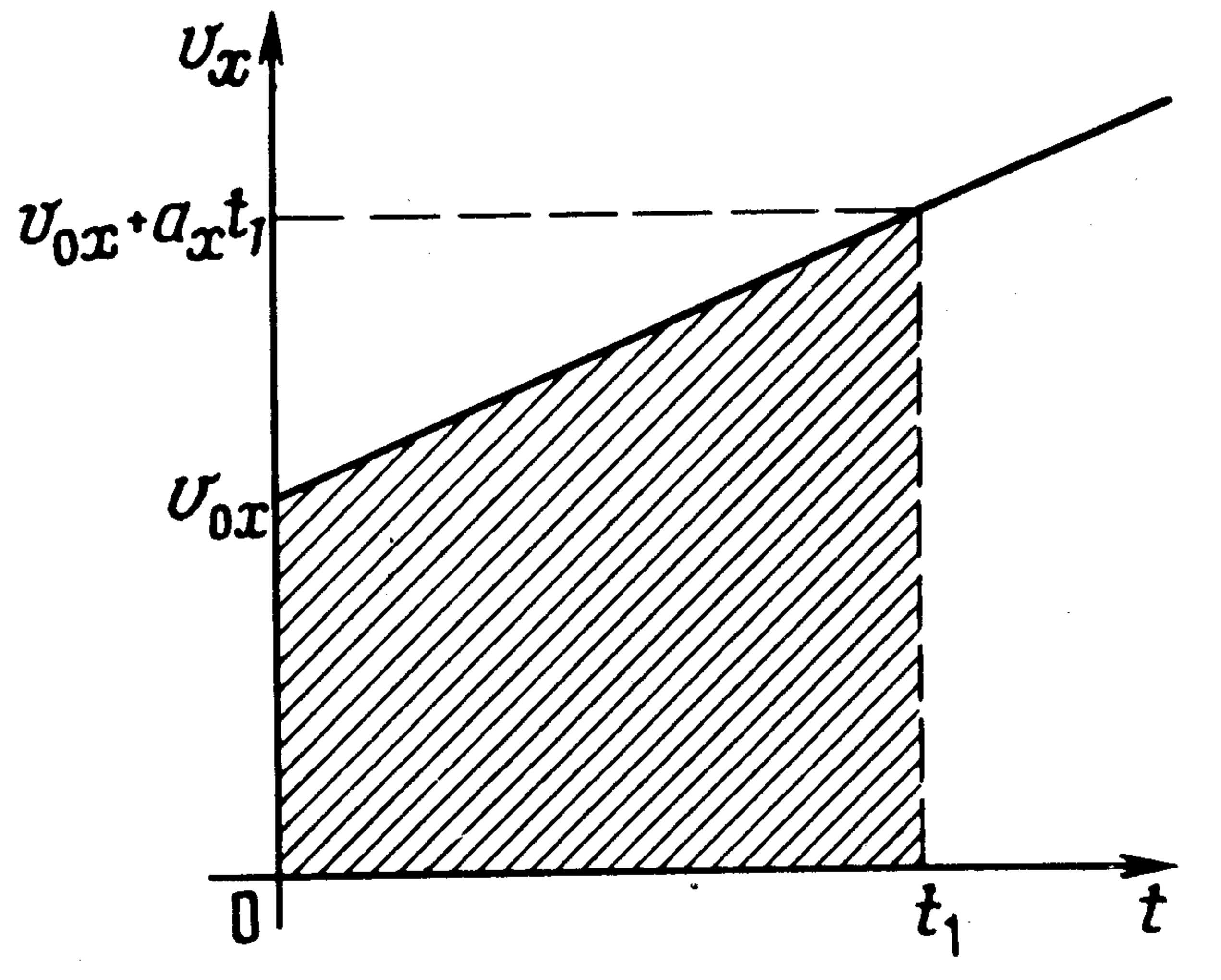


Рис. 1.9.

за некоторый промежуток времени Δt численно равно сумме площадей малых прямоугольников или площади криволинейной трапеции (рис. 1.8).

Зная закон изменения скорости при прямолинейном равноускоренном движении и изобразив его на графике (рис. 1.9), мы имеем для перемещения следующую формулу:

$$\Delta x = \frac{v_{0x} + v_x}{2} t_1 = \frac{v_{0x} + v_{0x} + a_x t_1}{2} t_1 = v_{0x} t_1 + a_x t_1^2/2. \tag{1.12}$$

Следовательно, положение (координата) материальной точки определяется выражением

$$x = x_0 + v_{0x} t + a_x t^2/2.$$

Если ускорение или скорость направлены в сторону, противоположную направлению x, то проекция их на ось x будет отрицательной. Поэтому в общем виде формула для скорости и закон движения запишутся так:

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \mathbf{v}_0 + \mathbf{a}t, \\ v_x &= \pm v_0 \pm at, \\ \Delta\mathbf{s} &= \mathbf{v}_0 t + \mathbf{a}t^2/2, \end{aligned} \tag{1.13}$$

или в проекции на ось x

$$x = x_0 \pm v_0 t \pm at^2/2. \tag{1.14}$$

Если начальная скорость и ускорение совпадают по направлению, движение тела будет ускоренным, если направления их различны, то движение замедленное. Изобразим на графиках зависимости

$$x(t),\ v_x(t) \text{ и } a_x(t)$$

(см. рис. 1.10) в случае ускоренного и замедленного движений, при условии $v_{0x} > 0$. Из рис. 1.10 видно, что если $a_x > 0$ и совпадает с направлением начальной скорости, то скорость непрерывно возрастает, что следует из рис. 1.10,*б*, а также 1.10,*в* — увеличивается тангенс угла наклона графика $x(t)$, который определяет скорость материальной точки $v = \Delta x/\Delta t = \mathrm{tg}\alpha$. График $x(t)$ при $a_x > 0$ — парабола с ветвями, направленными вверх (рис. 1.10,*в*). Вершина параболы в общем случае не совпадает с началом координат. При $a_x < 0$ скорость уменьшается до 0, а затем тело изменяет направление движения и величина скорости будет увеличиваться (рис. 1.10,*д*). График $x(t)$ при $a_x < 0$ (рис. 1.10,*е*) представляет собой параболу с ветвями, направленными вниз.

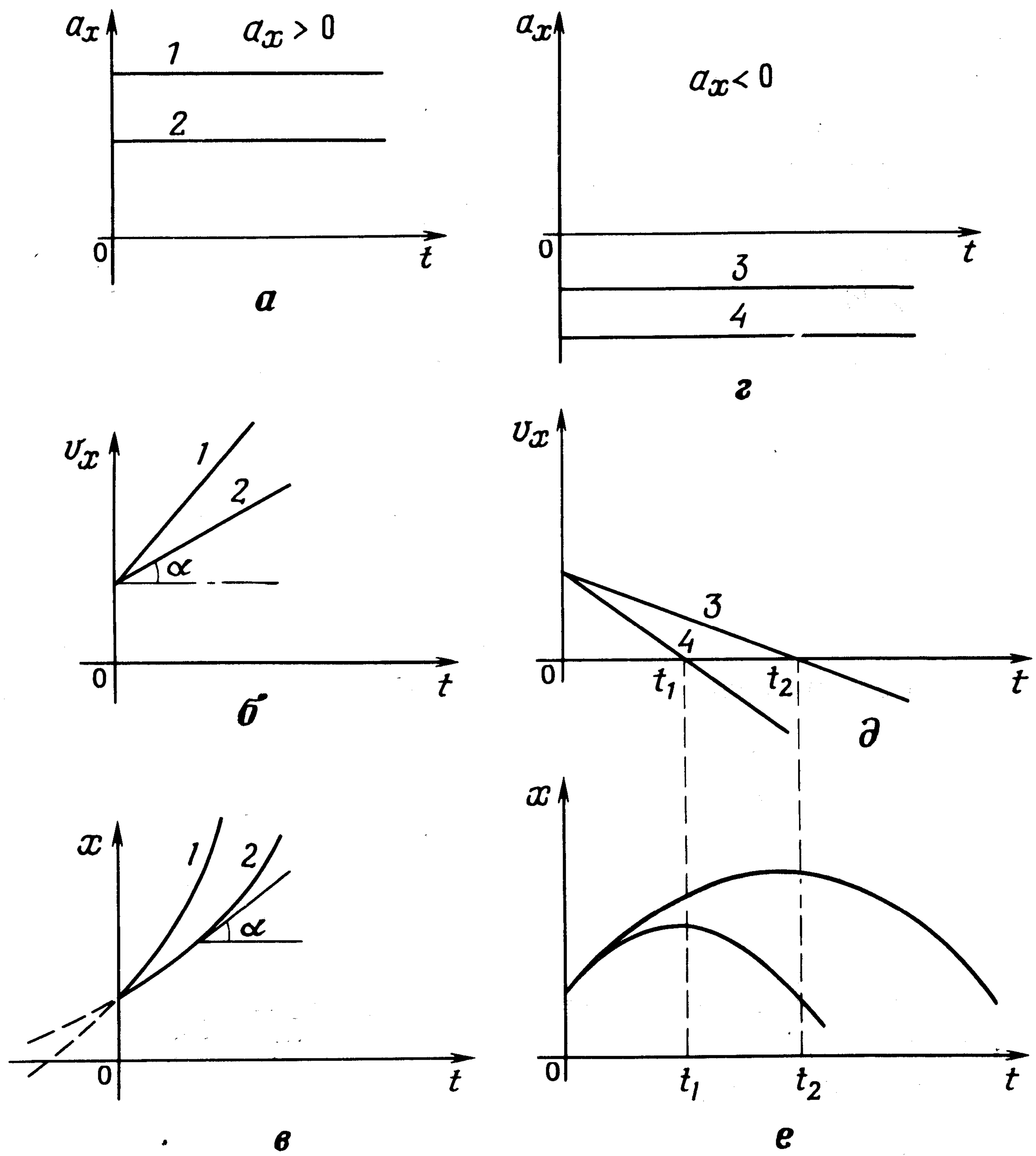


Рис. 1.10.

Примеры решения задач

Задача 4. На рис. 1.11 изображена зависимость скорости от времени.

1) Нарисовать зависимость ускорения и перемещения от времени.

2) Определить перемещение за время $\Delta t = t_3$.

3) Определить среднюю скорость движения в течение промежутка времени $\Delta t = t_3$.

Решение. В течение промежутка времени от 0 до t_1 материальная точка движется равноускоренно, так как скорость растет со временем по линейному закону. Ускорение равно

$$(a_1)_x = (v_1 - 0)/t_1 = 1\,\text{м/с}^2.$$

В течение промежутка времени $\Delta t = t_2 - t_1$ материальная точка движется равномерно $v = v_1 = \text{const}$, $a_2 = 0$. При $t > t_2$ точка движется равнозамедленно с ускорением

$$(a_3)_x = \frac{0 - v_1}{t_3 - t_2} = -0,5\,\text{м/с}^2.$$

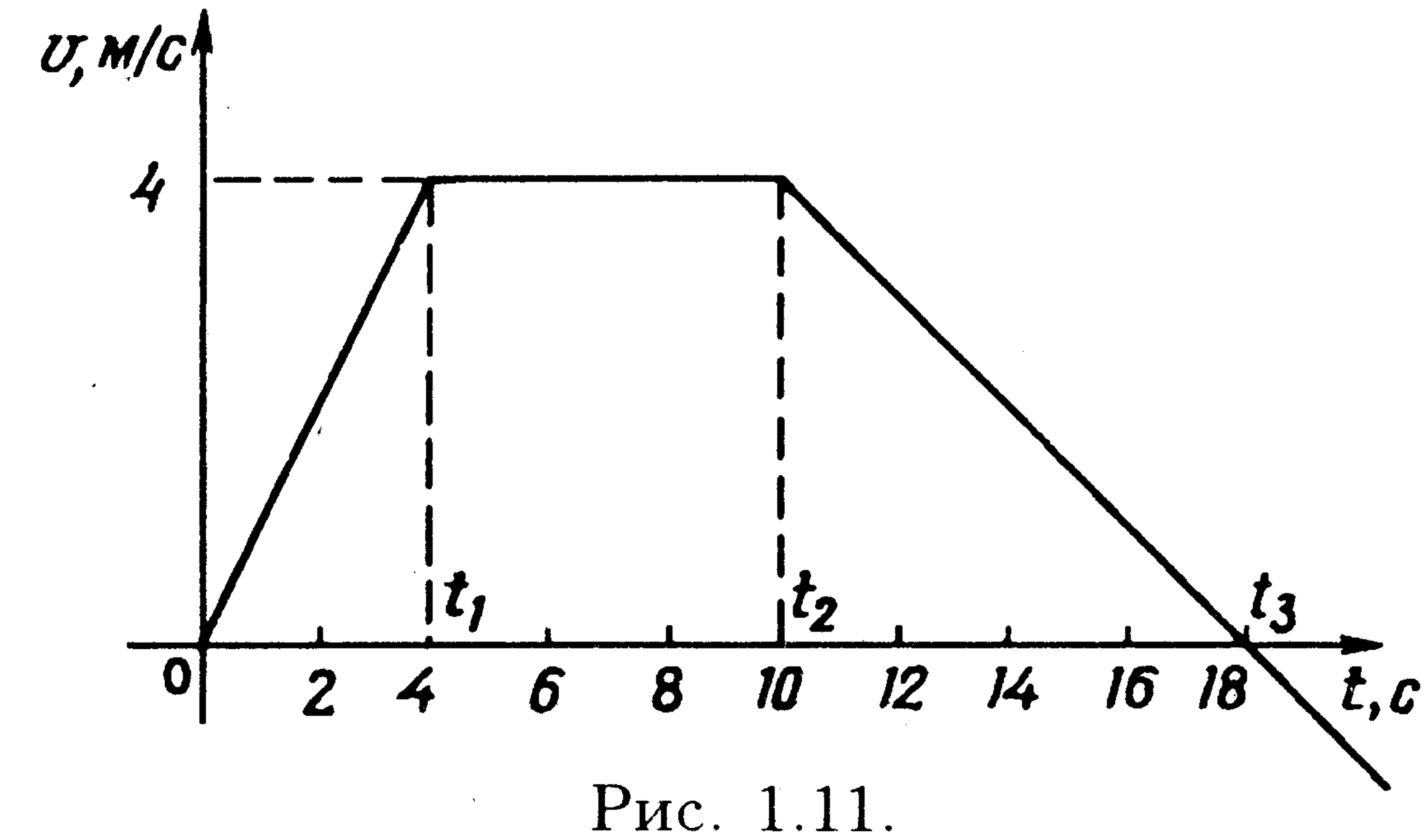


Рис. 1.11.

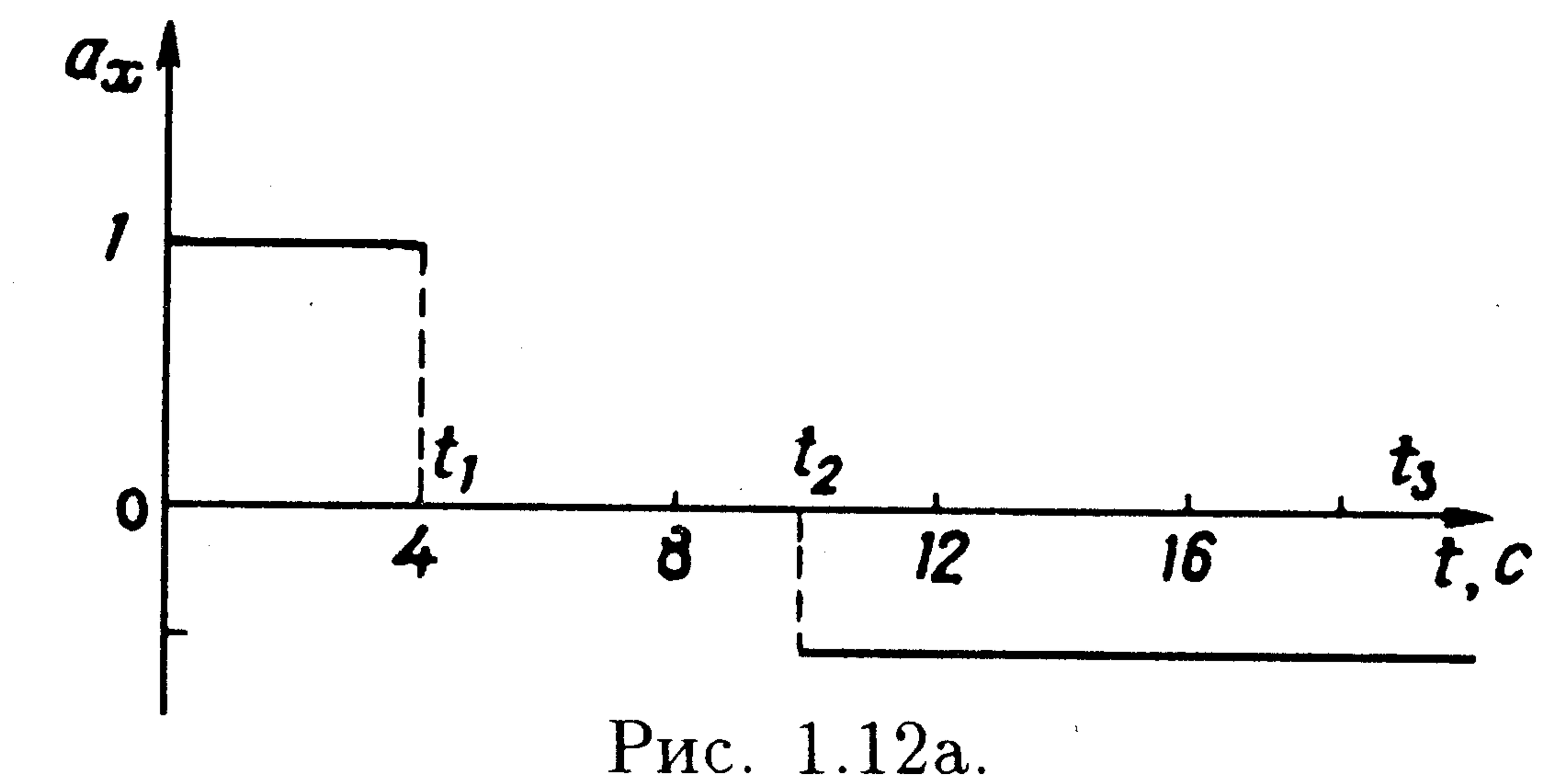


Рис. 1.12а.

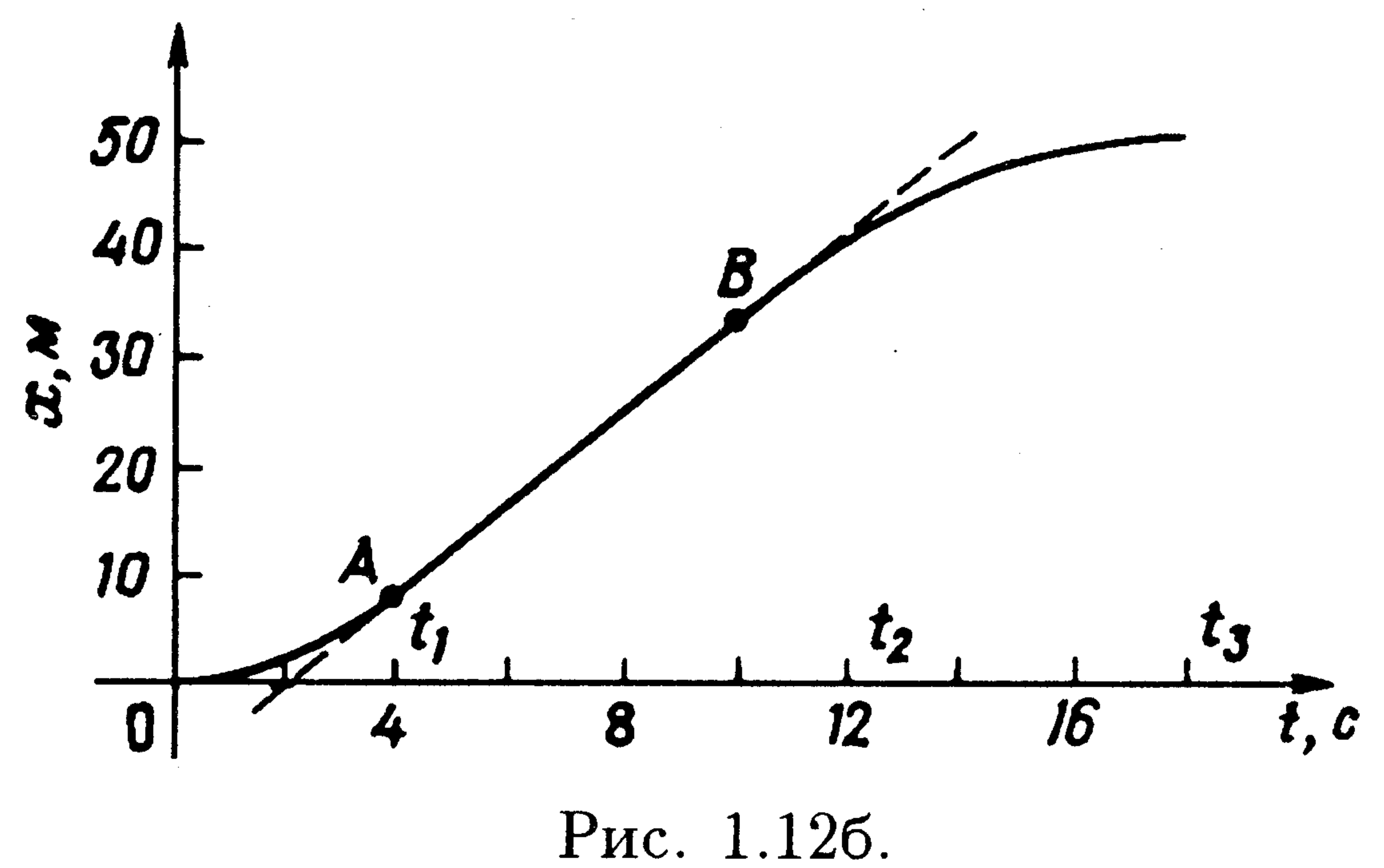


Рис. 1.12б.

На рис. 1.12а изображена зависимость a_x от t. Зависимость $x(t)$ в интервале $0 < t < t_1$ определится по формуле $x = 0 + a_{1x}t^2/2$ и при $t = t_1$ $x_1 = a_{1x}t_1^2/2 = 8$ м. Скорость в момент времени t_1 станет равна v_1, и тело начинает двигаться равномерно:

$$x = x_1 + v_{1x}(t - t_1).$$

В момент времени t_2 координата материальной точки $x_2 = 8 + 4 \cdot 6 = 32$ м. Начиная с $t = t_2$ тело движется равнозамедленно:

$$x_3 = x_2 + v_{1x}(t_3 - t_2) + a_{2x}(t_3 - t_2)^2/2.$$

К моменту времени t_3 x равно:

$$x_3 = 32 + 4(18 - 10) - 0,5(18 - 10)^2/2\,\text{м} = 48\,\text{м},$$

$$v_{\text{ср}} = x_3/t_3 = 48/18 \cong 2,7\,\text{м/с}.$$

На графике зависимость $x(t)$ изобразится следующим образом (рис. 1.12б). Кривая, изображающая зависимость $x(t)$, состоит из трех участков: параболы, прямой, параболы. Отметим, что парабола плавно переходит в прямую в точке A (и в точке B), так как значение мгновенной скорости определяется тангенсом угла наклона касательной к графику $x(t)$ и в каждой точке графика должна быть единственная касательная. Перемещение также можно было бы определить как площадь трапеции:

$$x_3 = v_{1x}t_1/2 + v_{1x}(t_2 - t_1) + v_{1x}(t_3 - t_2)/2,$$
$$x_3 = [(4\cdot 4)/2 + 4\cdot 6 + (4\cdot 8)/2]\ \text{м} = 48\,\text{м}.$$

Задача 5. Тело брошено вверх с высоты $h_0 = 2$ м со скоростью 30 м/с. Определить

1) время полета до падения на землю t;
2) максимальную высоту подъема $h_{\max}$;
3) конечную скорость $v_{\text{кон}}$.

Дано: $h_0 = 2$ м, $v_0 = 30$ м/с, $g = 9{,}8$ м/с^2; t — ? $h_{\max}$ — ? $v_{\text{кон}}$ — ?

Решение.

Свободное падение тел, т. е. движение под действием силы тяжести при отсутствии сопротивления, — это типичный пример равнопеременного движения. Отметим, что тело движется с постоянным ускорением $\mathbf{g}$ — *ускорением свободного падения*, направленным вертикально вниз. Ось y направим вертикально вверх. Начало отсчета координат поместим на поверхности земли (рис. 1.13). Проекция начальной скорости на y положительна:

$$v_{0y} = v_0 > 0.$$

Проекция ускорения на y отрицательна:

$$a_y = -g < 0.$$

Запишем уравнение движения согласно (1.14):

$$y(t) = h_0 + v_0t - gt^2/2,$$

где $y_0 = h_0$.

1) Когда тело упадет на землю, $y(t)$ станет равным нулю. Из этого условия можно определить время полета тела:

$$0 = h_0 + v_0t - gt^2/2.$$

Решая квадратное уравнение, получим

$$t_{1,2} = \left(v_0 \pm \sqrt{v_0^2 + 2gh_0}\right)/g.$$

Очевидно, $t > 0$, поэтому выбираем

$$t = \left(v_0 + \sqrt{v_0^2 + 2gh_0}\right)/g.$$

Скорость при движении изменяется согласно формуле (1.13):

$$v_y = v_{0y} - gt.$$

В наивысшей точке подъема скорость станет равной нулю:

$$0 = v_0 - gt_{\text{под}}.$$

Отсюда время подъема до наивысшей точки

$$t_{\text{под}} = v_{0y}/g.$$

2) Подставляя это выражение в уравнение движения, найдем максимальную высоту подъема $h_{\max}$:

$$h_{\max} = h_0 + v_0 t_{\text{под}} - g t_{\text{под}}^2/2,$$
$$h_{\max} = h_0 + v_0^2/g - g v_0^2/2g^2 = h_0 + v_0^2/2g,$$
$$h_{\max} = 2\text{м} + \frac{900}{2 \cdot 9,8}\,\text{м} = 47,9\,\text{м}.$$

3) Для определения скорости тела в момент падения на землю подставим найденное время полета в уравнение для скорости (1.13):

$$v_{\text{кон}} = v_{0y} - gt = v_0 - g\frac{v_0 + \sqrt{v_0^2 + 2gh_0}}{g},$$
$$v_{\text{кон}} = -\sqrt{v_0^2 + 2gh_0},$$
$$v_{\text{кон}} = -\sqrt{900 + 2 \cdot 9,8 \cdot 2}\,\text{м/с} = -30,6\,\text{м/с},$$

Конечная скорость направлена вниз, поэтому ее проекция на ось y отрицательна, что и получено при решении задачи.

Задача 6. Тело падает с высоты h_0 и при ударе теряет 20% своей скорости. Определить максимальную высоту, на которую поднимется тело после удара.

Дано: h_0, $v_1 = 0,8v_0$; h — ?

Решение. Пусть ось y направлена вертикально вверх, начало отсчета лежит на поверхности земли. Проекция ускорения на ось y $a_y = -g$, $v_{0y} = 0$. Тогда уравнение движения тела до удара, согласно (1.14):

$$y = h_0 - gt^2/2.$$

Для скорости (согласно (1.13)) имеем:

$$v_y = -gt.$$

Время падения t_1 определится из условия $y = 0$:

$$h_0 = gt_1^2/2, \quad t_1 = \sqrt{2h_0/g}.$$

Скорость в момент падения v_{0y} равна

$$v_{0y} = -\sqrt{2gh_0}.$$

При ударе теряется 20% скорости, поэтому скорость v, с которой тело начинает двигаться вверх, равна

$$v_1 = 0,8v_0 = 0,8\sqrt{2gh_0}.$$

Время подъема t_2 после удара определяется из условия

$$v_y = v_1 - gt_2 = 0, \quad t_2 = v_1/g.$$

Подставив t_2 в уравнение движения $y = v_1 t - gt^2/2$, получим

$$h = v_1^2/2g = 0,64h_0.$$

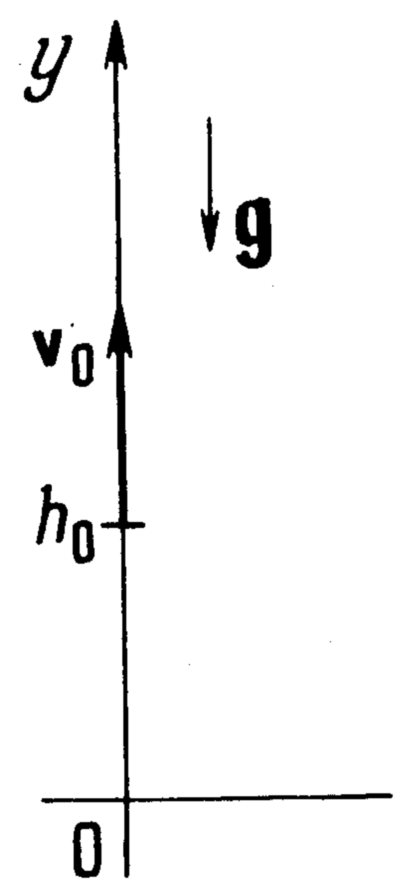


Рис. 1.13.

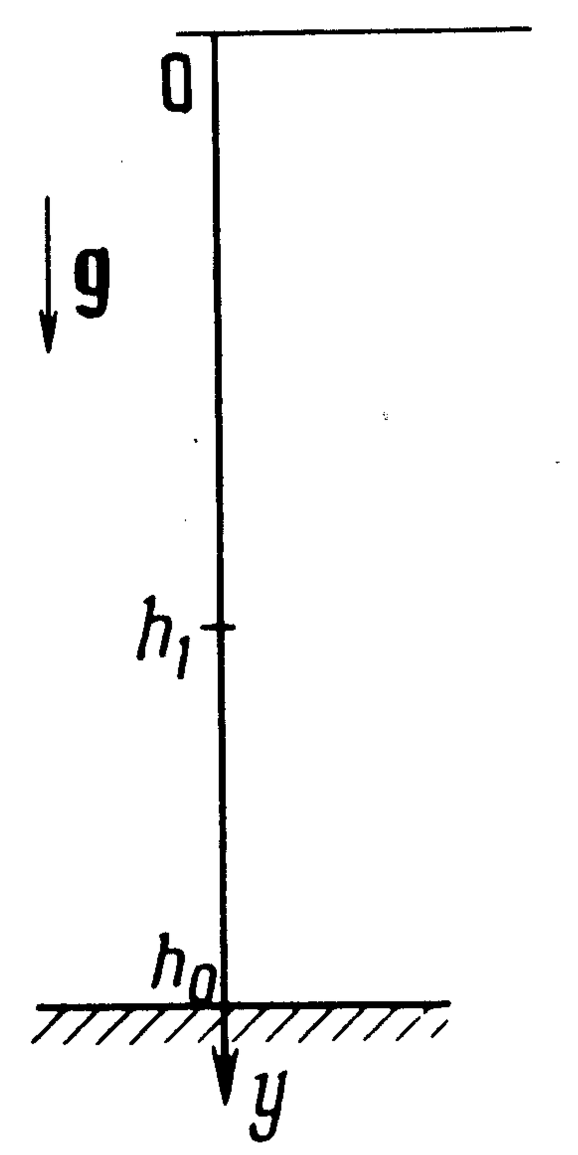


Рис. 1.14.

Задача 7. Тело падает вертикально вниз с высоты 20 м без начальной скорости. Определить

1) путь h, пройденный телом за последнюю секунду падения,

2) среднюю скорость падения $v_{\text{ср}}$,

3) среднюю скорость на второй половине пути $v_{\text{ср}_2}$.

Считать $g = 10\,\text{м/с}^2$.

Дано: $h_0 = 20\,\text{м}$, $v_0 = 0$, $\Delta t = 1$ с; h — ? $v_{\text{ср}}$ — ? $v_{\text{ср}_2}$ — ?

Решение. Направим ось y вертикально вниз, и пусть начало координат совпадает с начальным положением тела. Тогда $a_y = g$ (рис. 1.14).

1) Согласно (1.14), уравнение движения запишется в виде

$$y = gt^2/2.$$

В момент падения на землю $y = h_0$. Отсюда время движения тела

$$t = \sqrt{2h_0/g}.$$

За время $(t - \Delta t)$ тело прошло путь

$$h_1 = g(t - \Delta t_0)^2/2.$$

Путь за последнюю секунду равен

$$h_0 - h_1 = h_0 - \frac{1}{2}g\left(\sqrt{\frac{2h_0}{g}} - \Delta t\right)^2,$$

$$h = 20 - \frac{10(\sqrt{2 \cdot 20/10} - 1)^2}{2}\,\text{м} = 15\,\text{м}.$$

2) Тело прошло путь h_0. Время движения $t = \sqrt{2h_0/g}$. Тогда средняя скорость падения $v_{\text{ср}} = h_0/t$, или

$$v_{\text{ср}} = \sqrt{gh_0/2},$$

$$v_{\text{ср}} = \sqrt{\frac{10 \cdot 20}{2}}\,\text{м/с} = 10\,\text{м/с}.$$

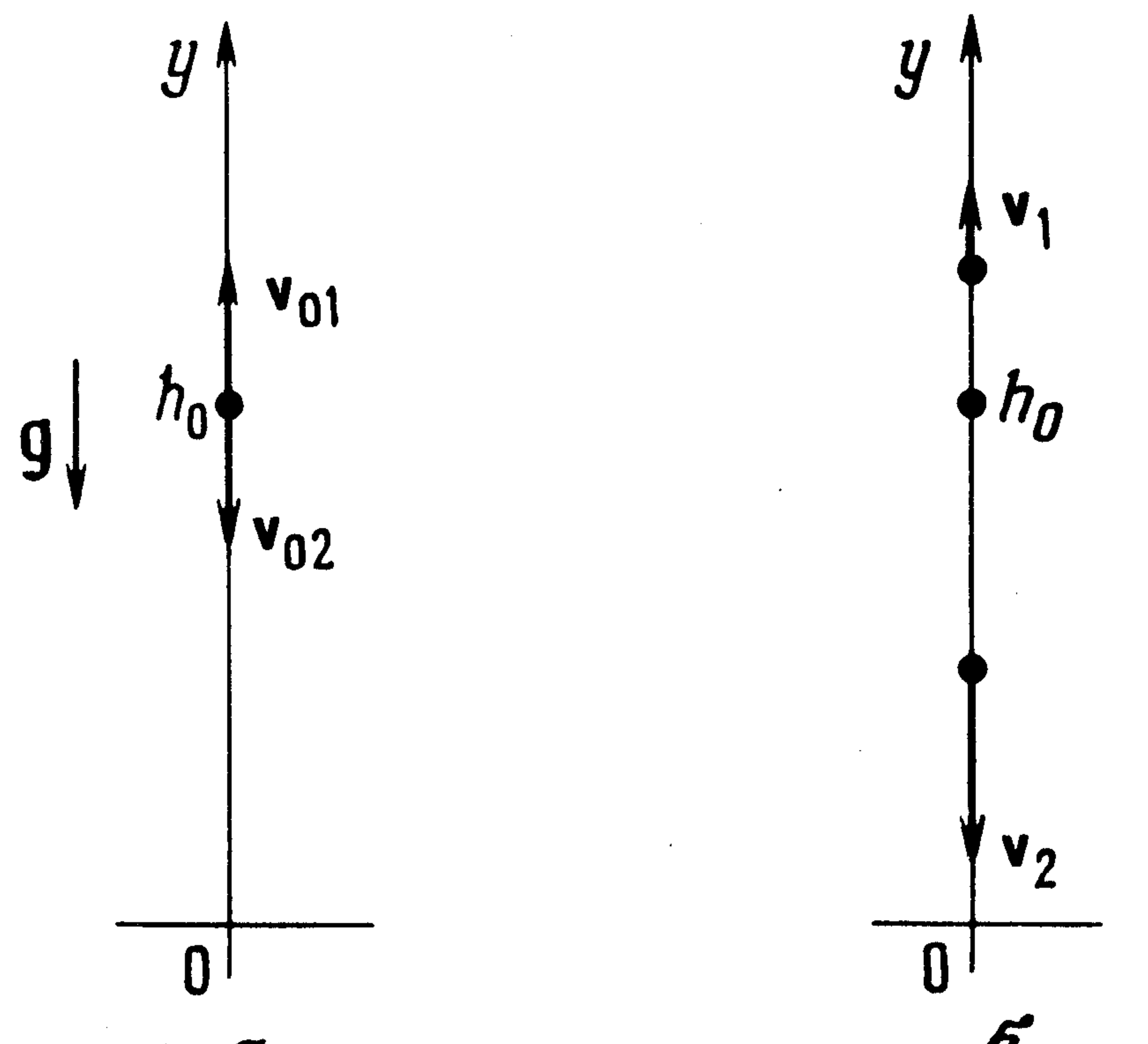


Рис. 1.15.

3) Для определения средней скорости на второй половине пути необходимо узнать время, за которое эта часть пути пройдена. Время движения на второй половине пути равно полному времени полета t минус время t_1, затраченное на прохождение первой половины пути. Время t_1 находится из уравнения

$$h_0/2 = gt_1^2/2$$

т. е.

$$t_1 = \sqrt{h_0/g}.$$

Таким образом,

$$t_2 = t - t_1 = \sqrt{2h_0/g} - \sqrt{h_0/g} = \sqrt{h_0/g}(\sqrt{2} - 1).$$

Следовательно,

$$v_{\text{ср}_2} = h_0/2t_2 = \sqrt{gh_0}/2(\sqrt{2} - 1),$$

$$v_{\text{ср}_2} \approx 17\,\text{м/с}.$$

Задача 8. С башни высотой h_0 одновременно бросают два шарика: один вверх со скоростью v_{01}, другой вниз со скоростью v_{02}. Определить

1) зависимость расстояния между шариками от времени;

2) промежуток времени, отделяющий моменты их падения на землю Δt.

Дано: h_0, v_{01}, v_{02}; $s(t)$ — ? Δt — ?

Решение. Для решения задачи выберем ось y, направленную вертикально вверх, начало координат совместим с поверхностью земли (рис. 1.15,*а*). Тогда уравнение движения первого шарика, согласно (1.14), имеет вид

$$y_1 = y_{01} + v_{01}t - gt^2/2,$$

где $y_{01} = h_0$. Знаки при членах написанного уравнения объясняются тем, что проекция скорости первого шарика на ось y положительная, а проекция ускорения — отрицательная величина.

Для второго шарика имеем

$$y_2 = y_{02} - v_{02}t - gt^2/2,$$

где $y_{02} = h_0$. Проекция скорости второго шарика на ось y — отрицательная величина, поэтому при втором члене уравнения стоит знак минус.

Как видно из рис. 1.15,*б*, расстояние между шариками

$$s(t) = y_1 - y_2 = y_{01} + v_{01}t - gt^2/2 - y_{02} + v_{02}t + gt^2/2 = (v_{01} + v_{02})t.$$

Расстояние между шариками увеличивается равномерно, со скоростью $v_{01} + v_{02}$, которая является относительной скоростью одного шарика относительно другого, хотя сами шарики движутся ускоренно. Это объясняется тем, что они движутся с одинаковым ускорением и при уменьшении скорости v_1 на такую же величину увеличится v_2 за время t, так что относительная скорость останется постоянной и равной $v_{01} + v_{02}$. Такой характер зависимости сохранится до падения второго шарика на землю ($y_2 = 0$), т. е. момента времени t_{II}. Тогда

$$0 = h_0 - v_{02}t_{\text{II}} - gt_{\text{II}}^2/2,$$

откуда

$$(t_{\text{II}})_{1,2} = \left(-v_{02} \pm \sqrt{v_{02}^2 + 2gh_0}\right)/g.$$

Очевидно, что так как $t > 0$, то следует выбрать

$$t_{\text{II}} = \left(-v_{02} + \sqrt{v_{02}^2 + 2gh_0}\right)/g.$$

Начиная с этого момента времени расстояние между шариками определяется расстоянием первого шарика от поверхности Земли. Расстояние между шариками станет равным нулю, когда первый шарик упадет на землю.

Момент времени падения первого шарика t_{I} можно определить из уравнения

$$0 = h_0 + v_{01}t_{\text{I}} - gt_{\text{I}}^2/2,$$

откуда

$$(t_{\text{I}})_{1,2} = \left(v_{01} \pm \sqrt{v_{01}^2 + 2gh_0}\right)/g.$$

Очевидно, что искомое время t_{I} ($t_{\text{I}} > 0$) равно

$$t_{\text{I}} = \left(v_{01} + \sqrt{v_{01}^2 + 2gh_0}\right)/g.$$

Итак, расстояние между шариками будет определяться следующими зависимостями:

$$s(t) = \begin{cases} (v_{01} + v_{02})t & \text{при} \quad t < t_{\text{II}}, \\ v_{01}t - (gt^2/2) + h_0 & \text{при} \quad t_{\text{II}} < t < t_{\text{I}}, \\ 0 & \text{при} \quad t > t_{\text{I}}. \end{cases}$$

Промежуток времени, отделяющий моменты падения шариков, определится по формуле

$$\Delta t = t_{\text{I}} - t_{\text{II}} = \left(v_{01} + \sqrt{v_{01}^2 + 2gh}\right)/g - \left(-v_{02} + \sqrt{v_{02}^2 + 2gh}\right)/g.$$

Задача 9. Два пункта A и B расположены на расстоянии $l = 240$ м друг от друга на склоне горы. От пункта A начинает равноускоренно спускаться к пункту B велосипедист с начальной скоростью $v_{01} = 8$ м/с. Одновременно из пункта B к пункту A начинает равнозамедленно подниматься мотоциклист с начальной скоростью $v_{02} = 16$ м/с. Они встречаются через $t_1 = 10$ с, к этому времени велосипедист проехал $s_1 = 130$ м. С каким ускорением ехал каждый из них?

Дано: $v_{01} = 8\,\text{м/с}$, $v_{02} = 16\,\text{м/с}$, $s_1 = 130\,\text{м}$, $l = 240\,\text{м}$, $t_1 = 10\,\text{с}$; a_1 — ? a_2 — ?

Решение. Выберем ось x, направленную вниз вдоль склона горы (рис. 1.16). Проекция начальной скорости велосипедиста на ось $v_{1x} = v_{01}$, проекция ускорения $a_{1x} = a_1$. Уравнение движения велосипедиста, согласно (1.14),

$$x_1 = v_{01}t + a_1t^2/2.$$

Проекция начальной скорости мотоциклиста на ось x: $v_{2x} = -v_{02}$, проекция ускорения $a_{2x} = a_2$. Уравнение движения мотоциклиста

$$x_2 = x_{02} - v_{02}t + a^2t^2/2, \quad x_{02} = l.$$

Согласно условию задачи, в момент встречи $t = t_1$ положение велосипедиста определится выражением

$$x_1 = s_1 = v_{01}t_1 + a_1t_1^2/2,$$

отсюда

$$a_1 = (s_1 - v_{01}t_1)/t_1^2/2.$$

В момент встречи

$$x_1 = x_2 = s_1,$$

отсюда

$$\begin{aligned} s_1 &= x_{02} - v_{02}t_1 + a_2t_1^2/2. \\ a_2 &= (s_1 - l + v_{02}t_1)/t_1^2/2, \\ a_1 &= \frac{130 - 8 \cdot 10}{50}\,\text{м/с}^2 = 1\,\text{м/с}^2, \\ a_2 &= \frac{130 - 240 + 16 \cdot 10}{50}\,\text{м/с}^2 = 1\,\text{м/с}^2. \end{aligned}$$

Задача 10. С поверхности земли с одинаковыми скоростями $v_0 = 20$ м/с вверх последовательно через промежуток времени $\Delta t = 1$ с брошены два мяча. Определить, когда и на каком расстоянии от поверхности земли они встретятся. Считать $g = 10\,\text{м/с}^2$.

Дано: $v_0 = 20\,\text{м/с}$, $\Delta t = 1\,\text{с}$; h — ?

Решение. Выберем ось y, направленную вертикально вверх, начало координат совместим с поверхностью земли. Начальные скорости совпадают с положительным направлением оси y , поэтому $v_{0y} = v_0$. Уравнение движения первого мяча имеет вид

$$y_1 = y_{01} + v_0t - gt^2/2,$$

где $y_{01} = 0$. Так как отсчет времени начинается с момента полета первого мяча, то для второго мяча уравнение движения имеет вид

$$y_2 = y_{02} + v_0(t - \Delta t) - g(t - \Delta t)^2/2,$$

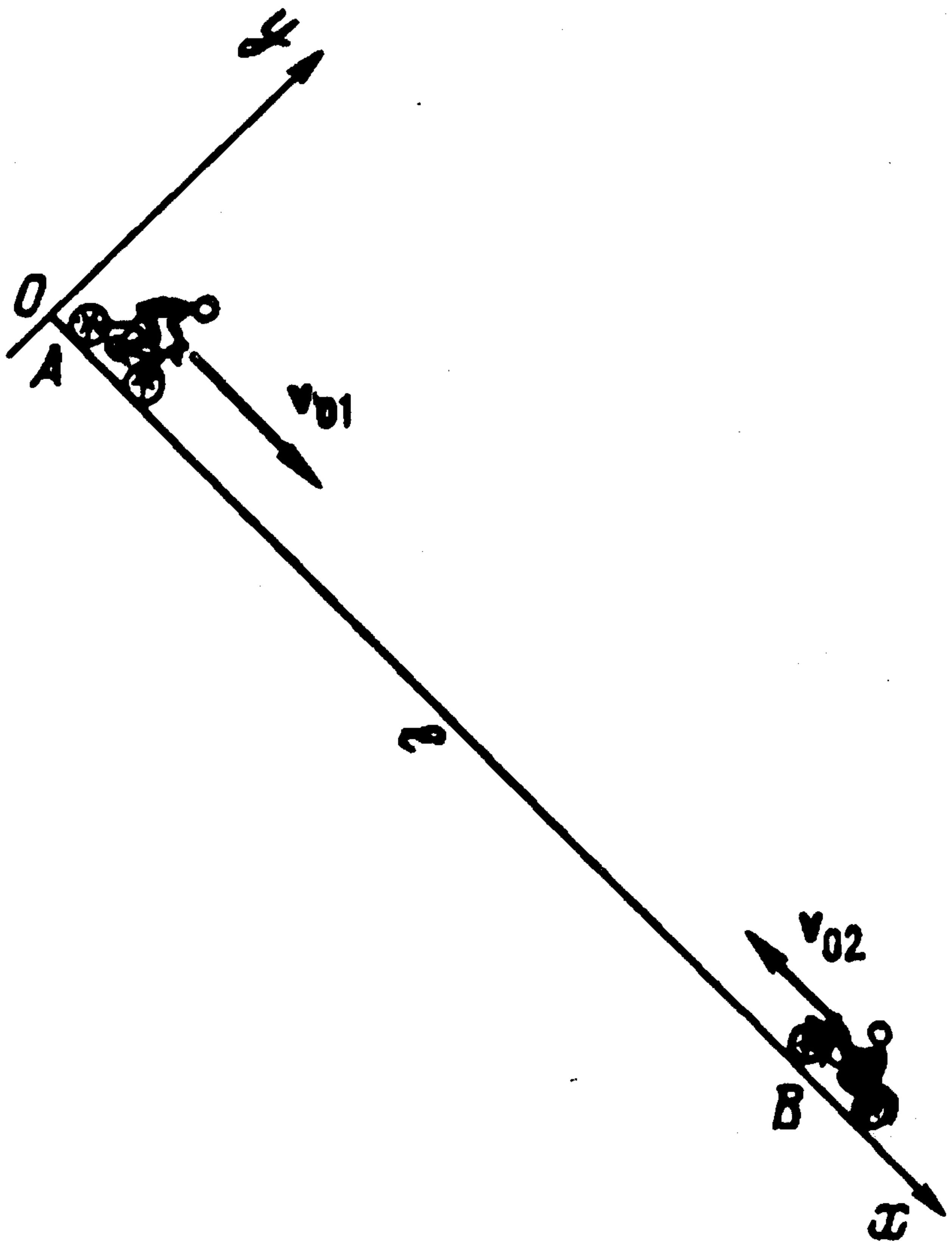


Рис. 1.16.

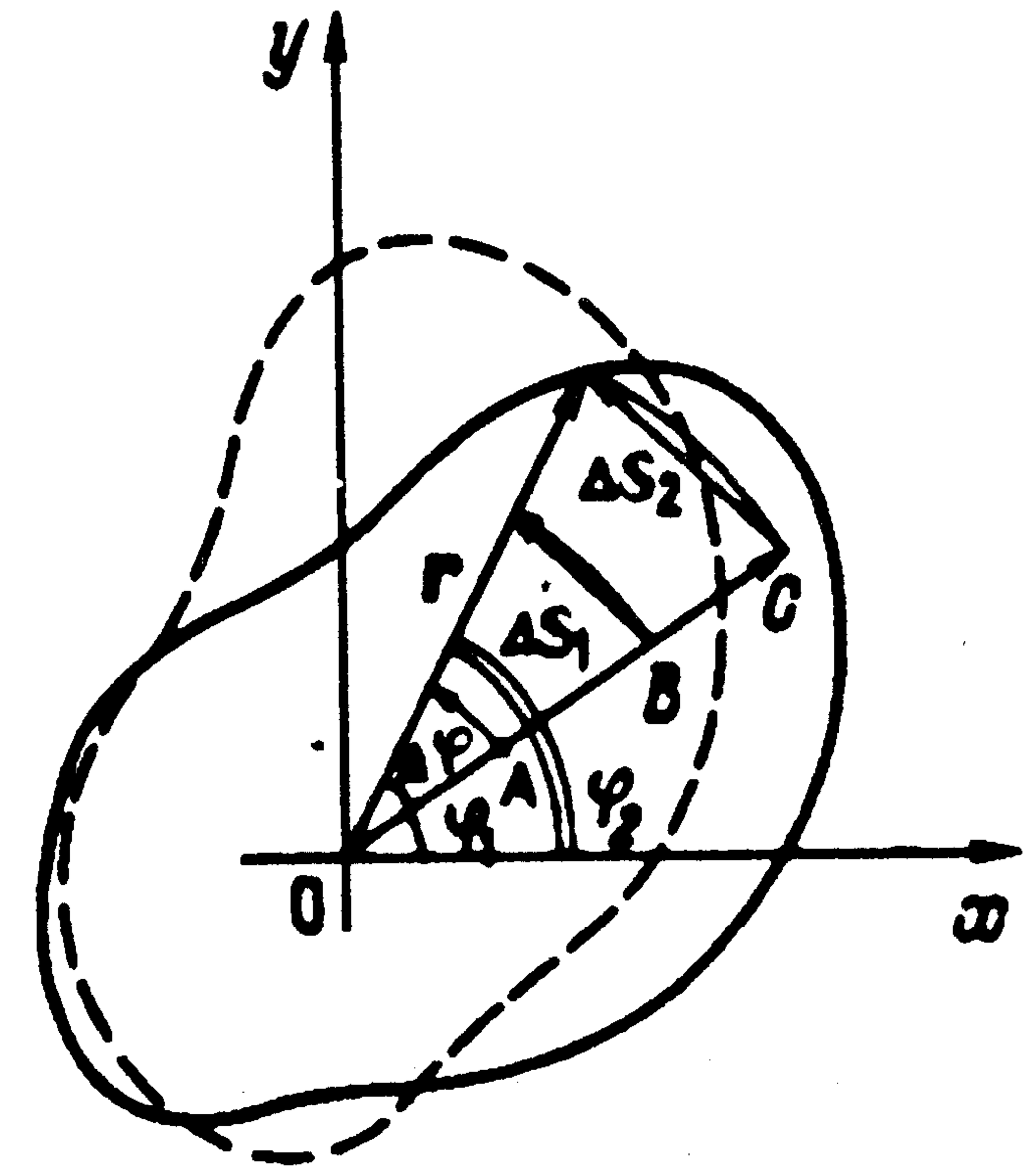


Рис. 1.17.

где $y_{02} = 0$. Очевидно, что мячи встретятся в одной точке пространства, или формально, когда совпадут их координаты, т. е. когда

$$y_1 = y_2,$$
$$v_0 t - gt^2/2 = v_0(t - \Delta t) - g(t - \Delta t)^2/2.$$

Отсюда момент встречи

$$t = \frac{v_0 \Delta t + g\Delta t^2}{g\Delta t} = \frac{v_0}{g} + \frac{\Delta t}{2},$$
$$t = 2,5\,\text{с}.$$

Подставив найденное t в выражение для y_1 или y_2, найдем h:

$$h = \frac{1}{2}\left(\frac{v_0^2}{g} - \frac{g\Delta t^2}{4}\right),$$
$$h = 18,75\,\text{м}.$$

Кинематика вращательного движения твердого тела и движения материальной точки по окружности

При движении материальной точки по окружности ее положение можно определить координатами x и y или углом поворота φ — углом между радиус-вектором $\mathbf{r}$ и осью x. Радиус-вектор $\mathbf{r}$ проведется от оси вращения к материальной точке.

Если рассматривать вращательное движение твердого тела, имеющего неподвижную ось вращения, то из рис. 1.17 следует, что угол поворота радиусов-векторов, определяющих положение всех точек твердого тела, будет одним и

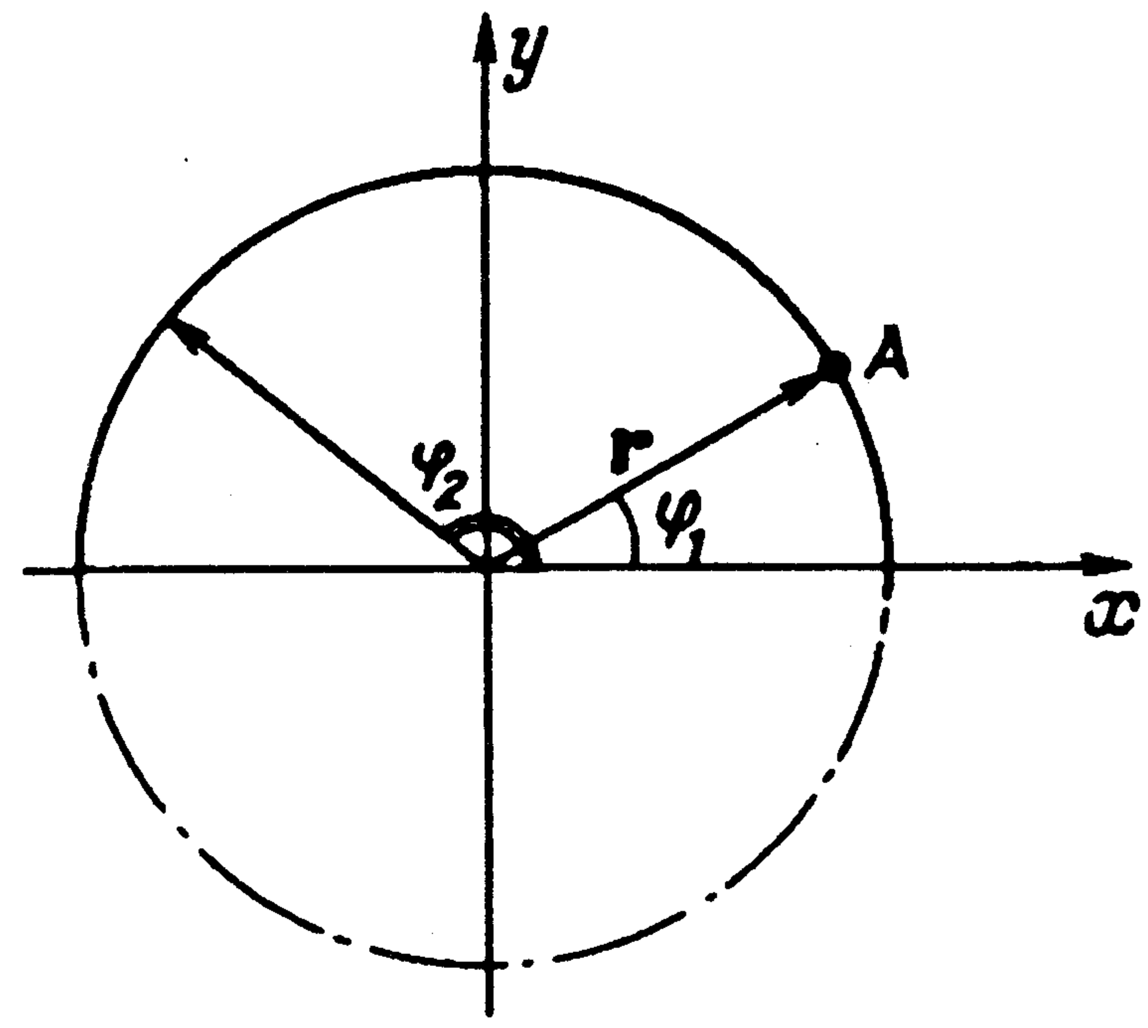


Рис. 1.18а.

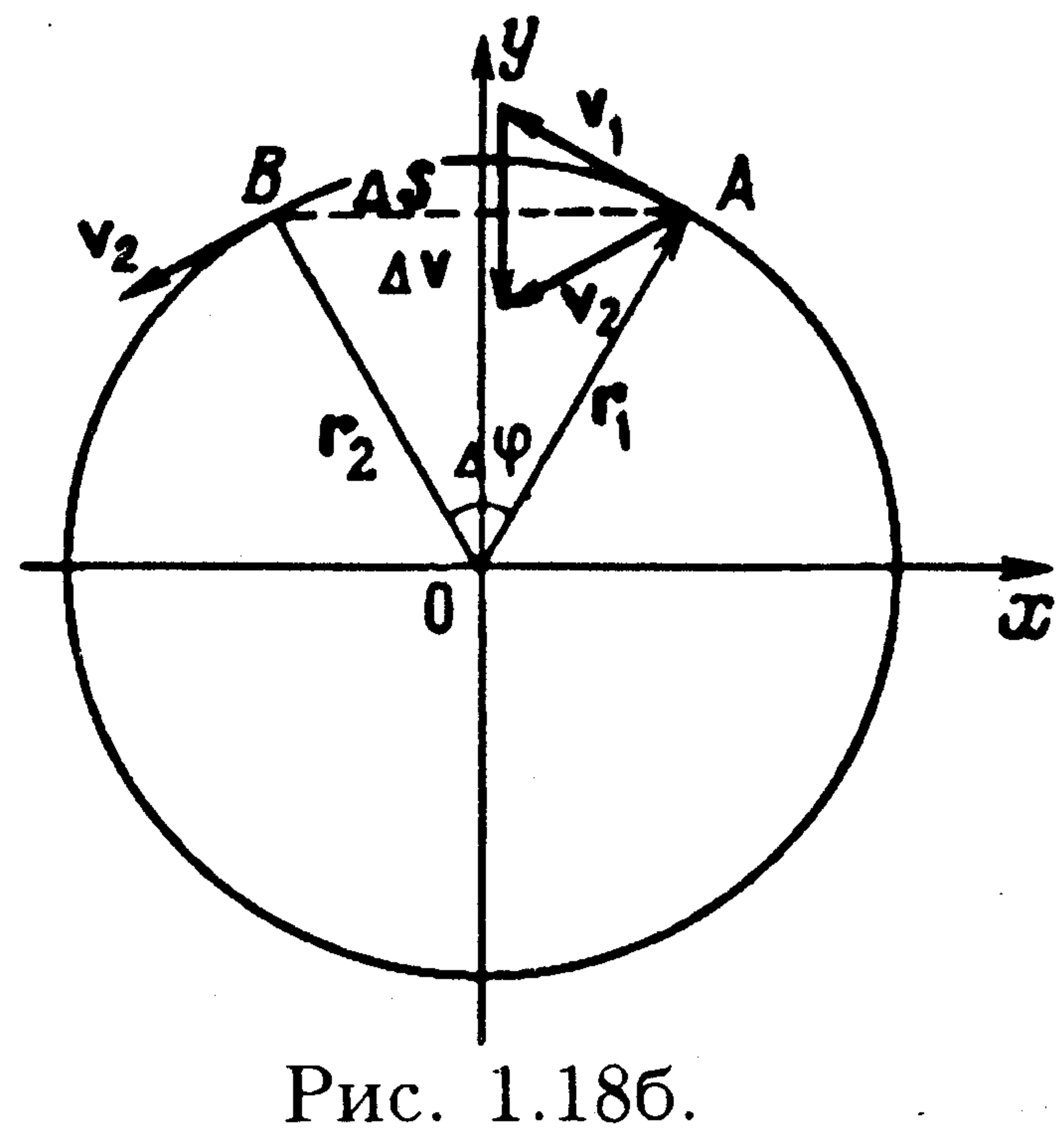


Рис. 1.18б.

тем же $\Delta\varphi_1 = \Delta\varphi_2 = \Delta y$, линейные же перемещения точек твердого тела будут различными ($|\Delta \mathrm{s}_1| \neq |\Delta \mathrm{s}_2|$). В связи с этим, если знать закон изменения угла $\varphi(t)$ для какой-то произвольной точки вращающегося твердого тела, то тем самым мы будем знать движение всех точек этого тела.

При равномерном движении материальной точки по окружности $a_\tau = 0$, $a_n \neq 0$, так как скорость изменяется только по направлению. Пусть за время Δt радиус-вектор, определяющий положение точки, повернулся на $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$ (рис. 1.18а).

Скорость изменения угла φ есть *угловая скорость* ω. При равномерном вращении

$$\omega = \Delta\varphi/\Delta t, \tag{1.15}$$

т. е. угловая скорость равна отношению угла поворота радиуса-вектора к промежутку времени, за который этот поворот произошел. Из формулы (1.15) следует, что

$$\varphi = \varphi_0 + \omega t. \tag{1.16}$$

Длина дуги l_{AB} (рис. 1.18б) равна $l_{AB} = r\Delta\varphi$, где $\Delta\varphi$ измеряется в радианах. Разделив левую и правую части равенства на Δt, получим

$$\frac{l_{AB}}{\Delta t} = r\frac{\Delta\varphi}{\Delta t}, \text{ или } v = r\omega. \tag{1.17}$$

Выведем выражение для нормального (центростремительного) ускорения a_n. Пусть в момент времени t_1 точка находится в A (рис.1.18б), ее скорость $\mathbf{v}_1$; в момент времени t_2 точка находится в B, скорость $\mathbf{v}_2$, так как она движется равномерно

$$|\mathbf{v}_1| = |\mathbf{v}_2| = v.$$

Перемещение точки Δs равно хорде AB.

Для определения изменения скорости параллельно перенесем $\mathbf{v}_2$ в точку A. Тогда $\Delta\mathbf{v} = \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1$. Треугольник, составленный из скоростей, и треугольник ABO подобны, так как они равнобедренные и углы при вершинах равны, как углы между взаимно-перпендикулярными сторонами ($\mathbf{v}_1 \perp \mathbf{r}_1$ и $\mathbf{v}_2 \perp \mathbf{r}_2$). Следовательно,

$$\Delta s/r = \Delta v/v.$$

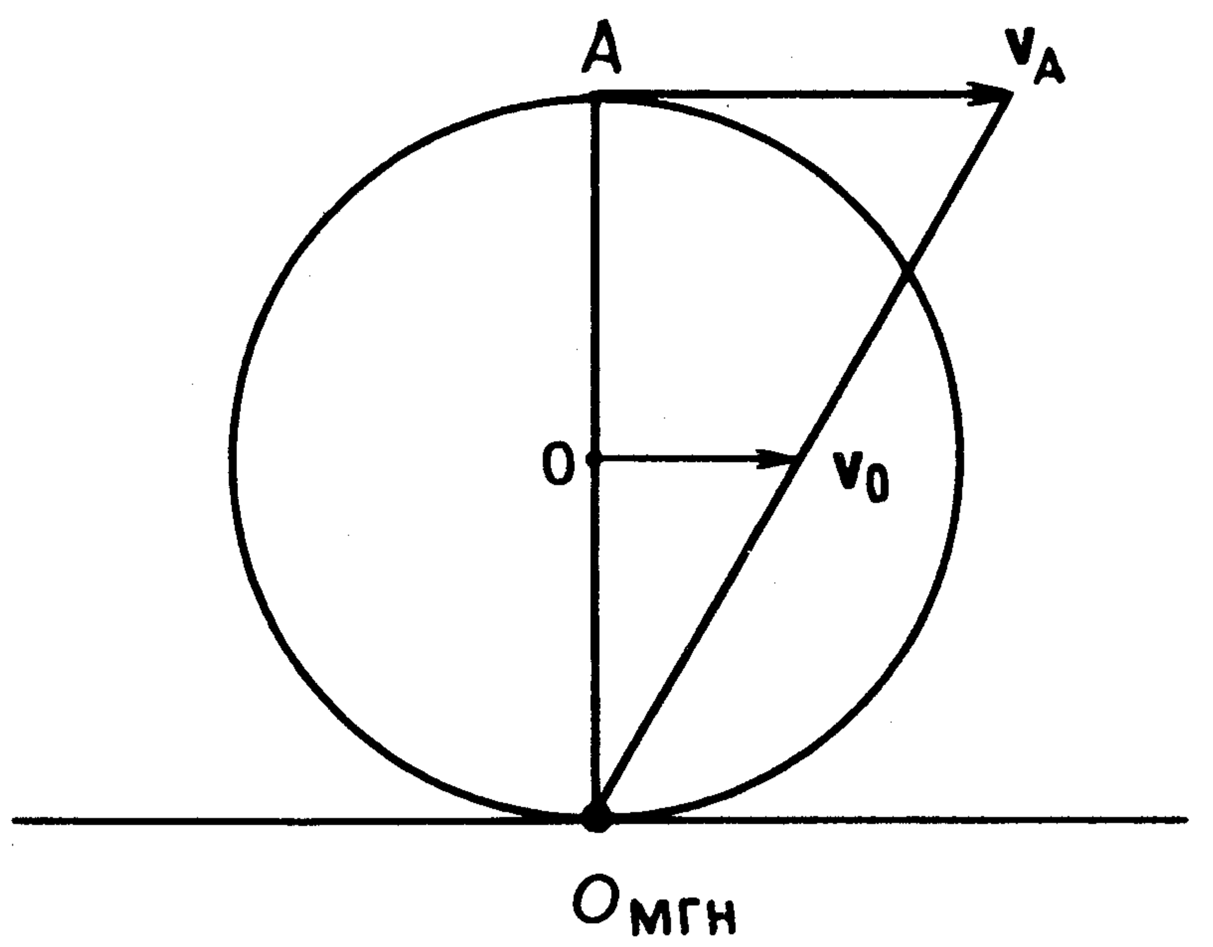


Рис. 1.19.

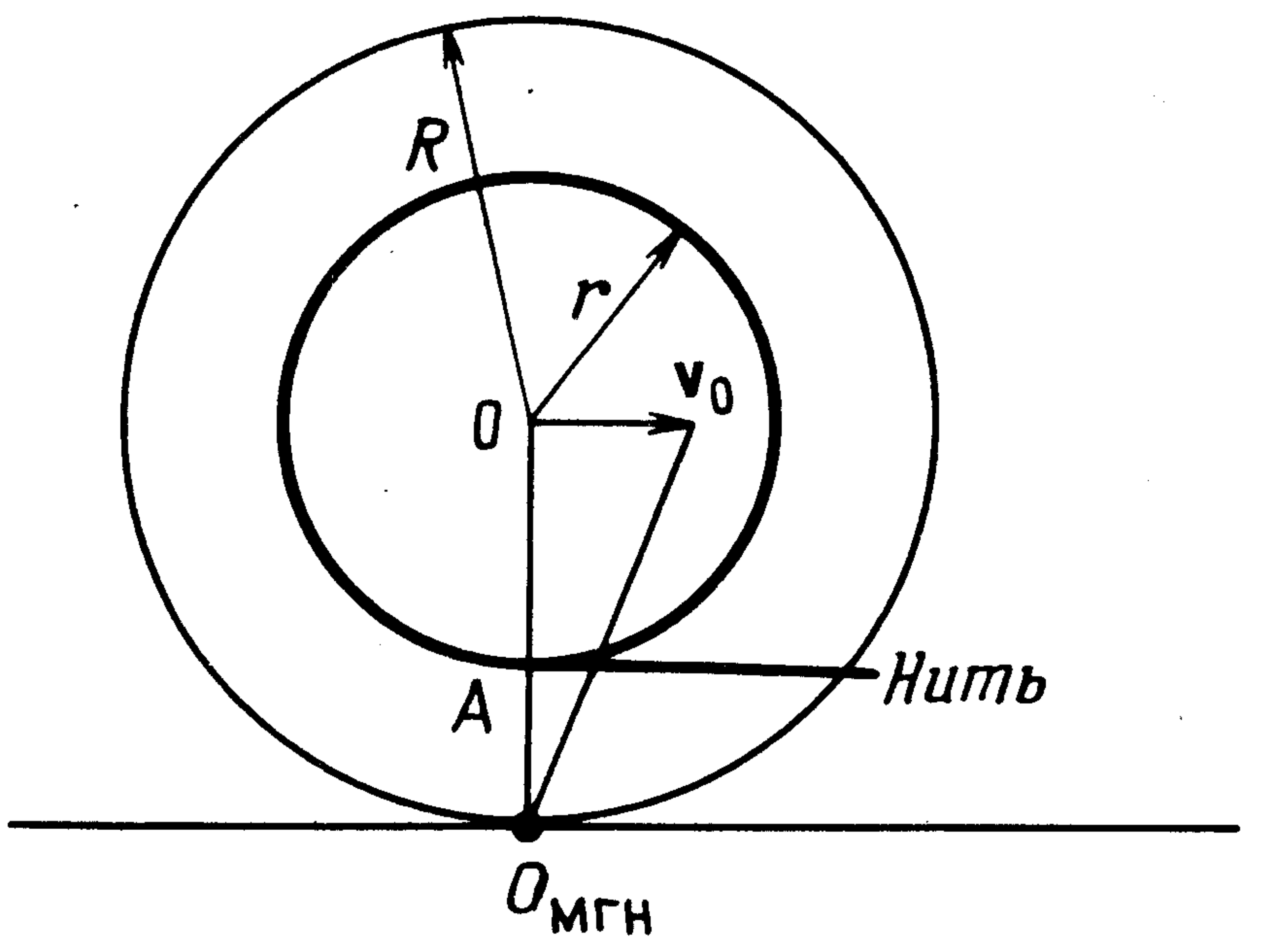


Рис. 1.20.

Разделим на Δt левую и правую части равенства и перейдем к пределу при $\Delta t \to 0$:

$$\frac{1}{r}\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{1}{v}\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta t}.$$

Предел в левой части равенства определяет скорость, а в правой — ускорение:

$$a_n = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta t}, \tag{1.18}$$

отсюда

$$a_n = v^2/r.$$

При $\Delta t \to 0$ $\Delta\varphi \to 0$, следовательно, вектор $\Delta\mathbf{v}$ перпендикулярен $\mathbf{v}$ и, как показано на рис. 1.18б, направлен к центру окружности.

Если тело одновременно участвует во вращательном и поступательном движениях, например, катящееся без проскальзывания колесо, то для определения скоростей часто удобно вводить мгновенную ось вращения. На рис. 1.19 $O_{мгн}$ — мгновенная ось вращения. Тело в некоторый данный момент поворачивается относительно оси $O_{мгн}$ как целое. Скорость точки $O_{мгн}$ относительно земли равна 0. Скорость точки O относительно земли равна v_0. Тогда угловая скорость всех точек колеса относительно земли, согласно (1.17), равна $\omega = v_0/r$, где r — радиус колеса. Отсюда скорость точки A относительно земли равна $v_A = \omega 2r = 2v_0$. Заметим, что относительно подвижной оси O скорости точек A и $O_{мгн}$ одинаковы и равны v_0. Подчеркнем, что мгновенной осью вращения становятся последовательно все точки обода колеса.

Примеры решения задач

Задача 11. Катушка с намотанной на нее нитью может катиться по поверхности горизонтального стола без скольжения. С какой скоростью v_0 и в каком направлении будет перемещаться ось катушки, если конец нити тянуть в горизонтальном направлении со скоростью v. Радиус внутренней части катушки — r, внешней — R (рис. 1.20).

Дано: v, r, R; v_0 — ?

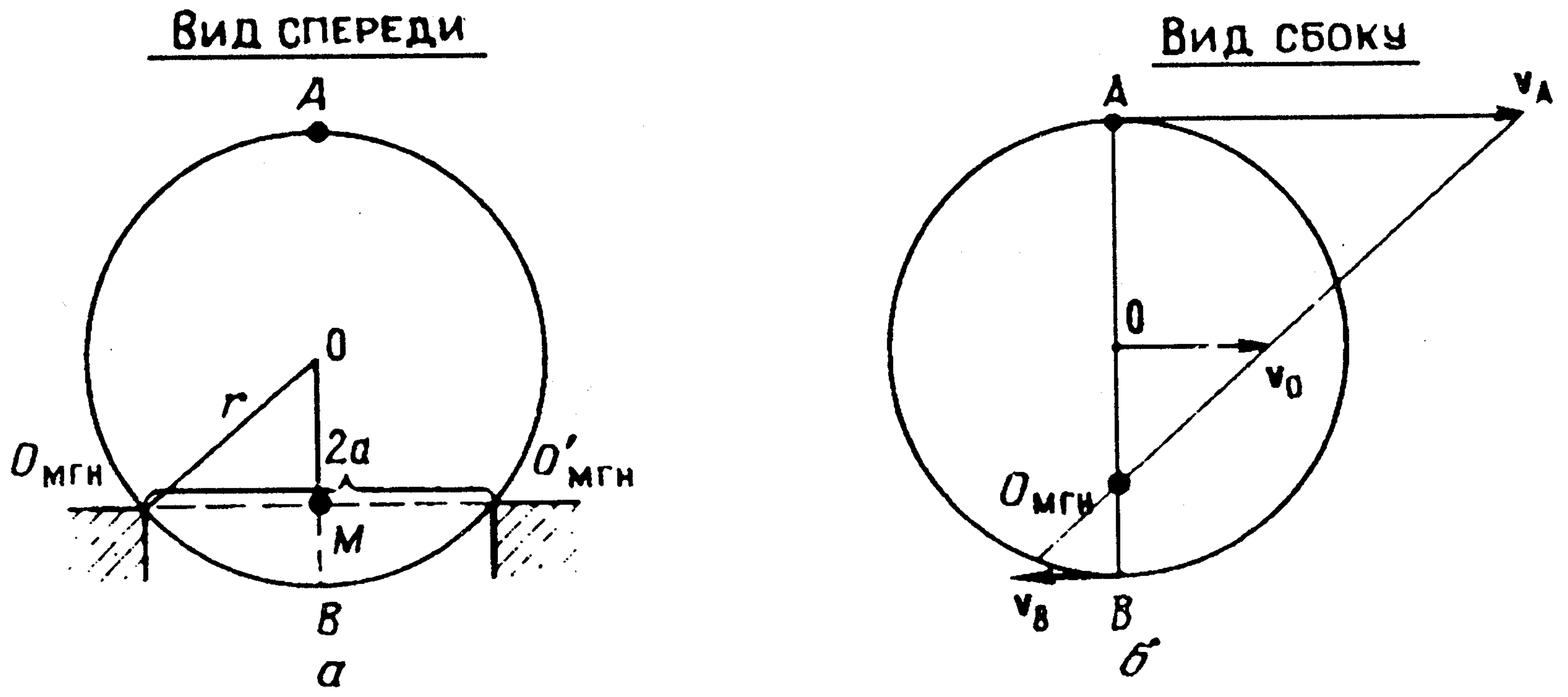


Рис. 1.21.

Решение. Скорость v — скорость движения нити совпадает со скоростью точки A внутренней части катушки. $O_{\text{мгн}}$ — мгновенная ось вращения. Угловая скорость относительно мгновенной оси вращения $\omega = v/(R - r)$, так как расстояние $O_{\text{мгн}}A = R - r$. Отсюда

$$v_0 = \omega R = vR/(R - r).$$

Очевидно, что катушка перемещается в направлении движения конца нити. Скорость перемещения катушки будет больше, чем скорость нити.

Задача 12. Шарик радиуса r катится со скоростью v_0 по двум рельсам, расположенным на расстоянии $2a$ друг от друга. Определить скорости точек A и B относительно рельсов (рис. 1.21,*а*).

Дано: r, v_0, $2a$; v_A — ? v_B — ?

Решение. Мгновенная ось вращения в данном случае $O_{\text{мгн}}$, как показано на рис. 1.21,*б*. Угловая скорость поворота шарика относительно этой оси $\omega = v_0/OM$, где $OM = \sqrt{r^2 - a^2}$. Отсюда

$$\omega = v_0/\sqrt{r^2 - a^2},$$

следовательно,

$$\begin{aligned}
v_A &= \omega(r + OM) = (v_0/\sqrt{r^2 - a^2})(r + \sqrt{r^2 - a^2}),\\
v_A &= (v_0 r/\sqrt{r^2 - a^2}) + v_0,\\
v_B &= \omega(r - OM) = \frac{v_0 r}{\sqrt{r^2 - a^2}} - v_0.
\end{aligned}$$

Криволинейное движение

В общем случае криволинейного движения $a_n \neq 0$ и $a_\tau \neq 0$, т. е. скорость изменяется по величине и направлению. При этом считаем, что ускорение a остается постоянным.

Рассмотрим особенности криволинейного движения при решении задачи о движении тела, брошенного со скоростью v_0 под углом α к горизонту.

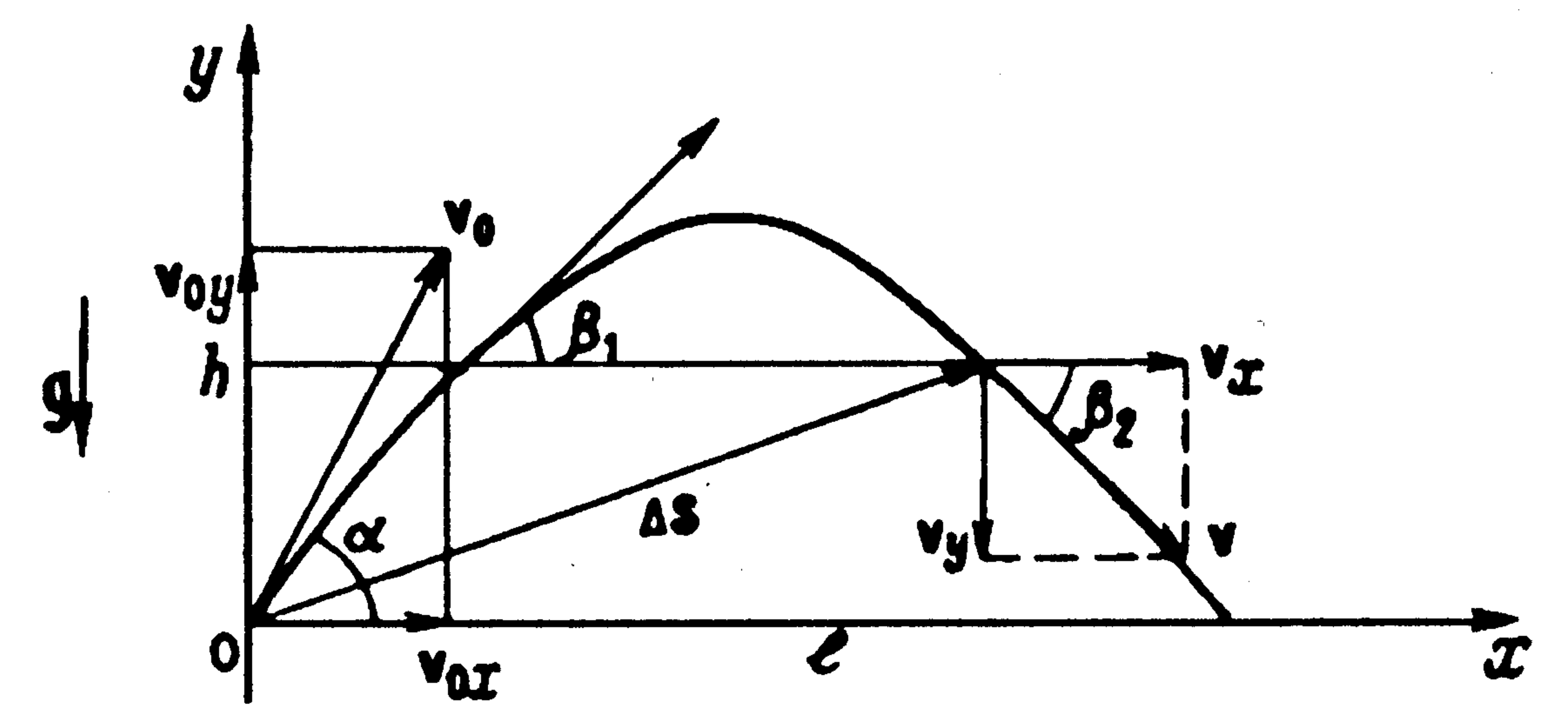


Рис. 1.22.

Итак, дано: v_0 и α. Полностью исследуем движение. При этом определим 1) траекторию движения тела, 2) время полета t_n, 3) дальность полета l, или перемещение тела $|\Delta \mathbf{s}| = l$, 4) максимальную высоту подъема $H_{\max}$, 5) скорость тела на высоте $h < H_{\max}$, 6) a_n и a_τ в начальной точке траектории и в наивысшей точке подъема, 7) радиусы кривизны траектории в этих точках.

Движение происходит в плоскости xy (рис. 1.22). В начальный момент времени $t = 0$ тело находилось в начале координат, т. е. в точке O. Данное движение криволинейное. Воспользуемся законом независимости движений и разложим это движение на два прямолинейных: вдоль оси x и вдоль оси y. Движение вдоль оси x равномерное ($a_x = 0$) с начальной скоростью $v_{0x} = v_0 \cos\alpha$, которая остается постоянной:

$$v_x = v_{0x} = \mathrm{const}.$$

Уравнение движения вдоль оси x имеет вид

$$x = v_{0x}t = v_0 t \cos\alpha. \tag{1.19}$$

Движение по оси y равнопеременное с постоянным ускорением $a_y = -g$ и начальной скоростью $v_{0y} = v_0 \sin\alpha$. Согласно (1.13) и (1.14),

$$v_y = v_{0y} - gt, \tag{1.20}$$

$$y = v_{0y}t - gt^2/2 = v_0 t \sin\alpha - gt^2/2. \tag{1.21а}$$

1) Найти траекторию движения — это значит найти аналитическое уравнение кривой, по которой движется тело в пространстве.

Из (1.19) и (1.21а) исключаем время t. Из (1.19) $t = x/v_0 \cos\alpha$, подставим в (1.21а):

$$y = x\mathrm{tg}\alpha - \frac{gx^2}{2v_0^2\cos^2\alpha}. \tag{1.21б}$$

Уравнение (1.21б) описывает параболу, ветви которой направлены вниз, центр параболы смещен относительно начала координат.

2) Воспользуемся формулой (1.20) для определения времени полета тела. (Рассмотрение движения вдоль оси x не позволит определить время полета, так как вдоль оси x тело могло бы равномерно двигаться сколь угодно долго.) Приравняв $y = 0$, получим

$$t(v_0 \sin\alpha - gt/2) = 0,$$

$$t_1 = 0, \quad t_2 = (2v_0/g)\sin\alpha. \tag{1.22}$$

Действительно, тело на земле оказывается дважды — в начале и в конце полета.

Искомое время полета $t_п = (2v_0/g)\sin\alpha$.

3) Так как вдоль оси x движение равномерное и известно время движения (1.22), то

$$x_{\max} = l = v_{0x}t_п = (v_0\cos\alpha \cdot 2v_0\sin\alpha)/g = v_0^2\sin 2\alpha/g. \tag{1.23}$$

4) Максимальную высоту подъема тела можно определить из формулы (1.21а), подставив в нее время подъема $t_{под}$, которое можно определить по формуле (1.20), из условия, что v_y в наивысшей точке подъема равно 0:

$$0 = v_{0y} - gt_{под},$$
$$t_{под} = (v_0/g)\sin\alpha.$$

Таким образом,

$$y_{\max} = H_{\max} = v_{0y}t_{под} - gt_{под}^2/2 = v_{0y}^2/2g,$$
$$H_{\max} = (v_0^2\sin^2\alpha)/2g. \tag{1.24}$$

Максимальную высоту подъема в этом случае можно также найти из следующих соображений. Парабола — симметричная кривая. Зная дальность полета, можно определить x–координату наивысшей точки подъема:

$$x = l/2 = (v_0^2/g)\sin\alpha\cos\alpha.$$

Тогда, подставив x в уравнение траектории, получим

$$H_{\max} = \frac{v_0^2\sin\alpha\cos\alpha}{g}\mathrm{tg}\alpha - \frac{gv_0^4\sin^2\alpha\cos^2\alpha}{2g^2v_0^2\cos^2\alpha},$$
$$H_{\max} = \frac{v_0^2\sin^2\alpha}{2g}.$$

5) Для определения скорости на высоте h необходимо знать время, когда тело находится на этой высоте, t_h, и тогда компоненты скорости будут определены (см. рис. 1.23).

$$v_x = v_{0x}, \quad v_y = v_{0y} - gt_h.$$

Время t_h найдем из уравнения (1.20):

$$y = h = v_{0y}t_h - gt_h^2/2, \quad (t_h)_{1,2} = \frac{v_{0y} \pm \sqrt{v_{0y}^2 - 2gh}}{g}.$$

Очевидно, что оба значения времени имеют физический смысл, так как на высоте h тело будет находиться дважды (рис. 1.22), в первый раз — двигаясь вверх, второй раз двигаясь вниз. Поэтому скорость тела на высоте h определится формулами: в первой точке

$$v_{x1} = v_0\cos\alpha, v_{y1} = \sqrt{v_0^2\sin^2\alpha - 2gh}.$$

Модуль скорости равен $|v_h|_1 = \sqrt{v_0^2 - 2gh}$, тангенс угла наклона скорости к оси x:

$$\mathrm{tg}\beta = \frac{v_{y1}}{v_{x1}} = \frac{\sqrt{v_0^2\sin^2\alpha - 2gh}}{v_0\cos\alpha}.$$

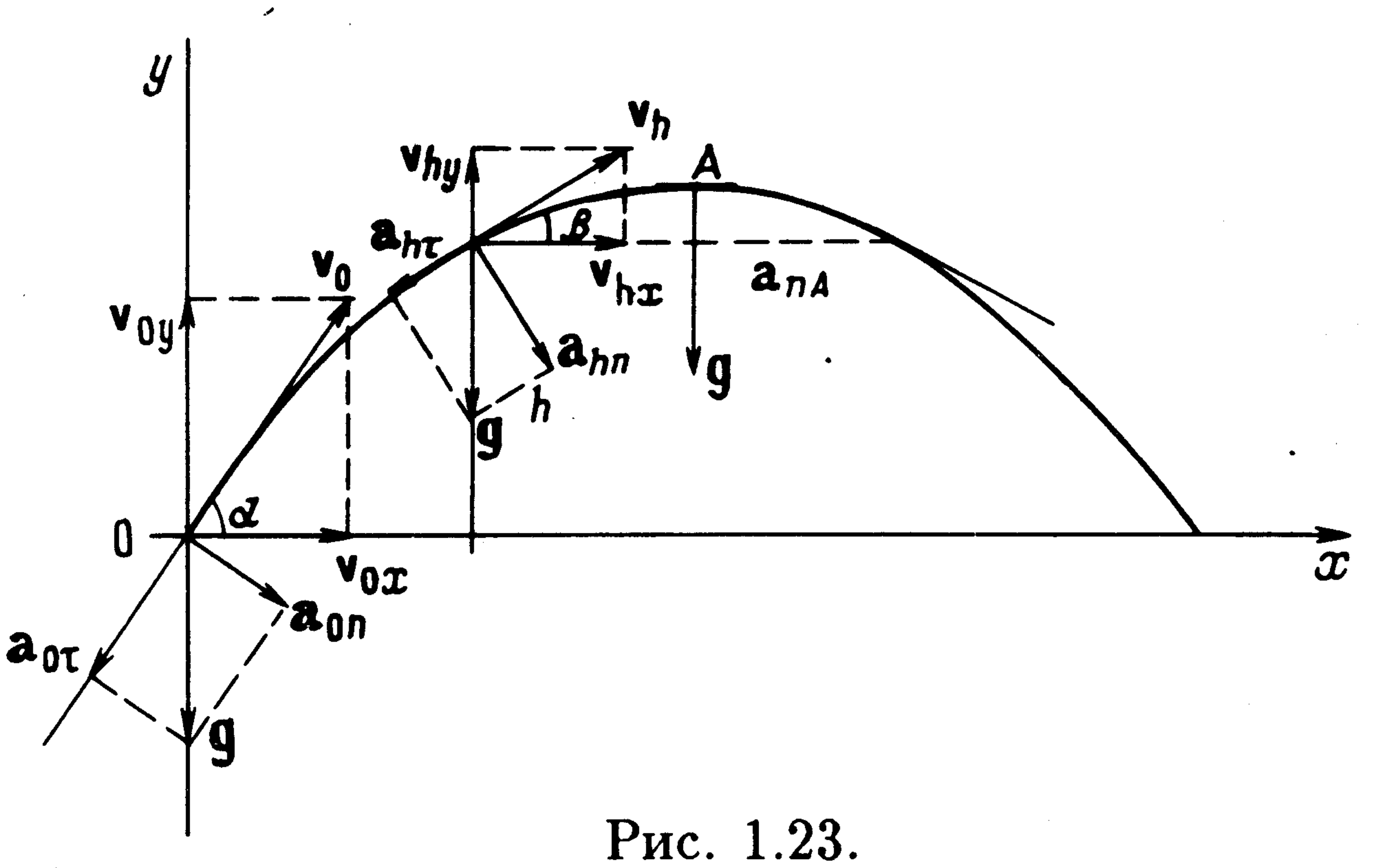


Рис. 1.23.

Во второй точке на высоте h

$$v_{hx} = v_0 \cos\alpha,$$

$$v_{hy} = -\sqrt{v_0^2 \sin^2\alpha - 2gh}.$$

Модуль скорости равен $|v_h|_2 = \sqrt{v_0^2 - 2gh}$, тангенс угла наклона скорости к оси x

$$\mathrm{tg}\beta_2 = -\frac{\sqrt{v_0^2 \sin^2\alpha - 2gh}}{v_0 \cos\alpha}.$$

6) Чтобы найти нормальную и тангенциальную компоненты ускорения, воспользуемся тем, что тангенциальное ускорение направлено по касательной к траектории движения, а нормальное по нормали к ней. Полное же ускорение, с которым движется тело во всех точках, одинаково и равняется ускорению свободного падения g. Разложим $\mathbf{g}$ на две составляющие в точках 0 и A (рис. 1.23). В точке 0

$$a_{0\tau} = -g \sin\alpha, \quad a_{0n} = -g \cos\alpha,$$

В точке A

$$a_{\tau A} = 0, \quad a_{nA} = -g.$$

7) Нормальное ускорение определяется по формуле (1.17)

$$a_n = v^2/R,$$

где R — радиус кривизны траектории в данной точке, т. е. радиус окружности, часть дуги которой совпадает с траекторией в данной точке. Отсюда $R = v^2/a_n$. В точке 0

$$v = v_0, \quad |a_n| = g \cos\alpha,$$

$$R_0 = \frac{v_0^2}{g \cos\alpha}.$$

В точке A $v_y = 0$, скорость имеет только x-компоненту:

$$v_A = v_{0x} = v_0 \cos\alpha,$$

а нормальное ускорение в точке $A\,(a_n = g)$. Отсюда

$$R_A = (v_0^2 \cos^2 \alpha)/g.$$

Большинство задач на криволинейное движение является частным случаем или вариацией этой общей задачи.

Примеры решения задач

Задача 13. Под каким углом α надо бросить тело, чтобы дальность полета была наибольшей.

Решение. Дальность полета определяется формулой (1.23)

$$l = v_0^2 \sin 2\alpha/g,$$

значит, дальность полета будет максимальна при наибольшем значении $\sin 2\alpha$, т. е.

$$\sin 2\alpha = 1.$$

Отсюда

$$2\alpha = \pi/2, \quad \alpha = \pi/4.$$

Задача 14. Два тела брошены с одинаковыми скоростями под разными углами α и β к горизонту. Определить отношение максимальных высот подъема этих тел.

Дано: α, β; $H_{\max_1}/H_{\max_2}$ — ?

Решение. Воспользовавшись (1.24), имеем

$$H_{\max_1} = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g},$$

$$H_{\max_2} = \frac{v_0^2 \sin^2 \beta}{2g},$$

откуда

$$\frac{H_{\max_1}}{H_{\max_2}} = \frac{\sin^2 \alpha}{\sin^2 \beta}.$$

Задача 15. Футболист, находясь от ворот на расстоянии l, ударяет по мячу, и мяч летит с начальной скоростью v_0 и пролетает мимо, едва коснувшись верхней планки ворот. Высота ворот h. Определить, под каким углом начал лететь мяч, когда футболист ударил по нему.

Дано: v_0, l, h; α — ?

Решение. Выбрав систему координат, как показано на рис. 1.23, и начало координат в точке удара по мячу, имеем, что координаты мяча, когда он достигнет верхней планки, будут

$$x = l, \quad y = h.$$

Подставив эти значения в уравнение (1.21б) для траектории движения тела, брошенного под углом к горизонту, получим

$$h = l\,\mathrm{tg}\alpha - \frac{gl^2}{2v_0^2 \cos^2 \alpha},$$

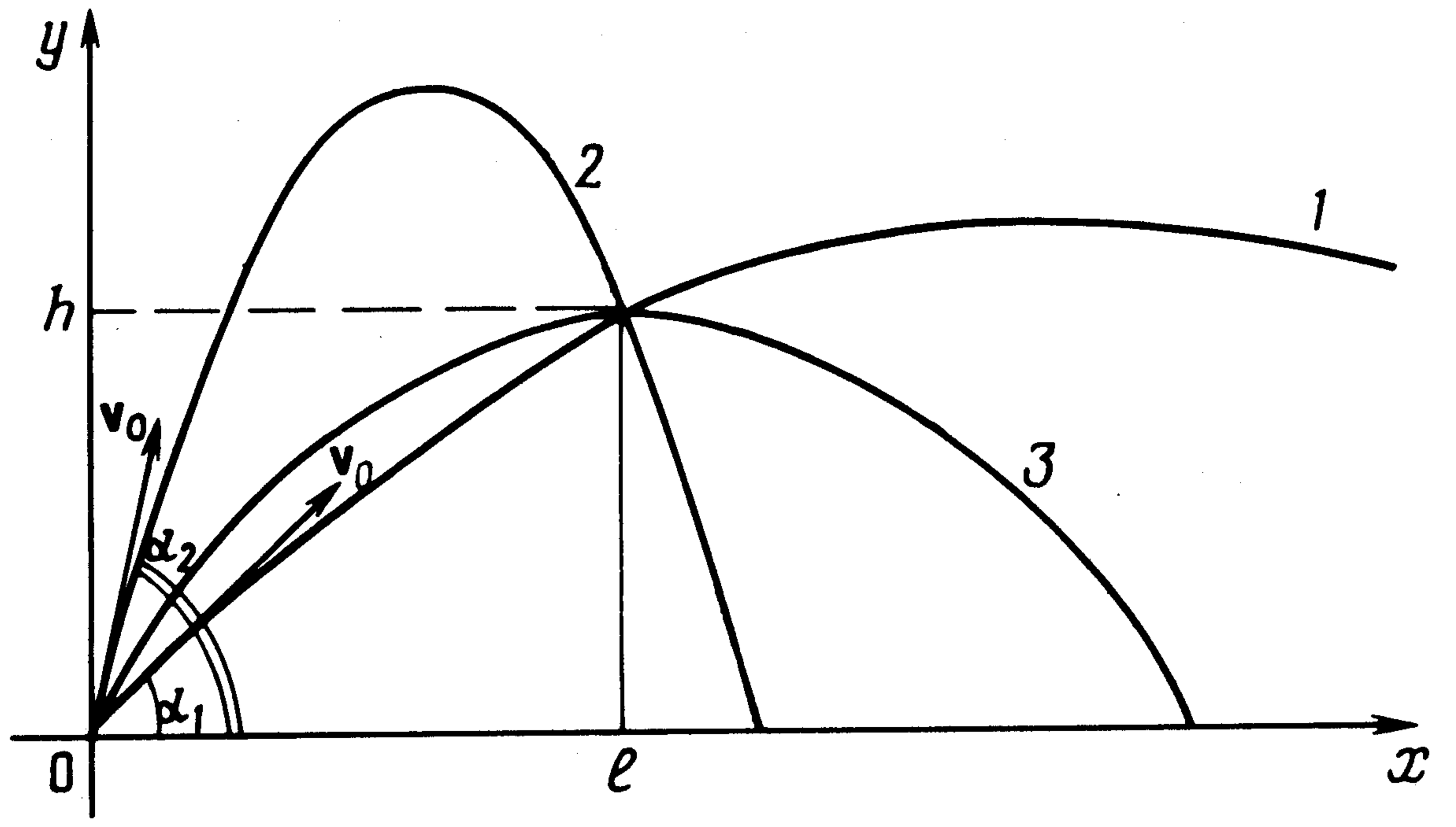


Рис. 1.24.

т. е. получаем тригонометрическое уравнение. Произведя замену $1/\cos^2\alpha = 1 + \mathrm{tg}^2\alpha$ и выполнив необходимые преобразования, имеем

$$\frac{gl^2}{2v_0^2}\mathrm{tg}^2\alpha - l\mathrm{tg}\alpha + (h + \frac{gl^2}{2v_0^2}) = 0.$$

Откуда, решая квадратное уравнение относительно $\mathrm{tg}\alpha$, найдем

$$(\mathrm{tg}\alpha)_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - (2g/v_0^2)[h + (gl^2/2v_0^2)]}}{gl/v_0^2}.$$

Оба значения угла

$$\alpha_{1,2} = \mathrm{arctg}\left[\frac{1 \pm \sqrt{1 - (2g/v_0^2)[h + (gl^2/2v_0^2)]}}{gl/v_0^2}\right]$$

имеют физический смысл. Три возможные траектории полета показаны на рис. 1.24. Если $(g/v_0^2)(h + gl^2/2v_0^2) = 1/2$, то мяч касается планки в наивысшей точке полета (траектория 3).

Задача 16. На высоте h параллельно поверхности земли летит утка со скоростью v_1. Мальчик бросил камень со скоростью v_2, прицелившись прямо в утку под углом α к горизонту. Найти, на какой высоте летела утка, если камень все же попал в нее.

Дано: v_1, v_2, α; h — ?

Решение. Выберем систему координат, совместив начало координат с точкой начала движения камня (рис. 1.25). Уравнения, описывающие движение утки:

$$x_1 = l_0 + v_1 t, \quad y_1 = h,$$

где $l_0 = h\mathrm{ctg}\alpha$ — координата утки на оси x в начальный момент времени. Уравнения движения камня:

$$x_2 = v_{20}(\cos\alpha)t,$$
$$y_2 = v_{20}(\sin\alpha)t - gt^2/2.$$

Условие попадания камня в утку:

$$x_1 = x_2, \quad y_1 = y_2,$$

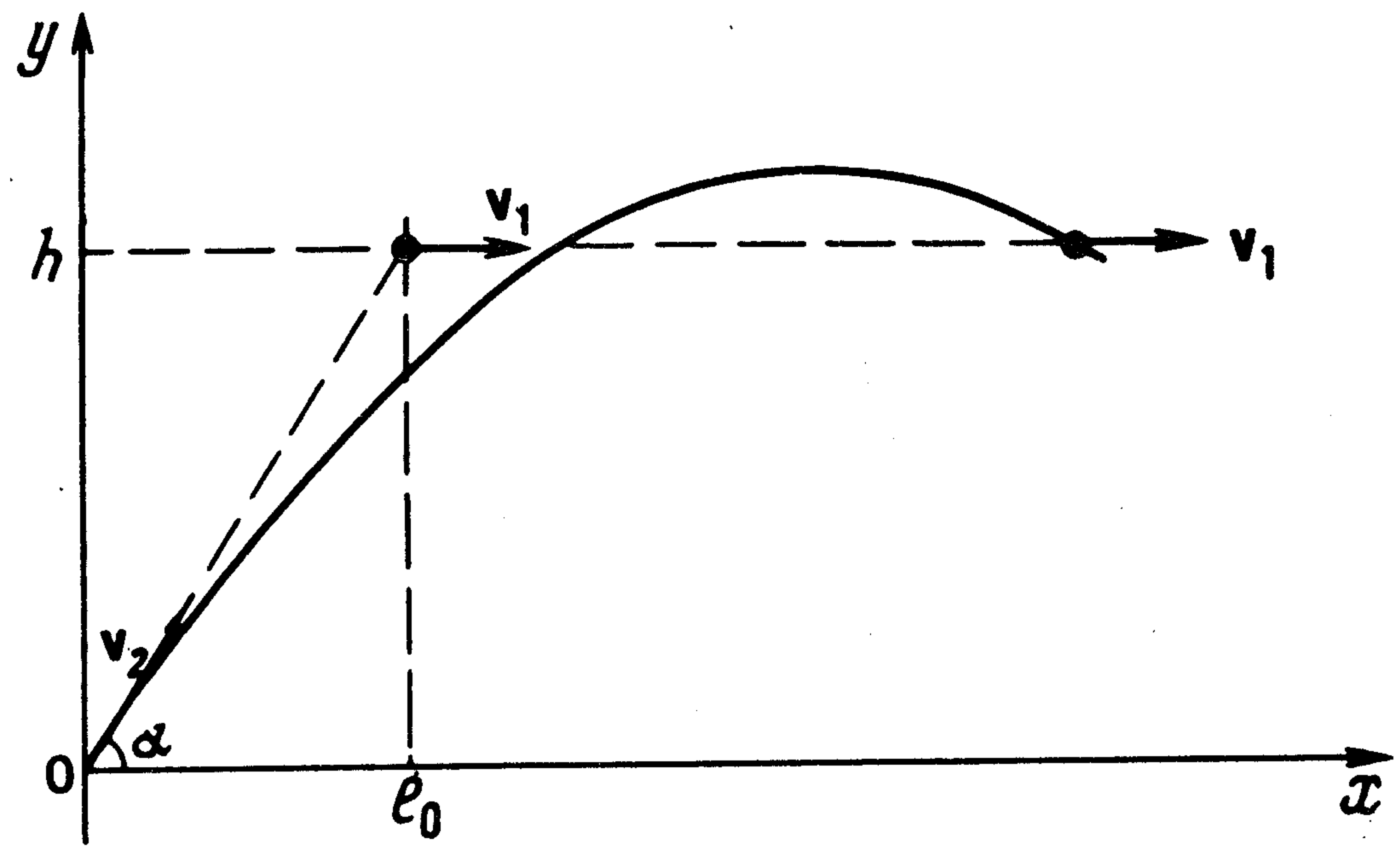


Рис. 1.25.

или

$$h\mathrm{ctg}\alpha + v_1 t = v_{20}(\cos\alpha)t,$$
$$h = v_{20}(\sin\alpha)t - gt^2/2.$$

Таким образом, мы получаем систему двух уравнений относительно неизвестных h и t. Выразив t из первого уравнения

$$t = \frac{h\mathrm{ctg}\alpha}{v_{20}\cos\alpha - v_1}$$

и подставив во второе, получим

$$h\left(1 - \frac{v_{20}\cos\alpha}{v_{20}\cos\alpha - 1} - \frac{gh\mathrm{ctg}^2\alpha}{2(v_{20}\cos\alpha - v_1)^2}\right) = 0,$$

откуда

$$h = (2v_1/g)(v_{20}\cos\alpha - v_1)\mathrm{tg}^2\alpha.$$

Задача 17. Из миномета ведут обстрел объекта, расположенного на склоне горы (рис. 1.26). На каком расстоянии будут падать мины, если начальная скорость их v_0, угол у основания $\alpha = 30°$ и угол, под которым направлен ствол миномета, $\beta = 60°$ по отношению к горизонту.

Дано: α, β, v_0; l — ?

Решение. Выберем оси координат x_1 и y_1, как показано на рисунке. Воспользовавшись (1.19) и (1.21а), запишем

$$x_1 = v_0 t\cos\beta, \quad y_1 = v_0 t\sin\beta - gt^2/2.$$

Только в точке падения

$$y_1/x_1 = \mathrm{tg}\alpha.$$

Написанные три уравнения составляют систему трех уравнений относительно трех неизвестных $x_{\text{пад}}$, $y_{\text{пад}}$ и t, где $x_{\text{пад}}$ и $y_{\text{пад}}$ — координаты точки падения снаряда. Подставив значения углов, получим

$$x_{\text{пад}} = v_0^2/g\sqrt{3},$$
$$y_{\text{пад}} = v_0^2/3g.$$

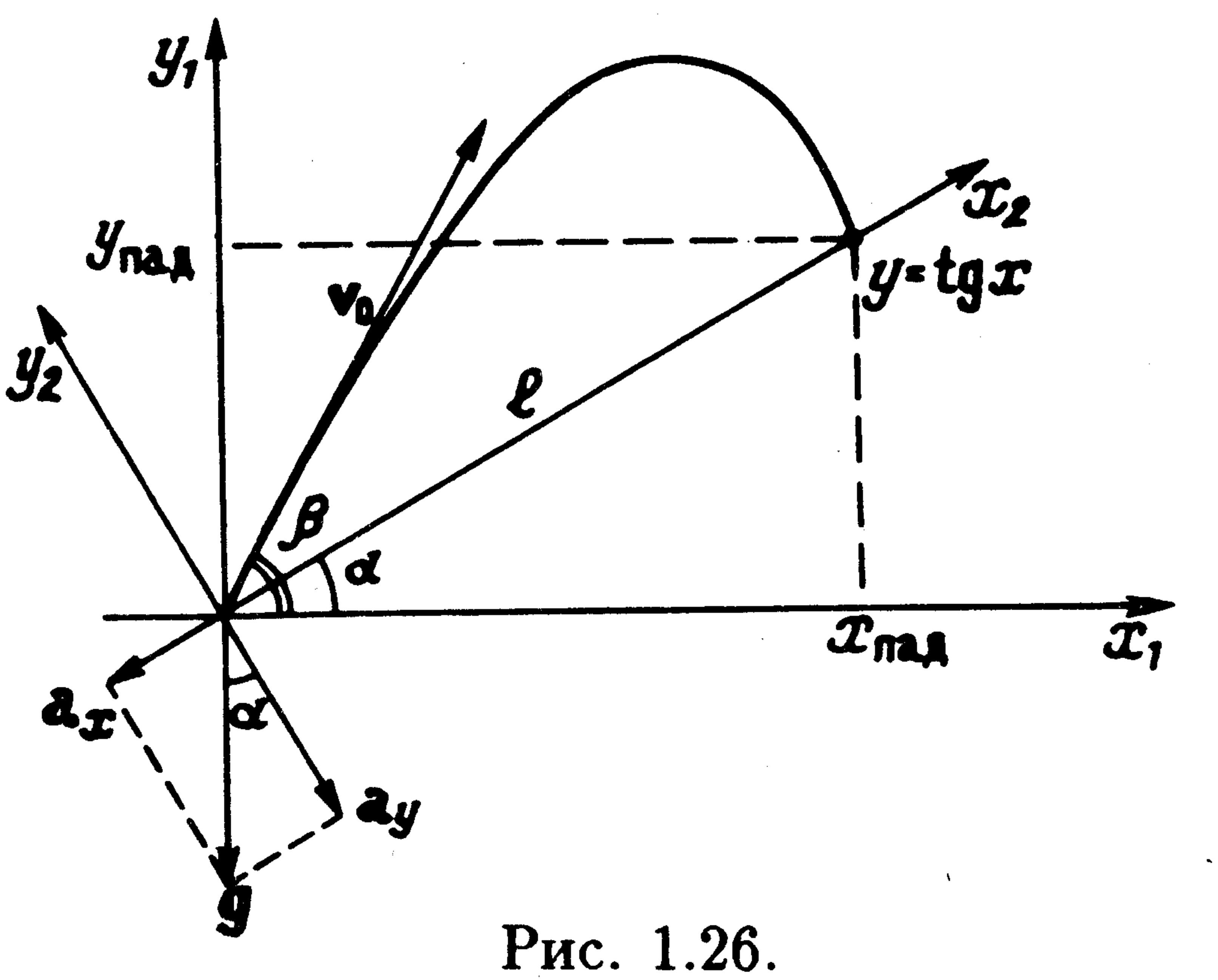


Рис. 1.26.

Фактически нам нужно найти перемещение мины Δs в пространстве. Согласно рис. 1.26,

$$l = \sqrt{x_{пад}^2 + y_{пад}^2} = (2/3)v_0^2/g.$$

Часто при решении подобных задач удобнее воспользоваться другой системой координат. Выберем направление оси x_2 вдоль склона горы, а y_2 перпендикулярно ему. Воспользуемся законом независимости движений. Движение вдоль оси x_2 будет равнозамедленным с ускорением $a_x = -g \sin\alpha$ и начальной скоростью

$$v_{0x} = v_0 \cos(\beta - \alpha).$$

Уравнение движения вдоль оси x_2

$$x_2 = v_0 t \cos(\beta - \alpha) - (g \sin\alpha)t^2/2.$$

Вдоль оси y_2 движение будет равнопеременным с ускорением $a_y = -g\cos\alpha$ и начальной скоростью $v_{0y} = v_0 \sin(\beta - \alpha)$. Уравнение движения вдоль оси y_2

$$y_2 = v_0 t \sin(\beta - \alpha) - (g \cos\alpha)t^2/2.$$

В точке падения $y_2 = 0$. Отсюда время полета мины определится по формуле

$$t = \frac{2v_0 \sin(\beta - \alpha)}{g \cos\alpha}.$$

Подставив найденное время в выражение для x_2, найдем l:

$$l = \frac{v_0^2 \sin 2(\beta - \alpha)}{g\cos\alpha} - \frac{2v_0^2 \sin^2(\beta - \alpha)}{g\cos^2\alpha} =$$
$$= \frac{v_0^2}{g\cos\alpha}\left[\sin 2(\beta - \alpha) - \frac{2\sin^2(\beta - \alpha)}{\cos\alpha}\right].$$

Такой выбор системы координат особенно удобен в случаях, когда тело несколько раз отскакивает от наклонной плоскости.

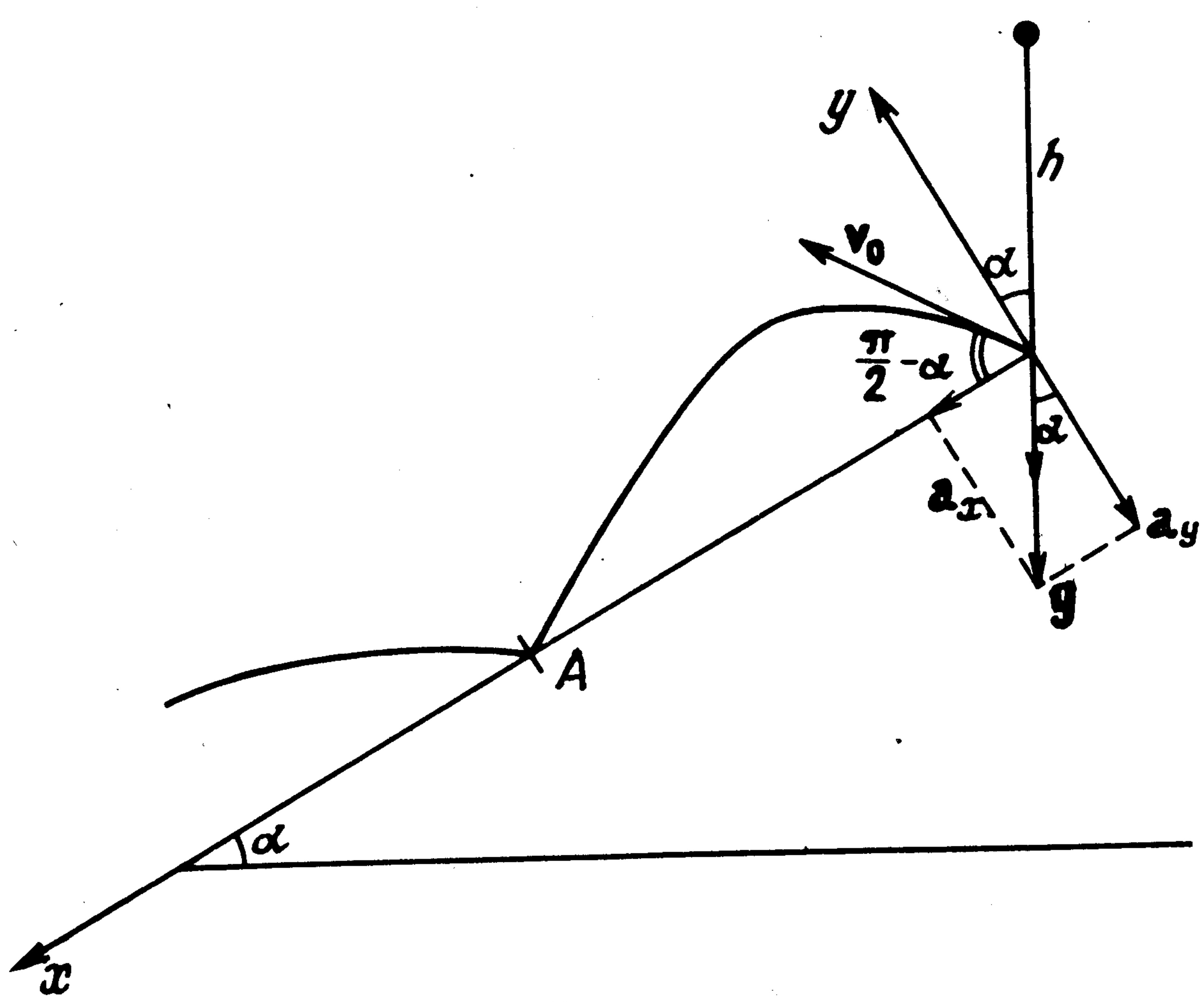


Рис. 1.27.

Задача 18. На наклонную плоскость падает упругий шарик с высоты 0,5 м. Сколько раз шарик ударится о наклонную плоскость, если ее длина равна 32 м, а угол наклона плоскости 30° (рис. 1.27)? После удара величина скорости не изменяется.

Дано: $\alpha = 30°$, $l = 32$ м, $h = 0,5$ м; N — ?

Решение. Удар абсолютно упругий, наклонная плоскость неподвижна, следовательно, при падении с высоты h скорость шарика $v_ш = \sqrt{2gh}$ (задача 5) и шарик будет отскакивать с той же скоростью, т. е. $v_0 = \sqrt{2gh}$, под углом $(\pi/2 - \alpha)$ к наклонной плоскости. Выберем систему координат, как показано на рис. 1.27. Тогда по оси x движение будет ускоренное с ускорением $a_x = g\sin\alpha$ и начальной скоростью $v_{0x} = v_0 \sin\alpha$. Уравнение движения имеет вид

$$x = v_0(\sin\alpha)t + (g\sin\alpha)t^2/2.$$

По оси y движение равнопеременное с ускорением $a_y = -g\cos\alpha$ и начальной скоростью $v_{0y} = v_0\cos\alpha$. Уравнение движения вдоль y есть

$$y = v_0 t\cos\alpha - (g\cos\alpha)t^2/2.$$

Из этого уравнения получим время t_1 до падения в точке A:

$$y = 0, \quad t_1 = 2v_0/g.$$

Очевидно, что промежуток времени между двумя последовательными ударами шарика остается постоянным, так как уравнение движения шарика вдоль оси y не изменяется (v_y — компонента скорости, с которой он начинает двигаться вверх после каждого удара, имеет одно и то же значение). Следовательно, за время nt_1 шарик ударится $n+1$ раз о наклонную плоскость.

Подставим это значение времени в уравнение движения вдоль оси x:

$$x = v_0 n t_1 \sin\alpha + (g\sin\alpha)n^2 t_1^2/2.$$

Приравняем x длине наклонной плоскости и решим уравнение относительно n:

$$l = v_0 n t_1 \sin\alpha + (g\sin\alpha)n^2 t_1^2/2,$$

$$n_{1,2} = \frac{-v_0(\sin\alpha)t_1 \pm \sqrt{(v_0(\sin\alpha)t_1)^2 + 2gl(\sin\alpha)t_1^2}}{g(\sin\alpha)t_1^2}.$$

Очевидно, что нужно выбрать положительный корень:

$$n = \frac{-(2v_0^2/g)\sin\alpha + \sqrt{(2v_0^2/g\sin\alpha)^2 + (8lv_0/g)\sin\alpha}}{(4v_0^2/g)\sin\alpha}.$$

А поскольку $v_0^2 = 2gh$, то

$$n = \frac{-h\sin\alpha + \sqrt{(h\sin\alpha)^2 + lh\sin\alpha}}{2h\sin\alpha},$$

$$n = \frac{-0,25 \pm \sqrt{0,0625 + 0,5\cdot 0,5\cdot 32}}{2\cdot 0,5\cdot 0,5} \approx 5,18.$$

По физическому смыслу задачи следует выбрать целое число. Следовательно, число ударов равно

$$N = n + 1 = 6.$$

Задача 19. Тело брошено горизонтально со скоростью 20м/с. Определить смещение тела от точки бросания, Δs, при котором скорость будет направлена под углом 45° к горизонту.

Дано: $v_0 = 20\,\text{м/с}$, $\alpha = 45°$, $g = 10\,\text{м/с}^2$; Δs — ?

Решение. Выберем оси координат, как показано на рис. 1.28, при этом начало координат совместим с начальной точкой полета. Тогда по оси x движение тела равномерное с постоянной скоростью v_0 и $x = v_0 t$ $(v_x = v_0)$. По оси y движение ускоренное с ускорением $a_y = g$ и начальной скоростью $v_{0y} = 0$, $y = gt^2/2$, $v_y = gt$.

Если скорость в точке A направлена под углом 45° к горизонту, то

$$v_y/v_x = \mathrm{tg}\alpha = 1.$$

Момент времени, когда это произойдет, определим из равенства

$$gt_1 = v_0,$$

тогда

$$t_1 = v_0/g.$$

Подставив t_1 в уравнение движения, найдем координаты точки A:

$$x_A = v_0^2/g, \quad y_A = v_0^2/2g.$$

Отсюда

$$\Delta s = \sqrt{x_A^2 + y_A^2} = \sqrt{5}v_0^2/2g,$$

$$\Delta s = 45\text{м}.$$

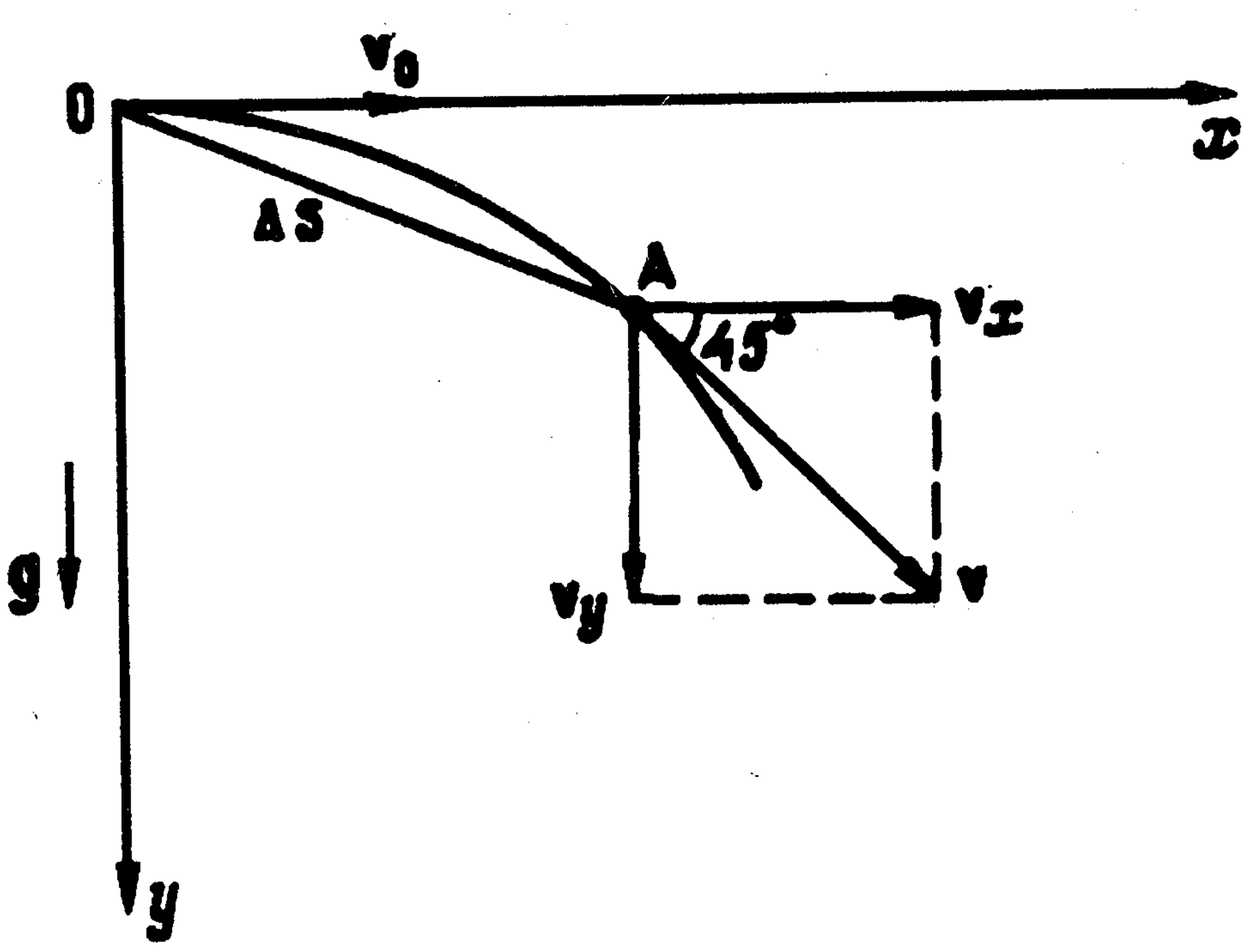


Рис. 1.28.

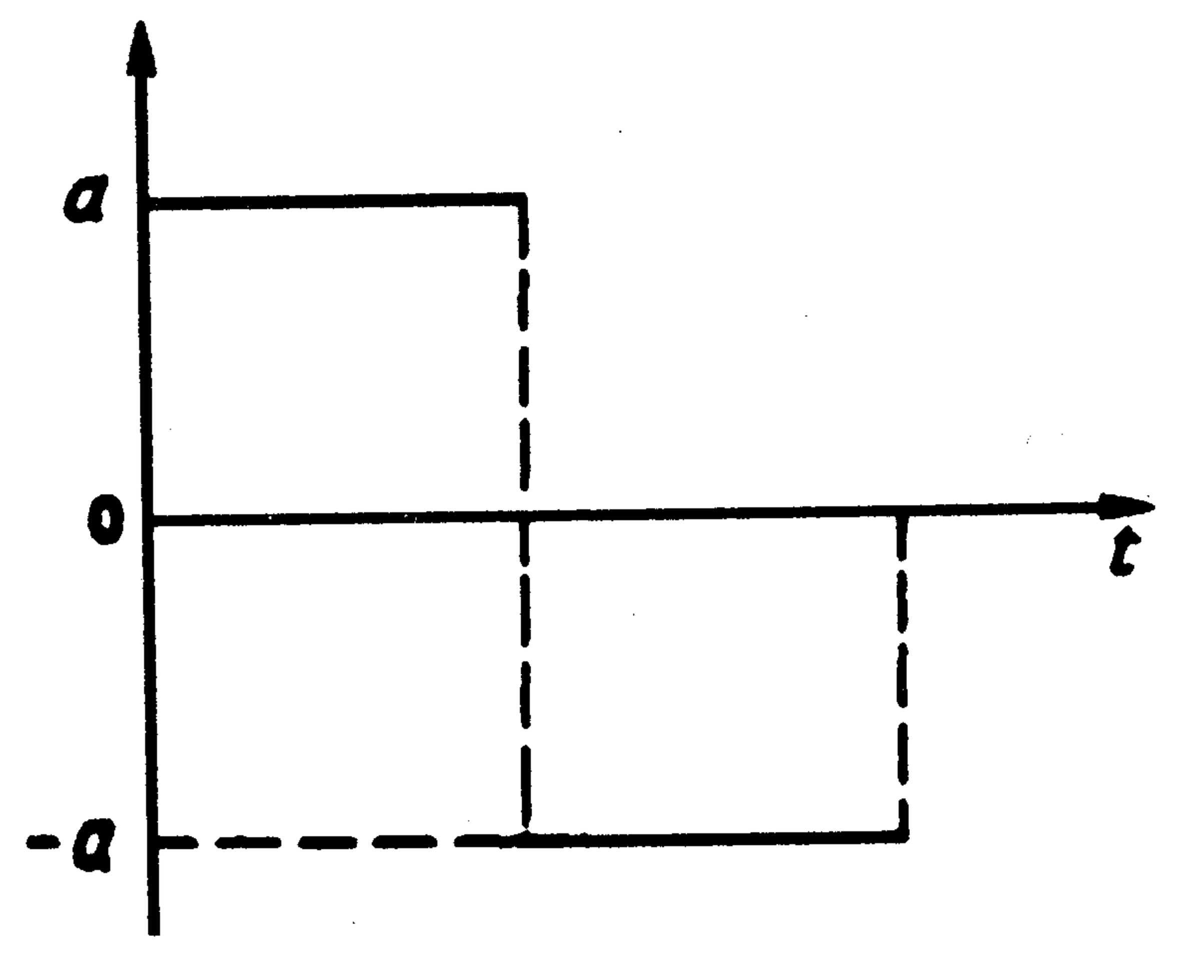


Рис. 1.29.

Задачи для самостоятельного решения

Задача 1. На рис. 1.29 дан график ускорения тела. Построить график зависимости скорости и перемещения от времени при $v_0 = 0$.

Задача 2. В безветренную погоду капли дождя оставляют на окне равномерно движущегося поезда следы, направленные под углом 60° к вертикали. Какова скорость капель относительно земли, если поезд движется со скоростью 54 км/час?

Ответ: 8,7 м/с.

Задача 3. Тело, движущееся равноускоренно с начальной скоростью 1 м/с, приобретает, пройдя некоторое расстояние, скорость 7 м/с. Какова была скорость тела на половине этого расстояния?

Ответ: 5 м/с.

Задача 4. Двигаясь равноускоренно, тело проходит за 5 с путь 30 см, а за следующие 5 с путь 80 см. Определить начальную скорость и ускорение тела.

Ответ: 0,01 м/с; 0,02 м/с^2.

Задача 5. В момент, когда первое тело начало свободно падать с высоты 80 м над поверхностью земли, второе тело бросили вертикально вверх с поверхности земли со скоростью 20 м/с. Найти максимальную высоту подъема второго тела, место и время встречи тел. Считать $g = 10\,\text{м/с}^2$. Ответ : 20 м; 0; 4 с.

Задача 6. Камень брошен с вышки со скоростью 29,4 м/с в горизонтальном направлении. Найти радиус кривизны траектории камня в точке, где он будет через 4 с после начала движения.

Ответ: 409 м.

Задача 7. Самолет летит на цель под углом $\alpha = 60°$ к горизонту вниз со скоростью $v = 720$ км/ч и сбрасывает груз на высоте 1000 м. На каком расстоянии l от цели (по горизонтальному направлению) надо сбросить груз, чтобы он упал в заданный пункт?

Ответ: 529 м.

Задача 8. Самолет летит горизонтально на высоте $H = 4$ км над поверхностью земли со сверхзвуковой скоростью. Звук дошел до наблюдателя через $t = 10$ с после того, как над ним пролетел самолет. Определить скорость самолета, если скорость звука равна 330 м/с.

Ответ: $v = 583$ м/с.

Задача 9. Тело бросают вертикально вверх со скоростью $4,9$ м/с. Одновременно с предельной высоты, которой может достигнуть тело, начинает падать вертикально вниз другое тело с той же начальной скоростью. Определить время, по истечении которого тела встретятся. Сопротивление воздуха не учитывать.

Ответ: 0,25 с.

Задача 10. Баскетболист бросает мяч в кольцо. Скорость мяча после броска $v_0 = 8$ м/с и составляет угол $\alpha = 60°$ с горизонтом. С какой скоростью мяч попал в кольцо, если он долетел до него за 1 с? Принять $g = 10$ м/с^2.

Ответ: 5 м/с.

Задача 11. Камень брошен горизонтально. Через 3 с его скорость оказалась направленной под углом $45°$ к горизонту. Определить начальную скорость камня.

Ответ: 30 м/с.

Задача 12. Необходимо в минимальное время поразить выпущенный вертикально вверх со скоростью 1000 м/с снаряд другим снарядом, скорость которого на 10% меньше. Когда следует произвести выстрел, если стрелять с того же места?

Ответ: 54,5 с.

Задача 13. Шарик свободно падает с высоты h на наклонную плоскость, составляющую угол α с горизонтом. Найти отношение расстояний между точками, в которых подпрыгивающий шарик касается наклонной плоскости. Соударения шарика с плоскостью рассматриваются как абсолютно упругие.

Ответ: $l_1 : l_2 : l_3 : l_4 : \ldots = 1 : 2 : 3 : 4 : \ldots$.

Глава 2
Динамика

Динамика — раздел механики, в котором изучается движение тел под действием приложенных к нему сил.

Основные понятия динамики. Законы Ньютона

В основе динамики лежат три закона Ньютона.

Первый закон Ньютона — закон инерции. Всякое тело стремится сохранить состояние покоя или равномерного прямолинейного движения до тех пор, пока на него не действует сила. Состояния покоя или равномерного прямолинейного движения с точки зрения динамики не различаются ($a = 0$).

Масса m является количественной мерой инертности тел. *Сила* F — мера взаимодействия тел. Любое изменение характера движения тела, любое ускорение есть результат действия на тело других тел. Воздействие одного тела на другое может происходить при непосредственном соприкосновении тел или посредством силовых полей. Различают поле тяготения, электрическое и магнитное поля.

Рассмотрим основные силы.

1. Сила, вызванная деформацией тел и препятствующая изменению объема тела, называется *силой упругости*. Деформация называется упругой, если после снятия внешнего воздействия тело возвращается в исходное состояние.

При небольших деформациях растяжения или сжатия x сила упругости прямо пропорциональна деформации и направлена в сторону, противоположную ей:

$$F_{\text{упр}} = -kx, \tag{2.1}$$

где k — коэффициент упругости, зависящий от свойств материала и геометрии деформируемого тела. Сила упругости препятствует деформации. Так, на рис. 2.1 показано, что при растяжении тела ($x > 0$) возникает сила упругости, стремящаяся вернуть телу первоначальные размеры и форму.

Для характеристики упругих свойств вещества вводится величина E, называемая *модулем Юнга*.

Напряжение σ, возникающее в твердом теле, равно $\sigma = F/S$, где S — площадь поперечного сечения твердого тела, на которое действует сила F. *Относительная деформация* $\varepsilon = x/l_0$, где l_0 — длина тела до деформации (рис. 2.1), пропорциональна напряжению, возникающему в твердом теле (*закон Гука*):

$$\varepsilon = (1/E)\sigma. \tag{2.2}$$

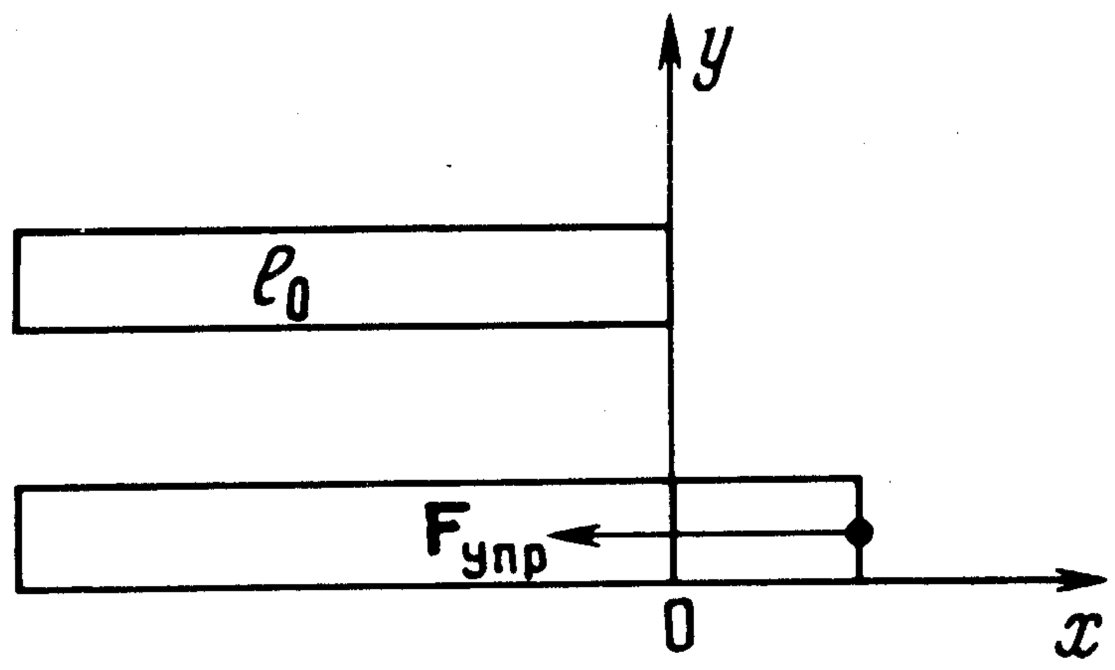


Рис. 2.1.

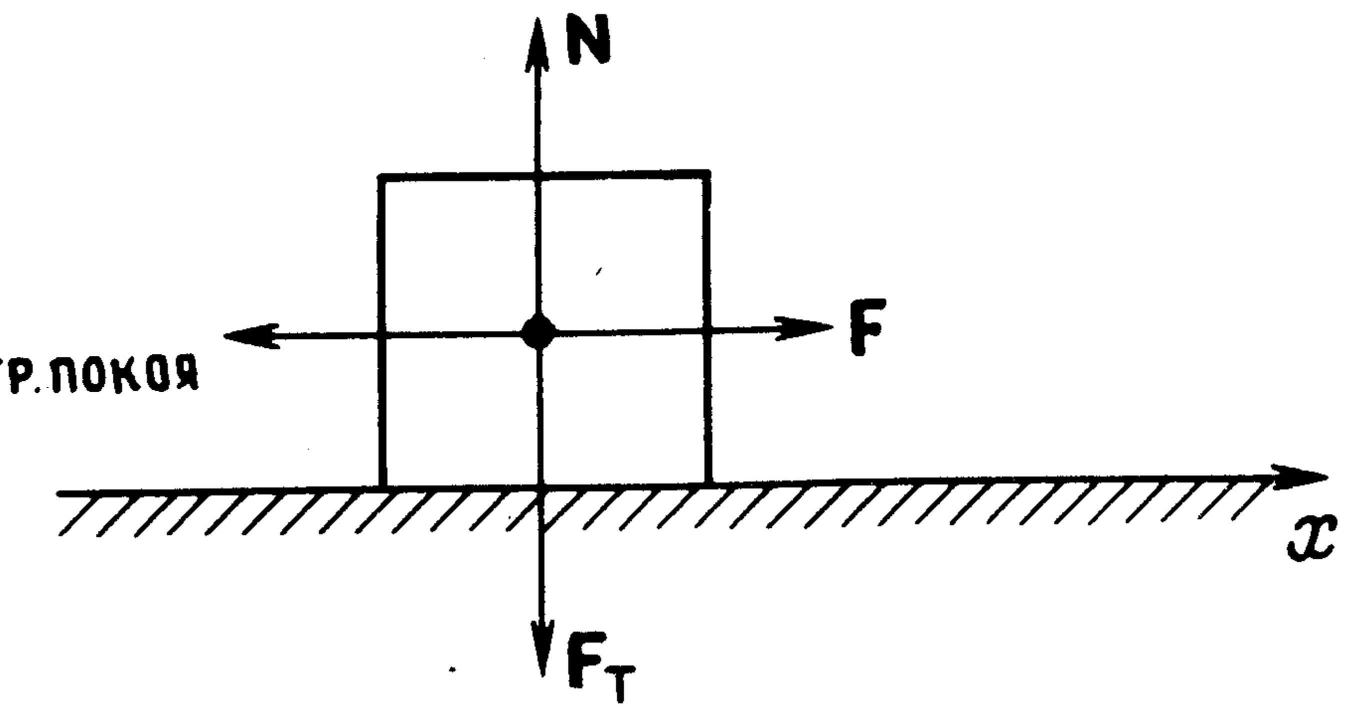


Рис. 2.2.

Физический смысл модуля Юнга состоит в следующем: величина E численно равна напряжению, возникающему в твердом теле при относительной деформации, равной единице. Из физического смысла модуля Юнга следует, что E является большим по величине.

2.*Сила трения.* Трение, возникающее при относительном перемещении сухих поверхностей твердого тела, называется сухим трением. Различают три вида сухого трения: трение покоя, скольжения и качения.

Если на тело действует сила $\mathbf{F}$, как показано на рис. 2.2, но тело сохраняет состояние покоя (неподвижно относительно поверхности, на которой оно находится), то это означает, что на тело одновременно действует сила, равная по величине и противоположная по направлению, — *сила трения покоя.* При увеличении силы $\mathbf{F}$, если тело сохраняет состояние покоя, то увеличивается и сила трения покоя. Сила трения покоя всегда равна по величине и противоположна по направлению внешней действующей силе:

$$\mathbf{F}_{\text{тр.покоя}} = -\mathbf{F}.$$

Сила трения скольжения определяется из соотношения:

$$F_{\text{тр}} = kN, \tag{2.3}$$

где k — коэффициент трения, зависящий от шероховатости и от физических свойств соприкасающихся поверхностей, N — сила реакции опоры, эта сила определяет насколько тело прижато к поверхности, по которой оно движется. Сила трения покоя изменяется по величине от 0 до максимального значения $\mathbf{F}_{\text{тр. покоя max}}$.

Сила трения скольжения всегда направлена в сторону, противоположную скорости движения тела относительно поверхности, по которой оно движется. На рис. 2.3 изображена зависимость проекции силы трения F_x от проекции на ту же ось внешней силы. Сила трения скольжения равна максимальной силе трения покоя.

Сила трения качения мала по сравнению с силой трения скольжения. При больших скоростях сопротивление перекатыванию резко увеличивается и тогда следует рассматривать силу трения скольжения.

3. Все тела притягиваются друг к другу. Для материальных точек (или шаров) *закон всемирного тяготения* имеет вид

$$F = Gm_1m_2/r_{12}^2, \tag{2.4}$$

где m_1, m_2 — массы тел, r_{12} — расстояние между материальными точками или центрами шаров, G — *гравитационная постоянная.* Массы, входящие в этот

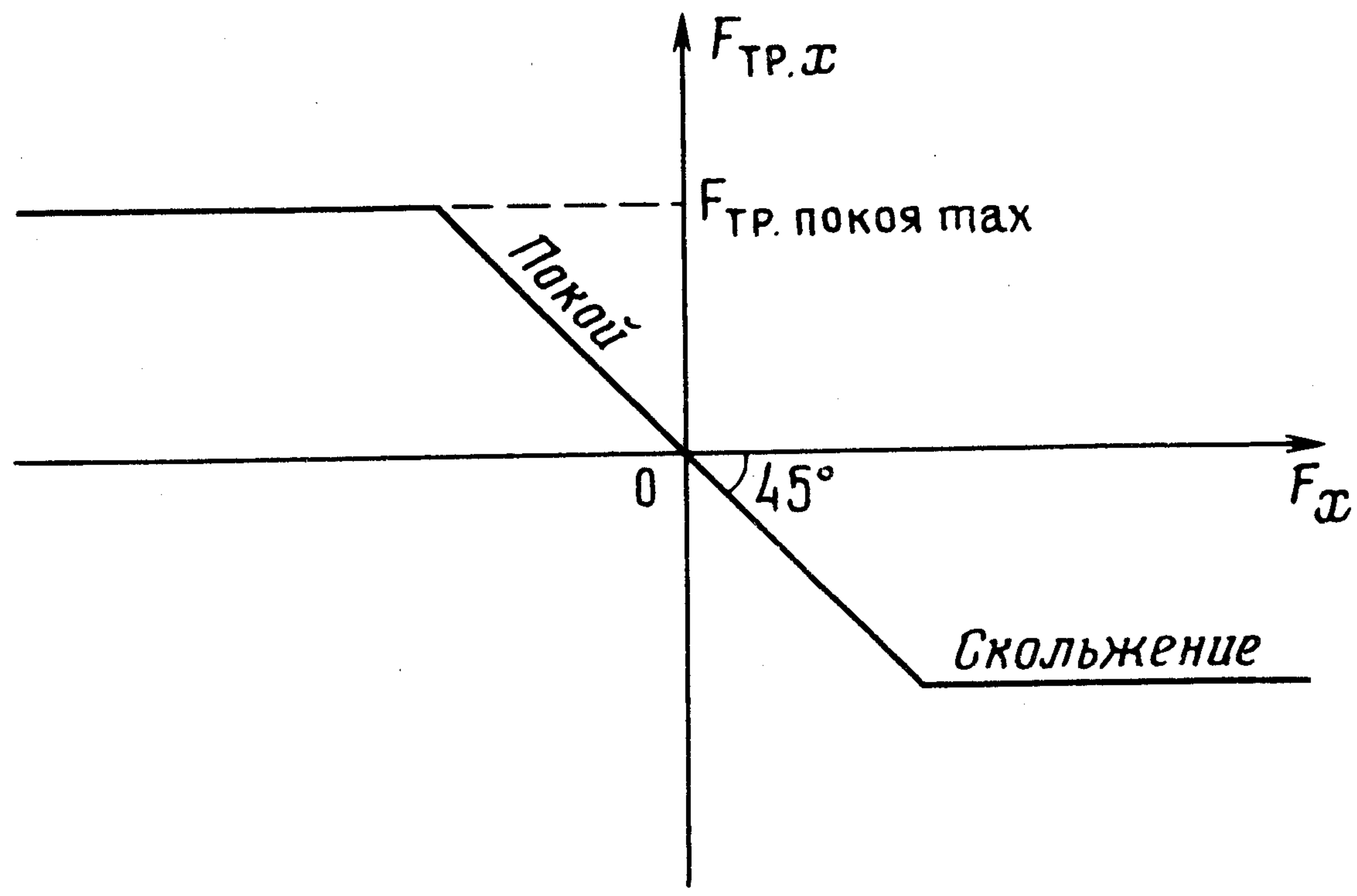


Рис. 2.3.

закон, есть мера гравитационного взаимодействия тел. Опыт показывает, что гравитационная и инертная массы равны.

Физический смысл G: гравитационная постоянная численно равна силе притяжения, действующей между двумя материальными точками или шарами массами 1 кг, расположенными на расстоянии 1 м друг от друга, $G = 6,67 \cdot 10^{-11}$Н $\cdot$ м^2/кг^2. Если тело массы m находится над поверхностью Земли на высоте h, то на него действует *сила тяготения*, равная

$$F = GmM_З/(R_З + h)^2, \tag{2.5}$$

где $M_З$ — масса Земли, $R_З$ — радиус Земли. Вблизи земной поверхности на все тела действует сила, обусловленная притяжением, — *сила тяжести*.

Сила тяжести F_T определяется силой притяжения Земли и тем, что Земля вращается вокруг собственной оси.

В связи с малостью угловой скорости вращения Земли ($\omega = 7,27 \cdot 10^{-3}\,\text{с}^{-1}$) сила тяжести мало отличается от силы тяготения. При $h << R_З$ ускорение, создаваемое силой тяжести, является ускорением свободного падения:

$$g = GM_З/R_З^2 = 9,81\,\text{м/с}^2. \tag{2.6}$$

Очевидно, что ускорение свободного падения для всех тел одинаково.

4. *Весом тела* называется сила, с которой тело действует на горизонтальную опору или растягивает вертикальный подвес, и эта сила приложена либо к опоре, либо к подвесу.

Второй закон Ньютона. Ускорение, с которым движется тело, прямо пропорционально силе, действующей на тело, и обратно пропорционально его массе и совпадает по направлению с действующей силой:

$$\mathbf{a} = \mathbf{F}/m. \tag{2.7}$$

Если на тело действует несколько сил, то под $\mathbf{F}$ понимают результирующую всех действующих сил. Уравнение (2.7) выражает основной закон динамики материальной точки. Движение твердого тела зависит не только от приложенных сил, но и от точки их приложения. Можно показать, что ускорение центра тяжести (центра масс) не зависит от точки приложения сил и справедливо уравнение

$$m\mathbf{a}_{цт} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3 + \ldots,$$

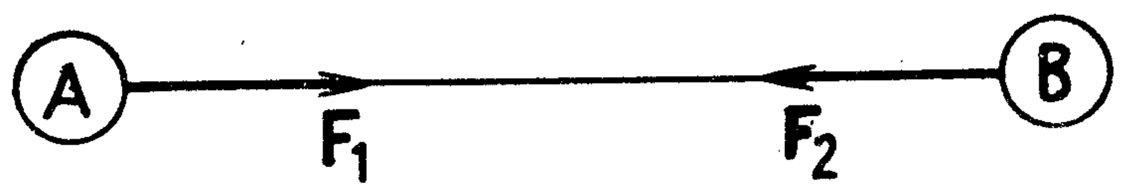


Рис. 2.4.

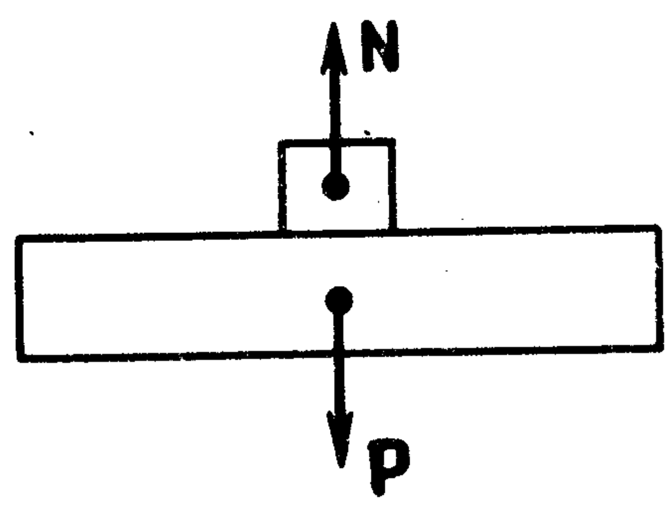


Рис. 2.5.

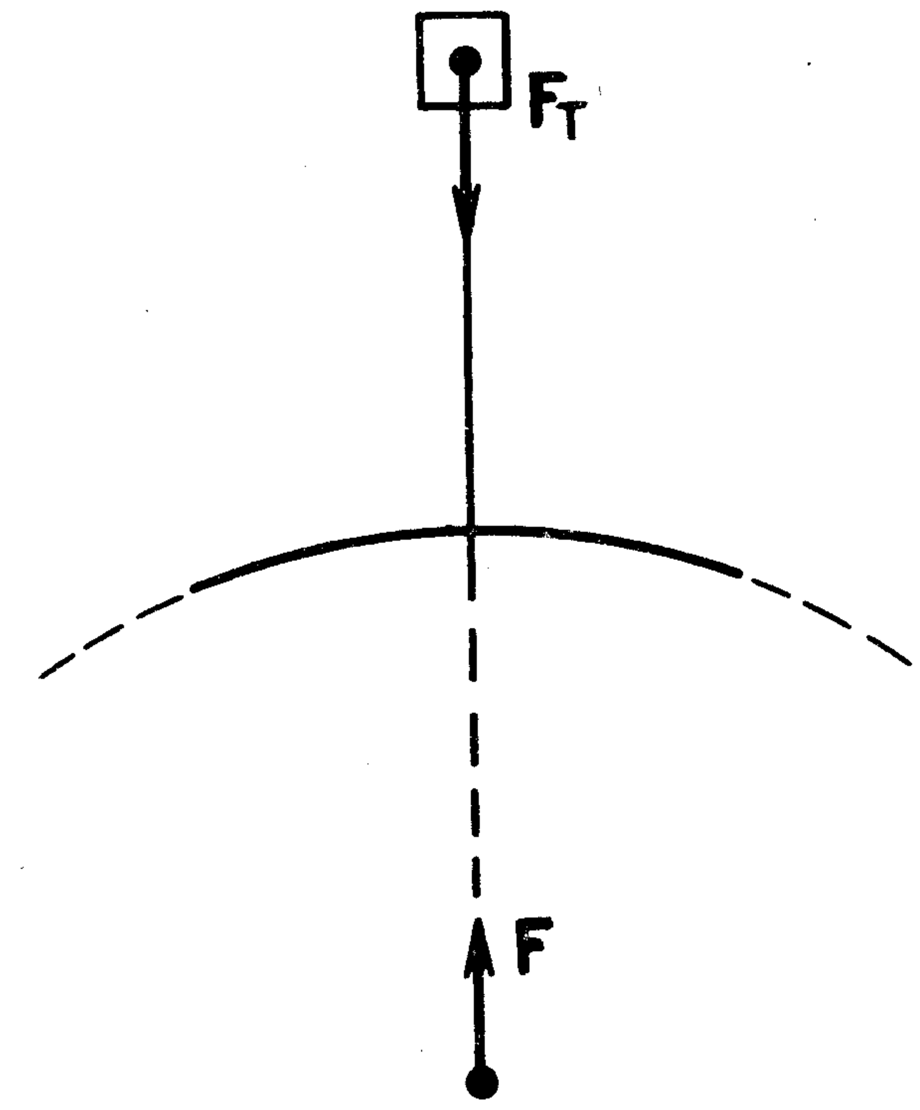


Рис. 2.6.

где m — масса тела, $\mathbf{a}_{\text{цт}}$ — ускорение его центра тяжести. Если тело движется поступательно, то это уравнение полностью описывает движение тела.

Третий закон Ньютона. Всякому действию всегда есть равное и противоположно направленное противодействие.

Так, если взаимодействуют два тела A и B с силами $\mathbf{F}_1$и $\mathbf{F}_2$, то эти силы равны по величине, противоположны по направлению, направлены вдоль одной прямой и приложены к разным телам (рис. 2.4).

Природа этих сил всегда одинакова. Приведем следующий пример. Тело массой m лежит на столе. Сила, с которой тело действует на стол, $\mathbf{P}$ (вес тела), приложена к столу, сила, с которой стол действует на тело, $\mathbf{N}$ (сила реакции опоры), приложена к телу (рис. 2.5). Согласно 3-му закону Ньютона, $\mathbf{P} = -\mathbf{N}, P = N$. Сила $\mathbf{F}_{\text{т}}$, с которой Земля действует на тело массой m, равна $m\mathbf{g}$, приложена к телу и направлена к центру Земли; сила, с которой тело действует на Землю, $\mathbf{F}$, равна по величине $\mathbf{F}_{\text{т}}$, приложена к центру Земли и направлена к центру масс тела (рис. 2.6).

Первый закон Ньютона необходим для того, чтобы определить те системы отсчета, в которых справедлив второй закон Ньютона. Системы отсчета, в которых выполняется 1-й закон Ньютона, называются ***инерциальными***, те системы отсчета, в которых 1-й закон не выполняется, — ***неинерциальными***.

Рассмотрим следующий пример. К потолку неподвижного вагона подвешен груз, который видят наблюдатель 1, сидящий в вагоне, и наблюдатель 2, находящийся на платформе (рис. 2.7). Нить маятника вертикальна, что естественно с точки зрения наблюдателей 1 и 2, так как на груз действуют две вертикальные силы: сила натяжения нити $\mathbf{T}$ и сила тяжести $\mathbf{F}_{\text{т}}$, равные по величине и противоположные по направлению. Если же вагон движется с ускорением $\mathbf{a}$, то с точки зрения наблюдателя 2 нить должна отклоняться от вертикали, так как на груз продолжают действовать те же силы, но результирующая этих сил уже не должна равняться 0, чтобы обеспечить движение маятника с ускорением $\mathbf{a}$.

С точки зрения наблюдателя 1 маятник остается в покое относительно стенок вагона, и результирующая сил, действующих на маятник, должна равняться нулю. Но так как нить отклонена, то наблюдатель должен предположить наличие силы, которая в сумме с силой натяжения нити и силой тяжести даст 0. Это ***сила инерции.*** Но эта сила уже не является результатом взаимодействия тел, а

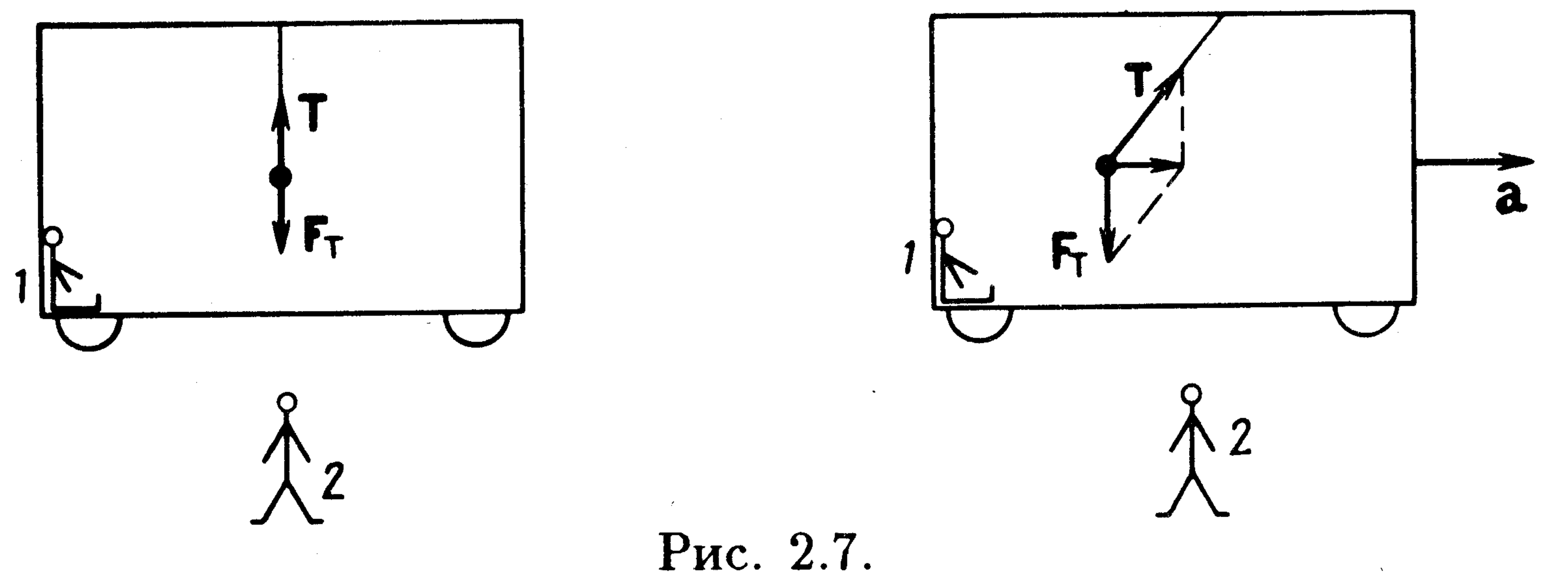


Рис. 2.7.

является результатом того, что мы рассматриваем движение тела относительно системы отсчета, движущейся с ускорением.

Система, связанная с наблюдателем 1, — неинерциальная, система связанная с наблюдателем 2, — инерциальная. Мы будем рассматривать движение тел только относительно инерциальных систем отсчета. Подчеркнем, что сила есть результат взаимодействия реальных тел.

В связи с важностью изложенного еще раз сформулируем первый закон Ньютона: существуют такие системы отсчета, называемые ***инерциальными***, в которых тело сохраняет состояние покоя или равномерного прямолинейного движения, если на него не действуют силы или действие сил скомпенсировано. Очевидно, что если есть одна инерциальная система отсчета, то любая другая, движущаяся относительно нее равномерно и прямолинейно, является также инерциальной системой отсчета. В первом приближении система отсчета, связанная с Землей, является инерциальной, хотя строго говоря она неинерциальна, так как Земля вращается вокруг собственной оси и обращается вокруг Солнца. Однако ускорения этих движений малы.

В связи с трудностями, возникающими при решении задач динамики, особенно в тех случаях, когда рассматривается система тел, предложим схему, по которой следует решать задачи динамики.

1. Делаем рисунок и изображаем силы, действующие на тела со стороны других тел.

2. Выбираем тело отсчета, относительно которого будем рассматривать движение.

3. Связываем с телом отсчета систему координат.

4. Записываем основной закон динамики для *каждого тела в отдельности.*

5. Записываем уравнения в проекциях на оси координат.

6. Из полученных уравнений составляем систему алгебраических уравнений, при этом число уравнений должно быть равно числу неизвестных.

7. Решаем систему уравнений и находим неизвестные физические величины; проверяем наименование полученных величин.

Примеры решения задач

Задача 1. Тело массой 5 кг лежит на полу лифта, поднимающегося вверх. Ускорение лифта $a = 2\,м/с^2$. Определить силу давления тела на пол лифта P (вес тела).

Дано: $m = 5\,\text{кг}$, $a = 2\,\text{м/с}^2$, $g = 10\,\text{м/с}^2$; P — ?

Решение. На тело действуют две силы — сила тяжести $\mathbf{F}_\text{т} = m\mathbf{g}$ и сила нормального давления $\mathbf{N}$ (рис. 2.8). Основной закон динамики запишется в виде

$$m\mathbf{a} = m\mathbf{g} + \mathbf{N}. \tag{2.8}$$

Направление движения лифта не указывает направления ускорения. Поэтому рассмотрим 2 случая.

1) Ускорение направлено вверх.

Ось y направим вертикально вверх. Проектируя на ось y ускорение и силы, получим

$$ma = -mg + N. \tag{2.9}$$

откуда

$$N = m(a + g).$$

По 3-му закону Ньютона сила, с которой пол лифта действует на тело, равна силе, с которой тело действует на пол, т. е. весу тела:

$$\mathbf{N} = -\mathbf{P}, \quad N = P,$$

откуда

$$P = m(a + g), \tag{2.10}$$

$$[P] = \text{кг} \cdot \text{м/с}^2 = \text{Н},$$

$$P = 5 \cdot 12\,\text{Н} = 60\,\text{Н}.$$

2) Ускорение направлено вниз

Проектируя на ось y ускорение и силы, получим

$$-ma = N - mg, \tag{2.11}$$

$$N = m(g - a), \tag{2.12}$$

откуда

$$P = m(g - a),$$

$$P = 5 \cdot 8\,\text{Н} = 40\,\text{Н}.$$

Из (2.12) следует, что если $a = g$, то $N = 0$, т. е. отсутствует давление тела на опору. В этом случае тело будет находиться в состоянии невесомости.

Задача 2. Через блок перекинута нерастяжимая нить, к которой привязаны два тела массами $m_1 = 4$ кг и $m_2 = 6$ кг. Определите ускорения, с которыми будут двигаться тела, и силу натяжения нити. Массами блока и нити пренебречь (рис. 2.9).

Дано: $m_1 = 4\,\text{кг}$, $m_2 = 6\,\text{кг}$; a — ? T — ?

Решение. Поскольку $m_2 > m_1$, ускорение тела массой m_1 направлено вверх, а тела массой m_2 – вниз. На каждое из тел m_1 и m_2 действуют две силы: сила тяжести и сила натяжения нити. На тело массой m_1 – $\mathbf{F}_{\text{т}1}$ и $\mathbf{T}_1$, на тело массой m_2 – $\mathbf{F}_{\text{т}2}$ и $\mathbf{T}_2$. Запишем основной закон динамики для этих тел:

$$m_1\mathbf{a}_1 = m_1\mathbf{g} + \mathbf{T}_1, \tag{2.13}$$

$$m_2\mathbf{a}_2 = m_2\mathbf{g} + \mathbf{T}_2. \tag{2.14}$$

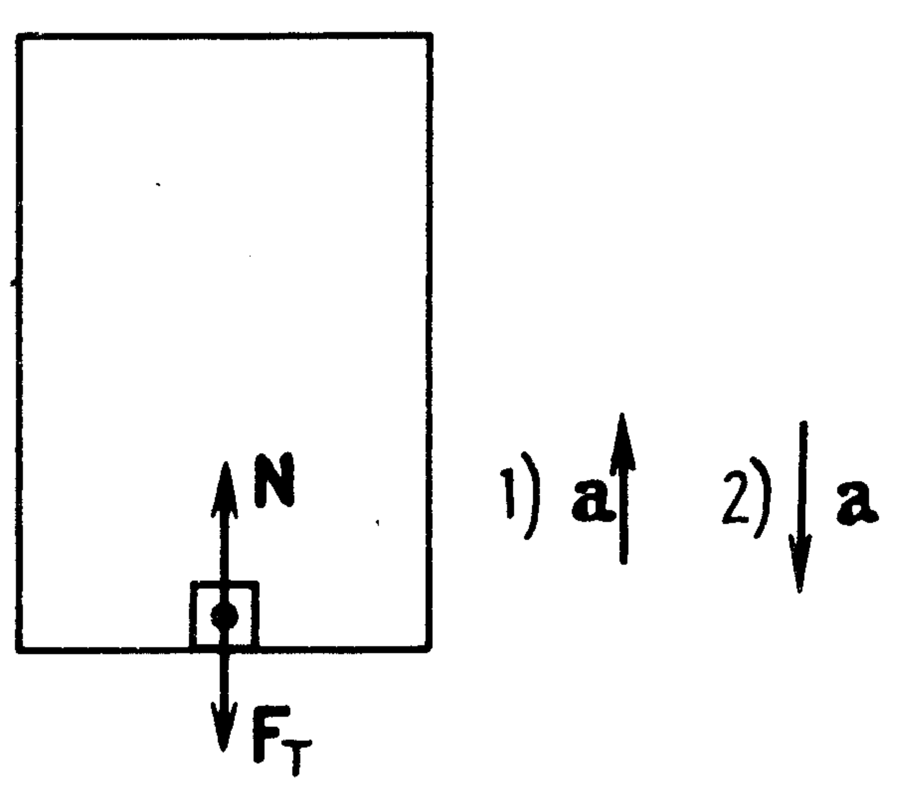


Рис. 2.8.

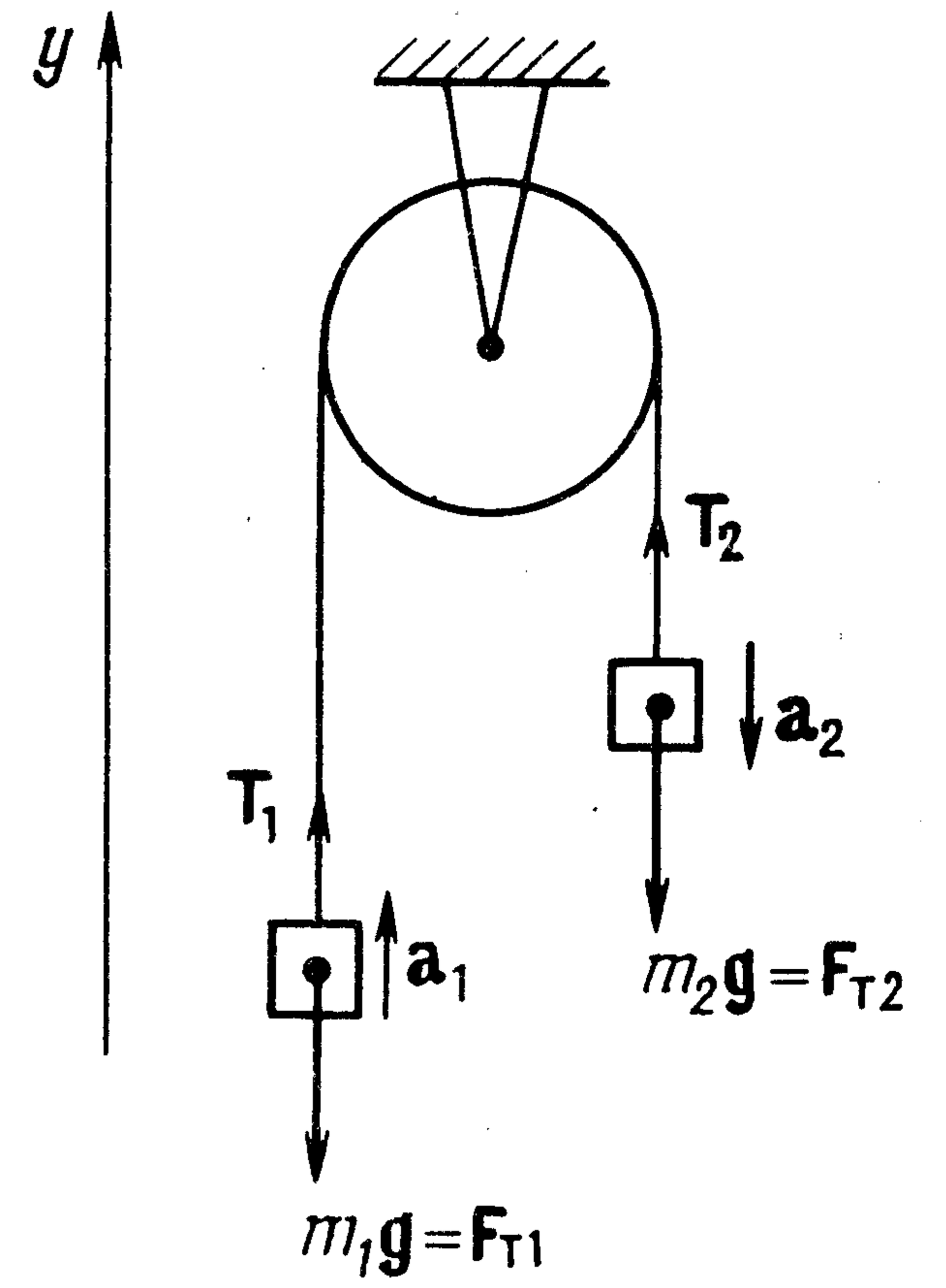


Рис. 2.9.

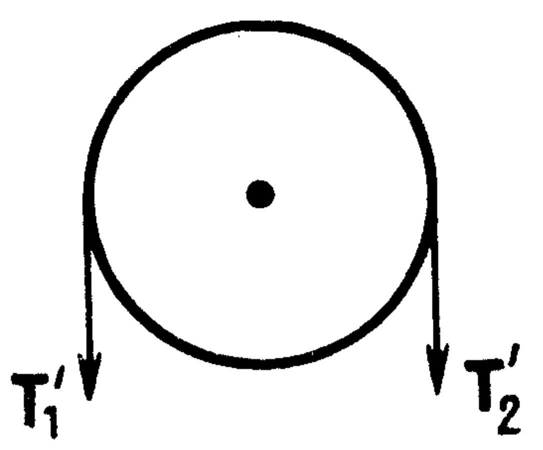


Рис. 2.10.

Ось y направим вертикально вверх. Тогда в проекциях на ось y уравнения (2.13) и (2.14) запишутся в виде

$$\begin{aligned} m_1a_1 &= T_1 - m_1g, \\ -m_2a_2 &= T_2 - m_2g. \end{aligned} \tag{2.15}$$

В силу условия нерастяжимости нити $a_1 = a_2 = a$, так как за одно и то же время с момента начала движения тела будут проходить один и тот же путь. По условию задачи масса нити $m_н$ мала ($m_н << m_1$), следовательно, сила натяжения вдоль нити остается по модулю неизменной, при переходе через блок сила натяжения также по модулю не изменяется, поскольку массой блока мы пренебрегаем: $T_1' = T_2'$, а $T_1' = T_1$, $T_2' = T_2$ (рис. 2.10), отсюда $T_1 = T_2 = T$.

Следовательно, уравнения (2.15) можно переписать в виде:

$$\begin{aligned} m_1a &= T - m_1g, \\ m_2a &= m_2g - T. \end{aligned} \tag{2.16}$$

Это система двух уравнений относительно двух неизвестных a и T. Сложим левые и правые части уравнений:

$$(m_1 + m_2)a = (m_2 - m_1)g,$$

откуда

$$a = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}g, \tag{2.17}$$

$$a = 2\,\text{м/с}^2.$$

Силу натяжения найдем, подставив выражение для a в одно из уравнений (2.16):

$$T = \frac{2m_1m_2}{m_1 + m_2}g, \tag{2.18}$$

$$[T] = \frac{\text{кг} \cdot \text{кг}}{\text{кг}} \cdot \frac{\text{м}}{\text{с}^2} = \text{Н},$$

$$T = 48\,\text{Н}.$$

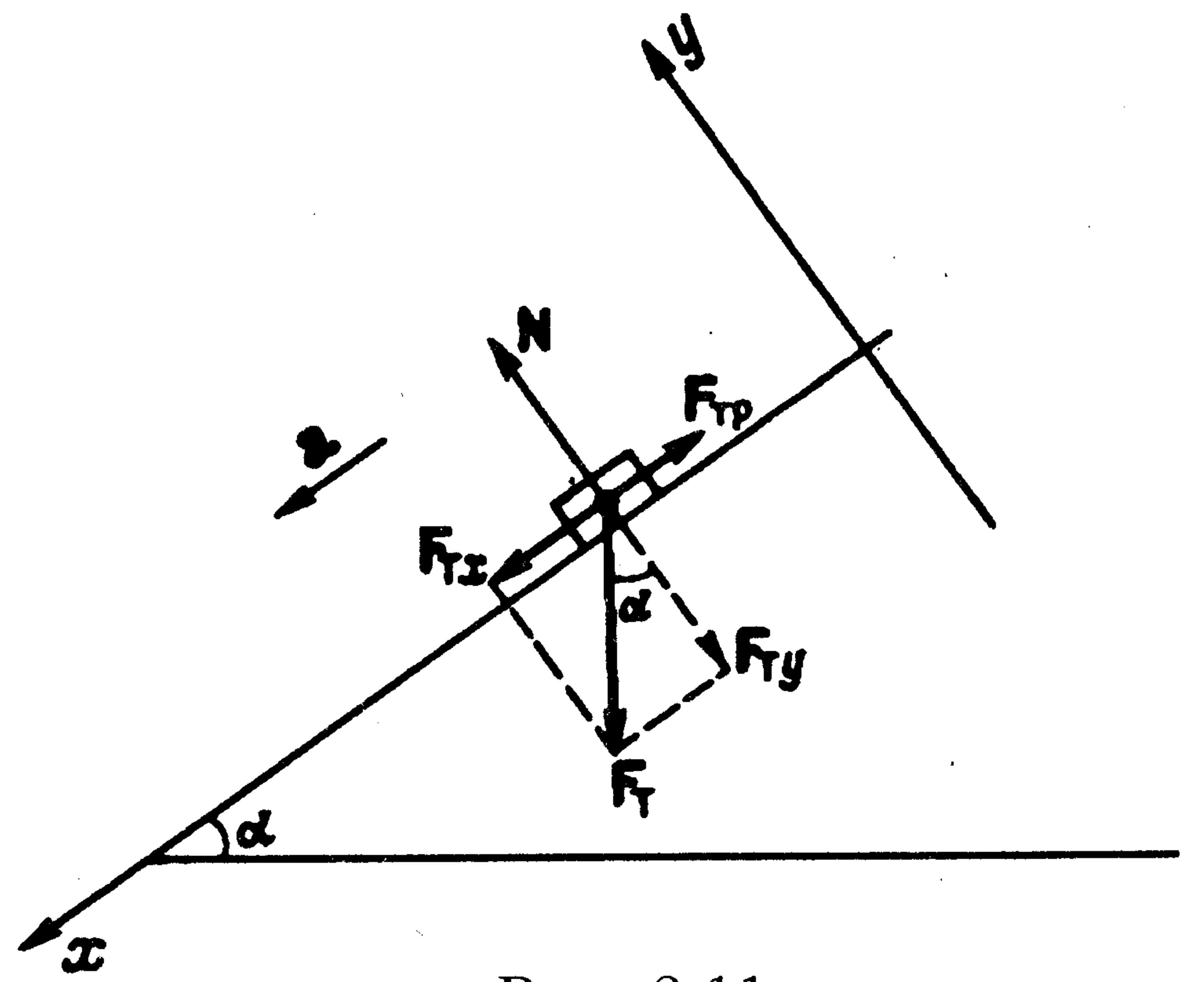


Рис. 2.11.

Задача 3. Тело скользит по наклонной плоскости, угол наклона которой к горизонту $\alpha = 30°$.

1) Определить ускорение тела, если коэффициент трения между телом и поверхностью плоскости $k = 0,1$.

2) Найти угол наклона α_0, при котором тело не будет скользить по наклонной плоскости.

Дано: $\alpha = 30°$, $k = 0,1$; a — ? α_0 — ?

Решение. На тело действуют три силы: сила тяжести $\mathbf{F}_T = m\mathbf{g}$, сила нормальной реакции $\mathbf{N}$ и сила трения $F_{тр} = kN$. Направим ось x вдоль наклонной плоскости, ось y перпендикулярно ей (рис. 2.11).

Основной закон динамики для этого тела запишется в виде

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F}_т + \mathbf{N} + \mathbf{F}_{тр}. \qquad (2.19)$$

В проекциях на оси координат уравнение (2.19) имеет вид:

$$\text{на ось } x \qquad ma = mg\sin\alpha - F_{тр}, \qquad (2.20)$$

$$\text{на ось } y \qquad 0 = N - mg\cos\alpha, \qquad (2.21)$$

$$F_{тр} = kN.$$

Из (2.21) $N = mg\cos\alpha$, следовательно, $F_{тр} = kmg\cos\alpha$. Подставив выражение для $F_{тр}$ в (2.20), получим

$$ma = mg\sin\alpha - kmg\cos\alpha,$$

$$a = g(\sin\alpha - k\cos\alpha). \qquad (2.22)$$

Решение (2.22) имеет смысл, если

$$\sin\alpha - k\cos\alpha > 0,$$

так как в рассматриваемой задаче ускорение не может быть отрицательным. Следовательно,

$$k \leq \mathrm{tg}\alpha. \qquad (2.23)$$

При $k = \mathrm{tg}\alpha_0$ тело будет двигаться равномерно или находиться в состоянии покоя.

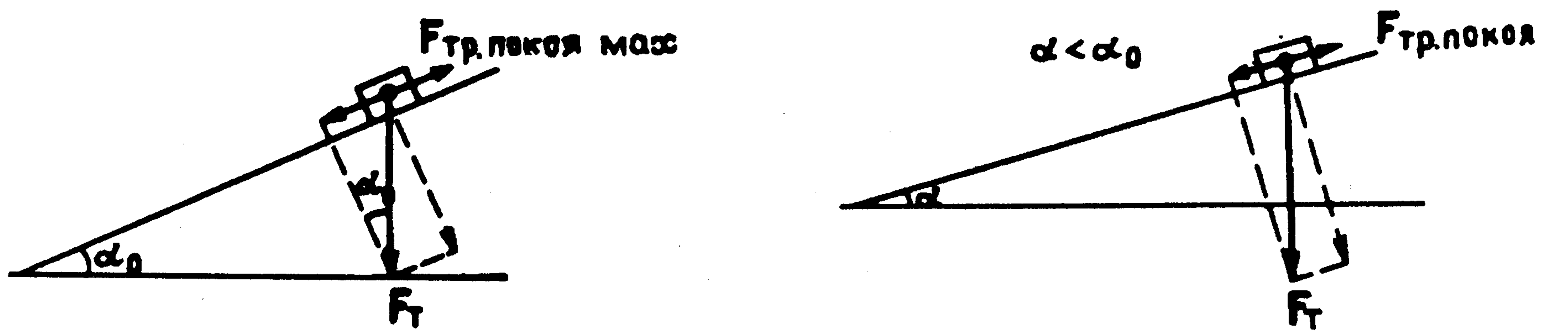


Рис. 2.12.

Если угол α меньше α_0, то тело будет находиться в состоянии покоя, при этом на тело будет действовать сила трения покоя, которая будет тем меньше, чем меньше угол α (рис. 2.12). Из (2.22), подставляя численные значения, получим

$$a = 9,8 \cdot (0,5 - 0,1 \cdot 0,86)\text{м/с}^2 = 4,06\,\text{м/с}^2,$$

из (2.23)

$$\text{tg}\alpha_0 = 0,1, \quad \alpha_0 = 5,7^\circ.$$

Следовательно, при углах $\alpha < \alpha_0$ тело не будет скользить по наклонной плоскости.

Задача 4. Тело массой $m = 10$ кг движется по наклонной плоскости. На тело действует сила $F = 100$ Н, направленная вверх под углом $\alpha = 30^\circ$ к поверхности наклонной плоскости. Коэффициент трения $k = 0,1$. Угол наклона плоскости $\beta = 30^\circ$. Определить ускорение, с которым движется тело (рис. 2.13).

Дано: $m = 10\,\text{кг}$, $F = 100\,\text{Н}$, $\alpha = 30^\circ$, $\beta = 30^\circ$, $k = 0,1$; a — ?

Решение. На тело действуют четыре силы: $\mathbf{F}$, сила тяжести $\mathbf{F}_\text{т} = m\mathbf{g}$, сила нормальной реакции $\mathbf{N}$ и сила трения $\mathbf{F}_\text{тр}$. Направим ось x вдоль наклонной плоскости, ось y перпендикулярно ей. Основной закон динамики для тела есть

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F}_\text{т} + \mathbf{N} + \mathbf{F}_\text{тр} + \mathbf{F}. \tag{2.24}$$

Определим направление силы трения, учитывая, что сила трения всегда направлена в сторону, противоположную направлению движения тела. Направление движения можно определить, сравнив проекции сил на ось x. Движение вдоль оси x определяют проекция силы $\mathbf{F}$ $F_x = F\cos\alpha$ и проекция силы тяжести $F_{\text{т}x} = mg\sin\beta$:

$$F_x = F\cos\alpha = 100(\sqrt{3/2})\,\text{Н} = 86,5\,\text{Н},$$
$$F_{\text{т}x} = mg\sin\beta = 10 \cdot 9,8 \cdot 0,5\,\text{Н} = 49\,\text{Н}.$$

Итак, $F_x > F_{\text{т}x}$, следовательно, тело будет двигаться вверх по наклонной плоскости вдоль положительного направления оси x. Сила трения направлена в противоположную сторону.

В проекциях на оси координат уравнение (2.24) запишется в виде:

на ось x $$ma = F\cos\alpha - F_\text{тр} - mg\sin\beta, \tag{2.25}$$

на ось y $$0 = F\sin\alpha + N - mg\cos\beta, \tag{2.26}$$

$$F_\text{тр} = kN.$$

Из (2.26) имеем

$$N = mg\cos\beta - F\sin\alpha.$$

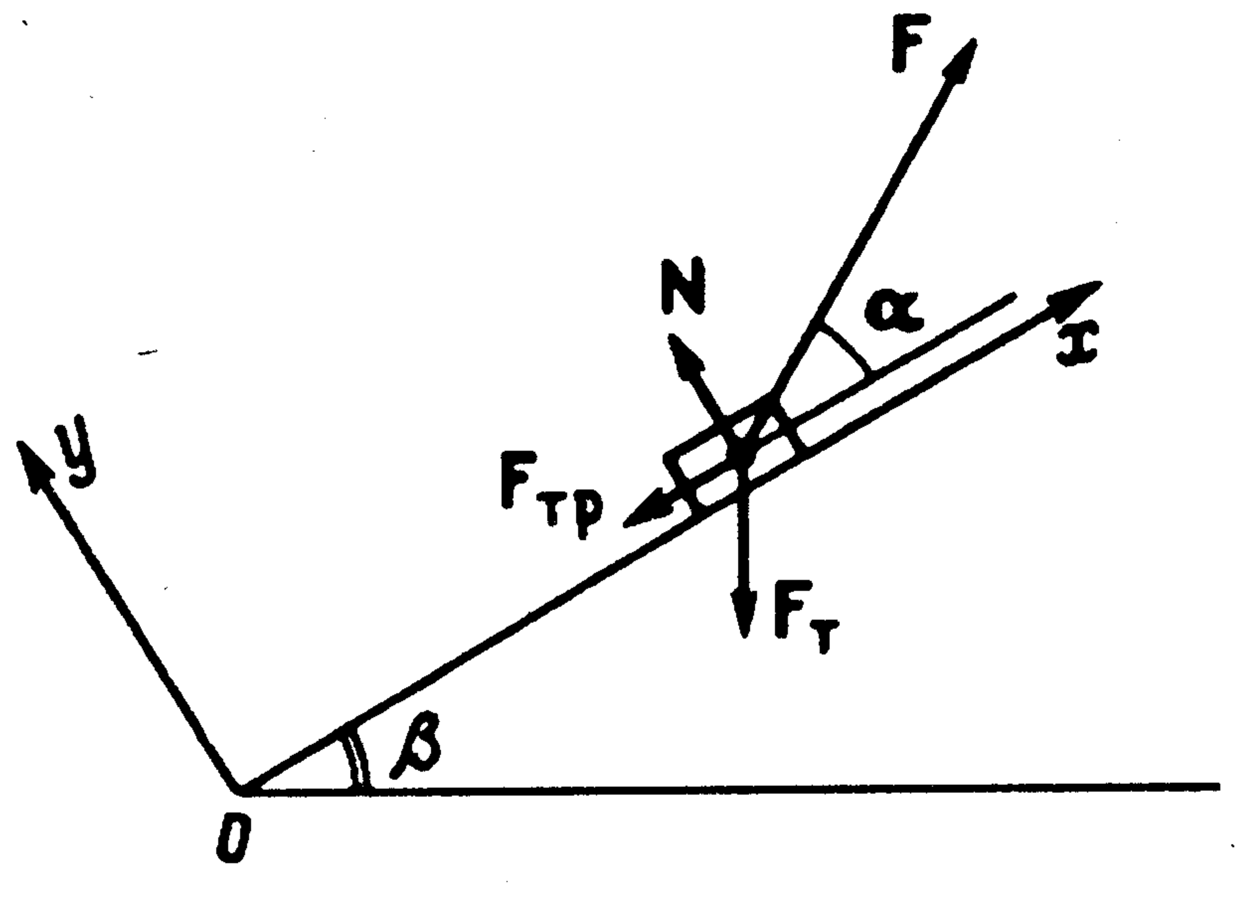


Рис. 2.13.

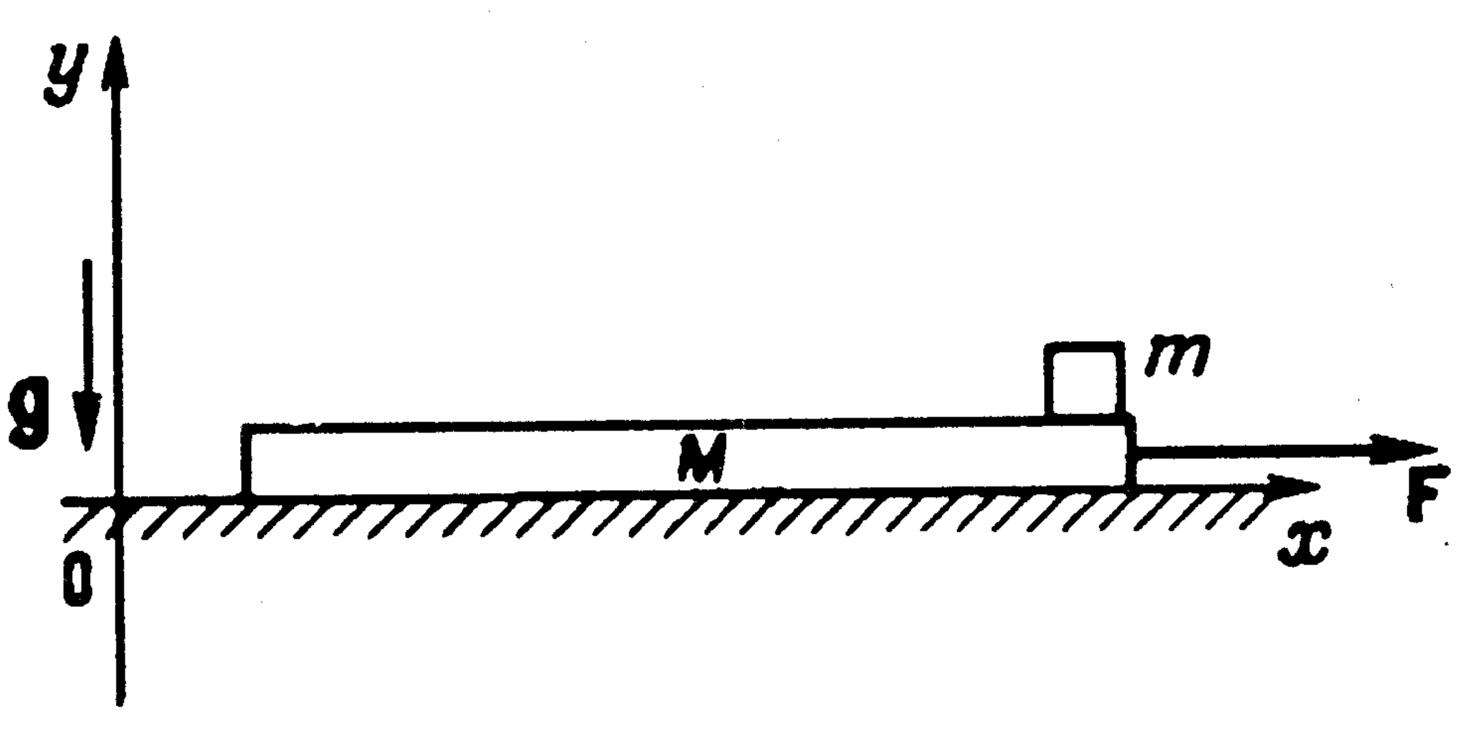


Рис. 2.14.

Тогда уравнение (2.25) будет иметь вид

$$ma = F\cos\alpha - k(mg\cos\beta - F\sin\alpha) - mg\sin\alpha.$$

Окончательно,

$$a = (F/m)(\cos\alpha + k\sin\beta) - g(k\cos\beta + \sin\alpha), \qquad (2.27)$$

$$[a] = \text{Н/кг} - \text{м/с}^2 = \text{м/с}^2,$$

$$a = (100/10)(0,86 + 0,05) - 9,8(0,1\cdot 0,86 + 0,5)\,\text{м/с}^2,$$

$$a = 3,3\,\text{м/с}^2.$$

Задача 5. На доске массой $M = 4$ кг лежит брусок массой $m = 1$ кг. Длина доски $l = 60$ см. Коэффициент трения между бруском и доской $k_1 = 0,2$, между доской и столом $k_2 = 0,1$. Определить

1) с какой максимальной силой $F_{\max}$ можно тянуть доску, чтобы брусок не соскользнул с нее;

2) за какой промежуток времени брусок соскользнет с доски, если сила $F = 35$ Н.

Размеры бруска не учитывать.

Дано: $M = 4\,\text{кг}$, $k_1 = 0,2$, $m = 1\,\text{кг}$, $k_2 = 0,1$, $l = 60\,\text{см}\,(0,6\,\text{м})$; $F_{\max}$ — ? t — ?

Решение. Будем рассматривать движение и бруска и доски относительно поверхности стола. Заметим, что система отсчета, связанная с доской, является неинерциальной. Направим ось x, как показано на рис. 2.14. На брусок действуют три силы: сила тяжести $\mathbf{F}_{\text{т}1} = m\mathbf{g}$, сила нормальной реакции $\mathbf{N}_1$, сила трения $F_{\text{тр}1} = k_1 N_1$. Сила трения совпадает с направлением оси x, так как брусок стремится сохранять состояние покоя, и только одна сила вызывает движение бруска вправо — сила трения (рис. 2.15).

На доску действуют шесть сил: сила тяжести $\mathbf{F}_{\text{т}2} = M\mathbf{g}$, сила нормальной реакции $\mathbf{N}_2$, сила давления бруска $\mathbf{F}_{\text{д}} = -\mathbf{N}_1$, сила трения $\mathbf{F}'_{\text{тр}1} = -\mathbf{F}_{\text{тр}1}$ (по третьему закону Ньютона), сила трения $F_{\text{тр}2} = k_2 N_2$, сила $\mathbf{F}$.

Запишем основной закон динамики для каждого из тел:

$$m\mathbf{a}_1 = m\mathbf{g} + \mathbf{N}_1 + \mathbf{F}_{\text{тр}1}, \qquad (2.28)$$

$$M\mathbf{a}_2 = M\mathbf{g} + \mathbf{N}_2 + \mathbf{F}_g + \mathbf{F}'_{\text{тр}1} + \mathbf{F}_{\text{тр}2} + \mathbf{F}. \qquad (2.29)$$

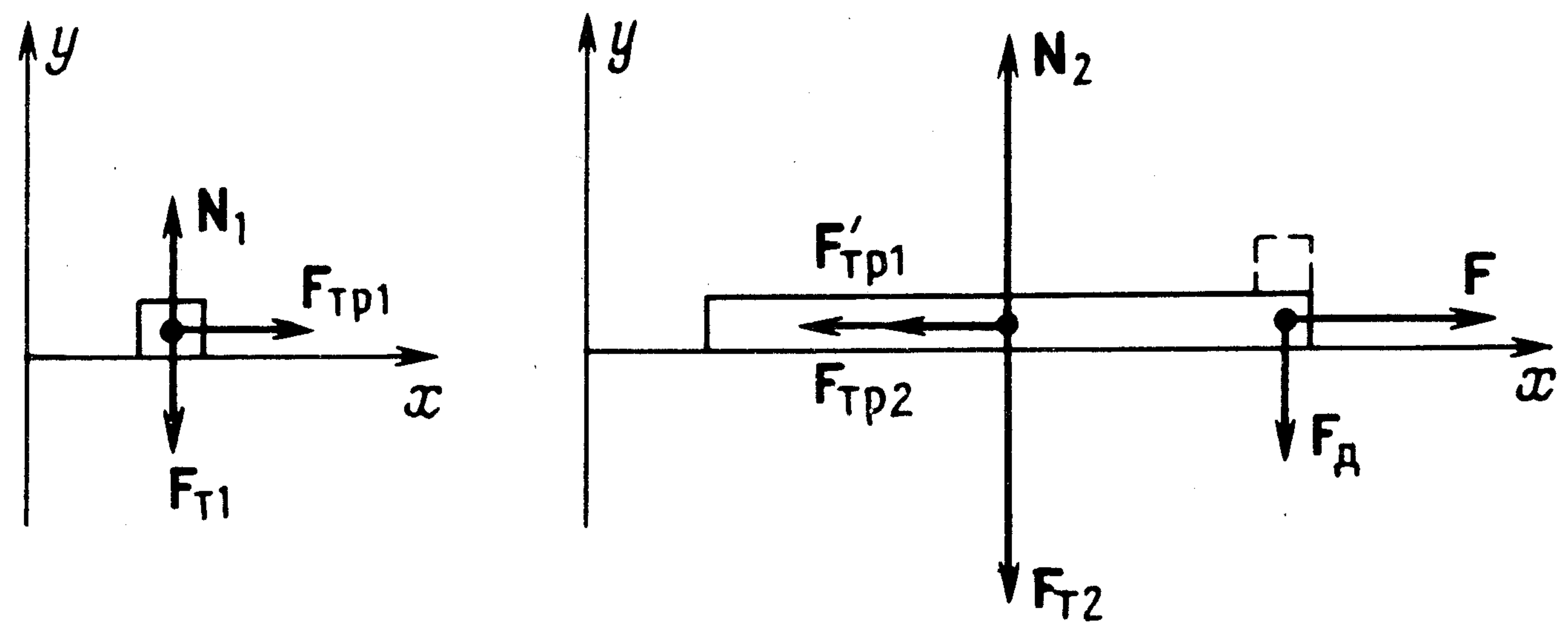


Рис. 2.15.

Уравнение (2.28) в проекциях на оси координат имеет вид:

$$\begin{gathered}\text{на ось } x \quad ma_1 = F_{\text{тр}1}, \\ \text{на ось } y \quad 0 = N_1 - mg, \\ F_{\text{тр}1} = k_1 N_1 = k_1 mg, \quad ma_1 = k_1 mg,\end{gathered} \tag{2.30}$$

а уравнение (2.29):

$$\begin{gathered}\text{на ось } x \quad Ma_2 = F - F_{\text{тр}1} - F_{\text{тр}2}, \\ \text{на ось } y \quad 0 = N_2 - P - Mg, \\ P = N_1 = mg;\end{gathered}$$

откуда

$$\begin{gathered}N_2 = P + Mg = (m+M)g, \\ Ma_2 = F - k_1 mg - k_2(m+M)g.\end{gathered} \tag{2.31}$$

Очевидно, что тело не будет скользить по доске, когда $a_1 = a_2$. Из (2.30) и (2.31)

$$a_1 = k_1 g, \tag{2.32}$$

$$a_2 = \frac{F}{M} - k_1\frac{m}{M}g - k_2\frac{m+M}{M}g, \tag{2.33}$$

откуда

$$F_{\max} = (k_1 + k_2)(M+m)g. \tag{2.34}$$

Формула (2.34) действительно определяет максимальную силу, так как если сила $F < F_{\max}$, то тем более брусок будет неподвижен относительно доски. Ускорение, с которым он будет двигаться вместе с доской, в этом случае будет меньше, а следовательно, на него должна действовать меньшая сила (сила трения покоя, $F_{\text{тр.покоя max}} = F_{\text{тр. скольжения}}$). Если $F > F_{\max}$, то $a_1 \neq a_2$, как следует из (2.32) и (2.33). Ускорение бруска относительно стола $\mathbf{a}_1$ связано с его ускорением относительно доски $\mathbf{a}'$ и ускорением доски относительно стола $\mathbf{a}_2$ соотношением: $\mathbf{a}_1 = \mathbf{a}' + \mathbf{a}_2$. В проекции на ось x имеем $a'_1 = a_1 - a_2$. Брусок за время t проходит путь l, равный длине доски:

$$l = a'_1 t^2/2.$$

Следовательно, промежуток времени, за который брусок соскользнет с доски:

$$t = \sqrt{2l/a'_1} = \sqrt{\frac{2l}{F/M - (k_1+k_2)(M+m)g/M}}. \tag{2.35}$$

Вычисления по формулам (2.34) и (2.35) дают

$$F = (0,1+0,2)\cdot 5\cdot 9,8\text{Н} = 14,7\,\text{Н},$$

$$[t] = \sqrt{\frac{\text{м}}{\text{Н/кг} - (\text{кг/кг})(\text{м/с}^2)}} = \text{с},$$
$$t = 0,2\,\text{с}.$$

Задача 6. К потолку лифта, движущегося с ускорением $a = 2\text{м/с}^2$, подвешен блок (рис. 2.16). Через блок перекинута нерастяжимая нить, к которой привязаны два груза массами $m_1 = 6$ кг и $m_2 = 4$ кг. Определить ускорения тел относительно блока и земли a'_1 и a'_2, a_1 и a_2. Считать массу блока и нити равными нулю.

Дано: $g = 10\,\text{м/с}^2$, $a = 2\,\text{м/с}^2$, $m_1 = 6\,\text{кг}$, $m_2 = 4\,\text{кг}$; a'_1 — ? a'_2 — ? a_1 — ? a_2 — ?

Решение. На каждое тело действуют две силы: сила тяжести и сила натяжения. Рассмотрим движение относительно неподвижного тела, например, пола. Пусть ось y направлена вертикально вверх. Ускорения тел m_1 и m_2 относительно неподвижной системы отсчета различны. Основной закон динамики для тел запишется в виде

$$m_1\mathbf{a}_1 = m_1\mathbf{g} + \mathbf{T}_1, \tag{2.36}$$

$$m_2\mathbf{a}_2 = m_2\mathbf{g} + \mathbf{T}_2. \tag{2.37}$$

В проекциях на ось y уравнения (2.36) и (2.37) имеют вид

$$-m_1a_1 = -m_1g + T_1, \quad m_2a_2 = -m_2g + T_2. \tag{2.38}$$

Поскольку массы блока и нити равны нулю, имеем $T_1 = T_2 = T$. Относительно блока тела движутся с одинаковым по величине ускорением a':

$$a'_1 = a'_2 = a'.$$

Тогда $a_1 = a' - a$, $a_2 = a' + a$. Подставив выражения для a_1 и a_2 в уравнения (2.38), получим

$$-m_1(a' - a) = -m_1g + T, \quad m_2(a' + a) = -m_2g + T, \tag{2.39}$$

отсюда

$$a' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}(g + a),$$

$$a_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}(g + a) - a, \tag{2.40}$$

$$a_2 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}(g + a) + a, \tag{2.41}$$

$$a' = 2,4\,\text{м/с}^2, \quad a_1 = 0,4\,\text{м/с}^2, \quad a_2 = 4,4\,\text{м/с}^2.$$

Задача 7. Тело массой $m = 2$ кг движется по вертикальной стене. Сила F действует вверх под углом $\alpha = 30°$. Коэффициент трения $k = 0,1$. Определить, при каком значении силы F ускорение тела направлено вверх и равно $2\,\text{м/с}^2$.

Дано: $m = 2\,\text{кг}$, $\alpha = 30°$, $k = 0,1$, $a = 2\,\text{м/с}^2$, $g = 10\,\text{м/с}^2$; F — ?

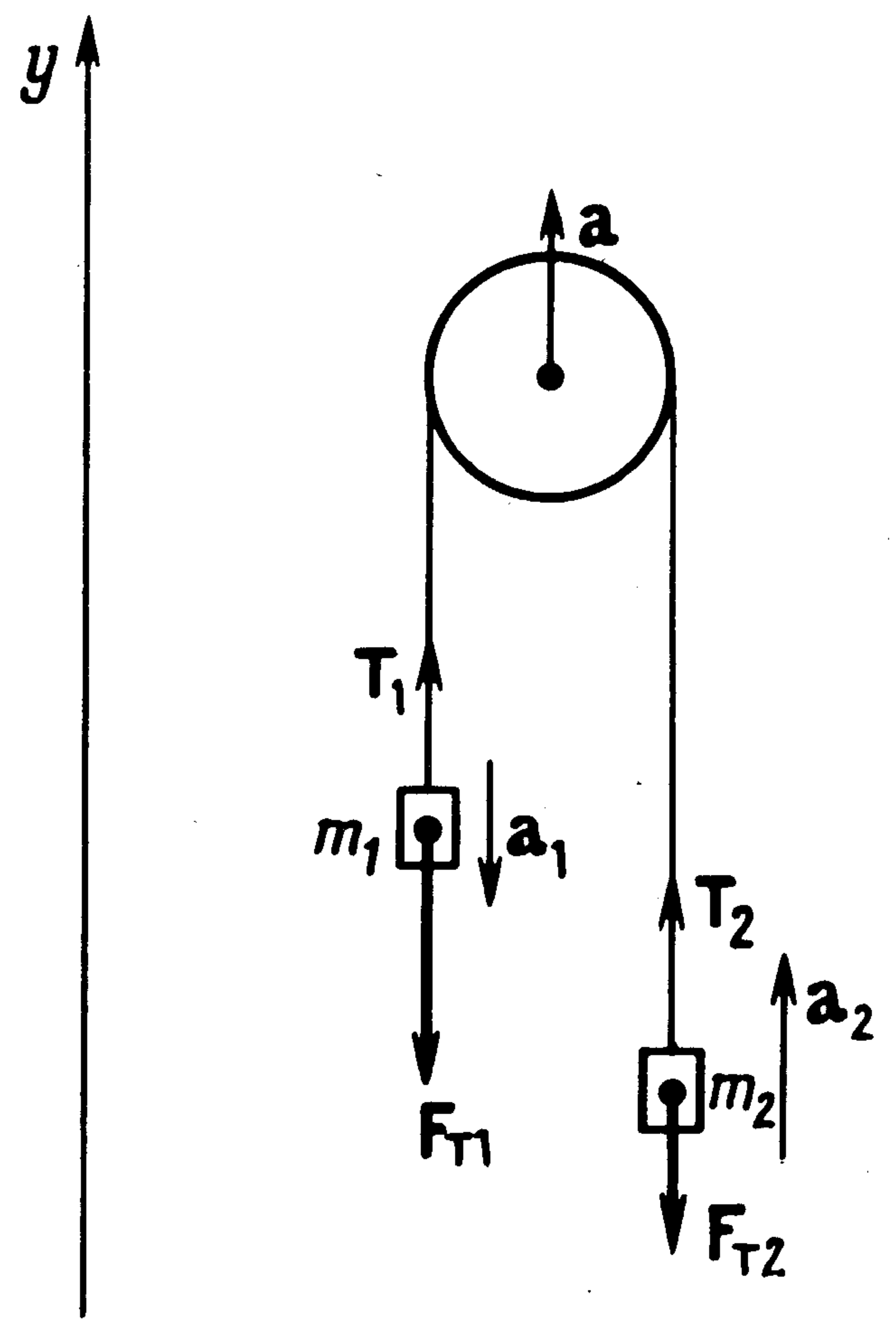


Рис. 2.16.

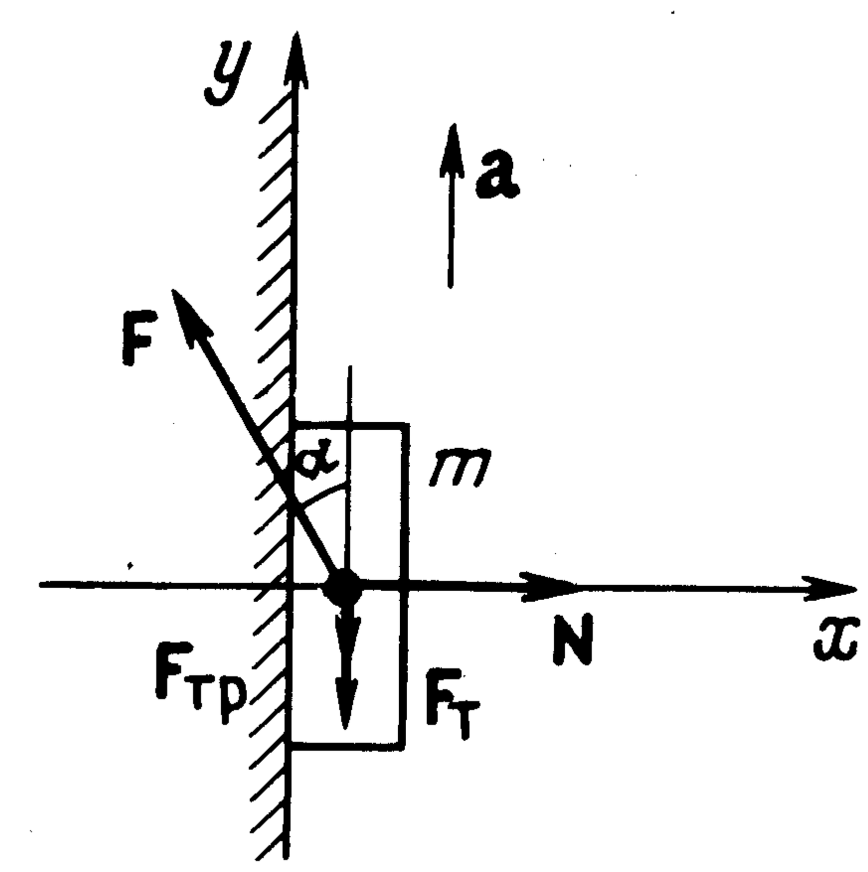


Рис. 2.17.

Решение. Рассмотрим движение тела относительно стены. Ось y направим вертикально вверх, ось x — перпендикулярно стене (рис. 2.17).

На тело действуют четыре силы: сила тяги $\mathbf{F}$, сила тяжести $\mathbf{F}_т$, сила трения $\mathbf{F}_{тр}$, сила нормальной реакции $\mathbf{N}$. Основной закон динамики для тела запишется в виде:

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F} + \mathbf{N} + \mathbf{F}_{тр} + \mathbf{F}_т. \tag{2.42}$$

В проекциях на оси координат уравнение (2.42) имеет вид:

$$\begin{aligned} &\text{на ось } x \qquad 0 = N - F\sin\alpha, \\ &\text{на ось } y \qquad ma = F\cos\alpha - F_{тр} - mg. \end{aligned} \tag{2.43}$$

Решая уравнения (2.43), определим

$$F = \frac{m(a+g)}{\cos\alpha - k\sin\alpha}, \tag{2.44}$$

$$F = \frac{2\cdot 12}{0,86 - 0,05}\,\text{Н} = 30\,\text{Н}.$$

Задача 8. По наклонной плоскости (угол наклона α) движется тело массой m_2, связанное нерастяжимой нитью, перекинутой через блок, с телом массы $m_1(m_1 > m_2)$ (рис. 2.18). Коэффициент трения между грузом m_2 и наклонной плоскостью равен k. Найти силу, действующую на ось блока со стороны плоскости. (Массами блока и нити пренебречь, трение в оси отсутствует.)

Дано: m_1, m_2, α, k; F — ?

Решение. Рассмотрим движение тел относительно наклонной плоскости. На тело массой m_1 действуют две силы: сила тяжести $\mathbf{F}_{т1}$ и сила натяжения нити $\mathbf{T}_1$. Основной закон динамики для него имеет вид

$$m_1\mathbf{a}_1 = m_1\mathbf{g} + \mathbf{T}_1. \tag{2.45}$$

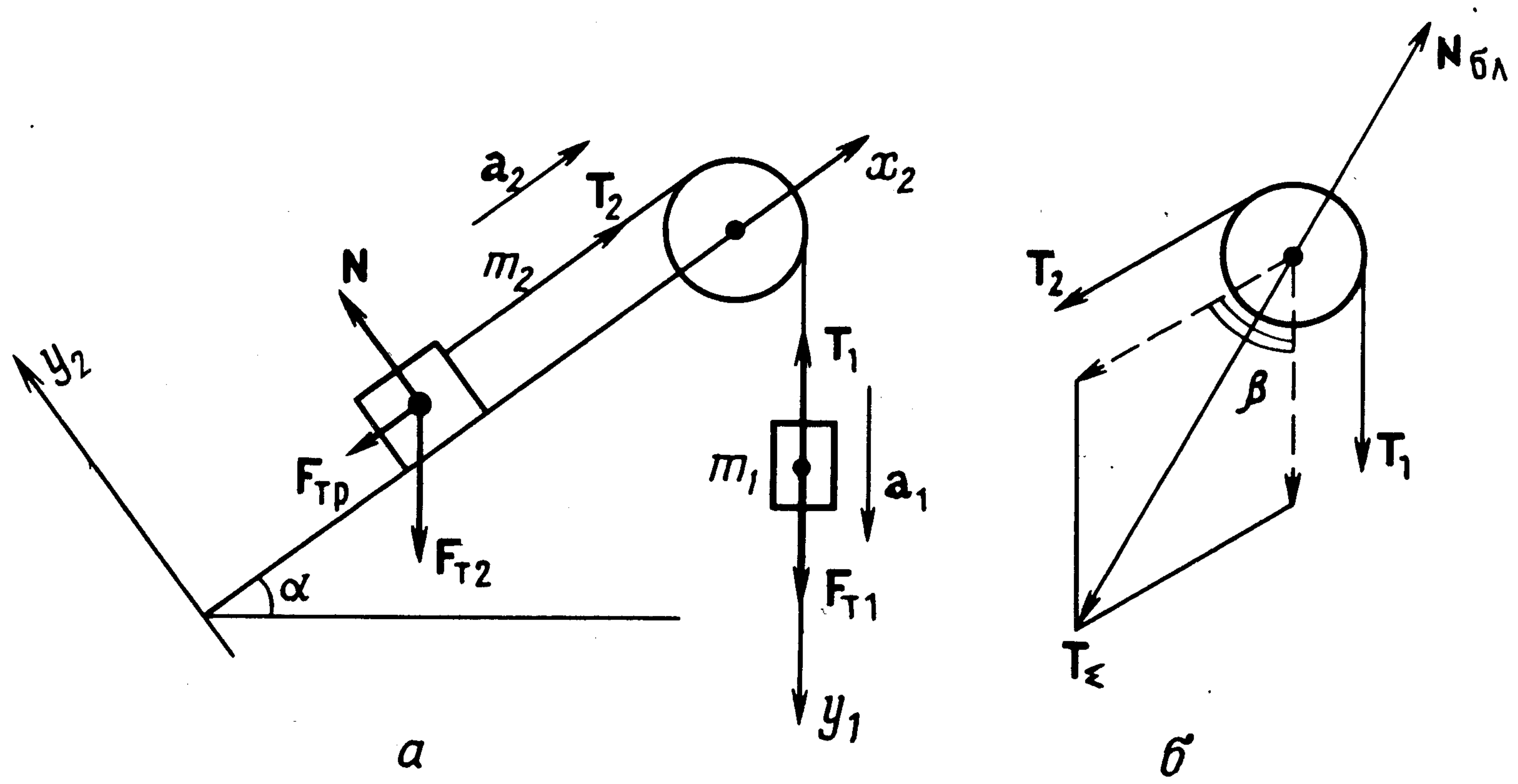


Рис. 2.18.

На тело m_2 действуют сила тяжести $\mathbf{F}_{т2} = m_2\mathbf{g}$, сила нормальной реакции $\mathbf{N}$, сила натяжения нити $\mathbf{T}_2$, сила трения $\mathbf{F}_{тр}$.

Чтобы определить, как направлена сила трения, нужно определить направление движения. Сила трения не может изменить направление движения на противоположное. Следовательно, надо определять направление движения в отсутствии силы трения. Очевидно, что если $m_1 g > m_2 g \sin\alpha$, то тело m_2 движется вверх, сила трения направлена вниз (рис. 2.18,*а*).

Основной закон динамики для тела массой m_2:

$$m_2\mathbf{a}_2 = m_2\mathbf{g} + \mathbf{T}_2 + \mathbf{N} + \mathbf{F}_{тр}. \tag{2.46}$$

В проекции на ось y_1 уравнение (2.45) имеет вид

$$m_1 a_1 = m_1 g - T_1. \tag{2.47}$$

В проекциях на оси x_2 и y_2 уравнение (2.46) запишется в виде

$$\begin{aligned} &\text{на ось } x_2 \quad m_2 a_2 = T_2 - m_2 g \sin\alpha - F_{тр}, \\ &\text{на ось } y_2 \quad 0 = N - m_2 g \cos\alpha, \end{aligned} \tag{2.48}$$

$$F_{тр} = kN = km_2 g \cos\alpha.$$

В силу нерастяжимости нити $a_1 = a_2 = a$.

Так как массы блока и нити равны нулю, то

$$T_1 = T_2 = T.$$

Тогда уравнения (2.47) и (2.48) запишутся в виде

$$m_1 a = m_1 g - T, \tag{2.49}$$

$$m_2 a = T - m_2 g \sin\alpha - km_2 g \cos\alpha. \tag{2.50}$$

Сложив уравнения (2.49) и (2.50), определим a:

$$a = \frac{m_1 - m_2 \sin\alpha - km_2 \cos\alpha}{m_1 + m_2} g. \tag{2.51}$$

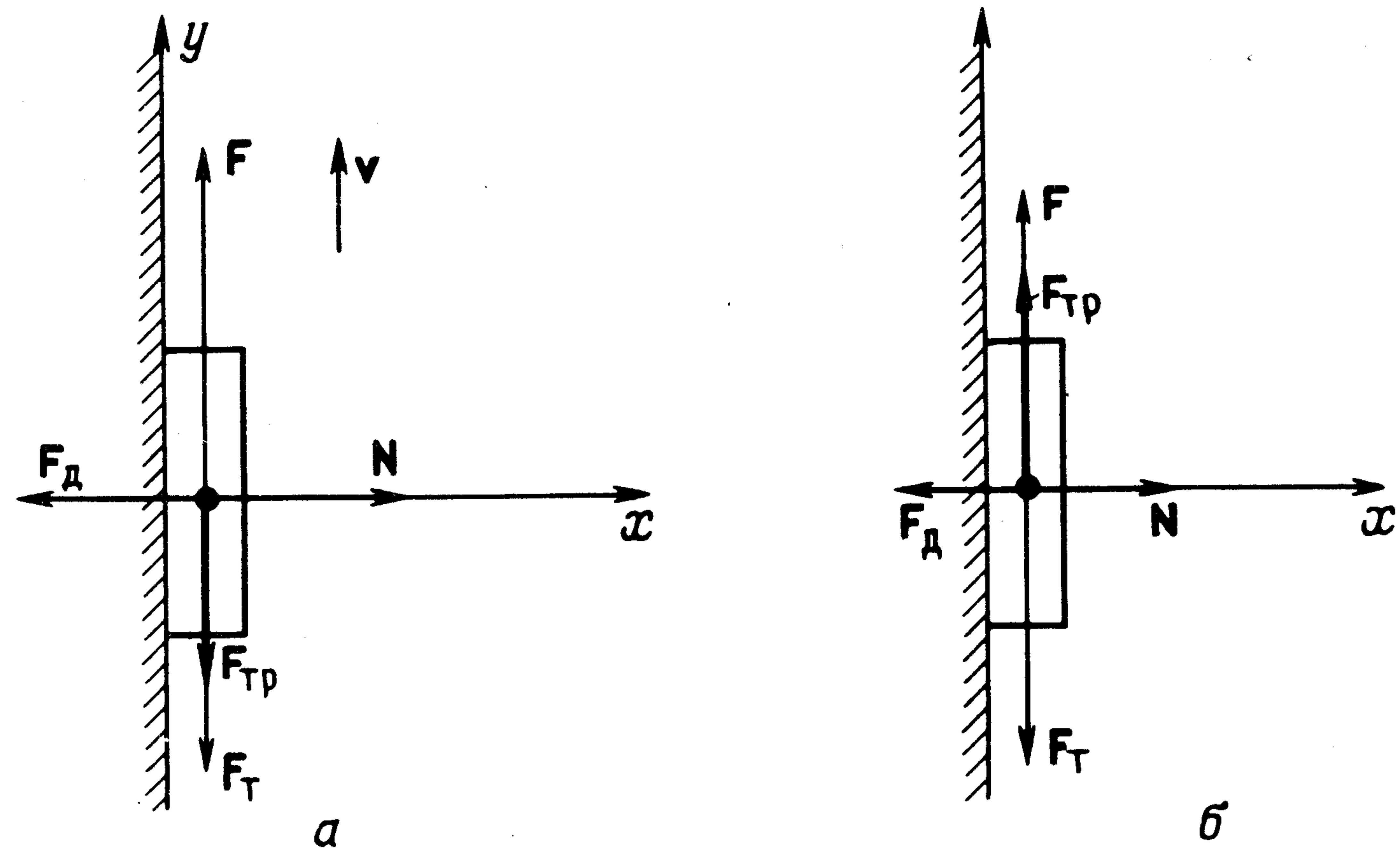


Рис. 2.19.

Подставив (2.51), например, в (2.49), определим T:

$$T = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}(1 + k\cos\alpha + \sin\alpha)g. \qquad (2.52)$$

По 2-му закону Ньютона $m_{бл}\mathbf{a}_{цт} = \mathbf{T}_1 + \mathbf{T}_2 + \mathbf{N}_{бл}$, где $m_{бл}$ — масса блока, $\mathbf{a}_{цт}$ — ускорение его центра тяжести, $\mathbf{T}_1$ и $\mathbf{T}_2$ — силы натяжения нити, $\mathbf{N}_{бл}$ — сила, действующая со стороны оси на блок (см. рис. 2.18,*б*). Масса блока равна нулю, откуда $\mathbf{N}_{бл} = -\mathbf{T}_\Sigma$, где сила $\mathbf{T}_\Sigma$ — равнодействующая сил натяжения, действующих на блок

$$T_\Sigma = 2T\cos\beta/2, \quad \beta = \pi/2 - \alpha.$$

Следовательно,

$$T_\Sigma = 2T\cos(\pi/4 - \alpha/2).$$

Отсюда

$$N_{бл} = 2T\cos(\pi/4 - \alpha/2) = 2\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}(1 + k\cos\alpha + \sin\alpha)\cos(\pi/4 - \alpha/2). \qquad (2.53)$$

Задача 9. Груз массой 30 кг придавливается к вертикальной стене силой $F_д = 100$ Н. Чему должна быть равна сила тяги F, чтобы груз равномерно двигался вертикально вверх? Определить значение минимальной силы F, которой можно удержать тело в покое. Коэффициент трения $k = 0,2$. Принять $g = 10 м/с^2$.

Дано: $m = 30$ кг; $F_д = 100$ Н, $k = 0,2$; F — ?

Решение. На тело действует пять сил: сила тяжести $\mathbf{F}_т = m\mathbf{g}$, сила давления $\mathbf{F}_д$, сила нормальной реакции $\mathbf{N}$, сила тяги $\mathbf{F}$, сила трения $\mathbf{F}_{тр}$.

Рассмотрим движение тела относительно стены. Выберем оси координат, как показано на рис. 2.19,*а*. Основной закон динамики для груза имеет вид:

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F} + \mathbf{F}_д + \mathbf{N} + \mathbf{F}_{тр} + \mathbf{F}_т. \qquad (2.54)$$

По условию задачи тело движется равномерно, поэтому $\mathbf{a} = 0$.

При движении тела вверх сила трения направлена вниз и проекция ее на ось y отрицательна. Уравнение (2.54) в проекциях

$$\text{на ось } x \quad 0 = N - F_{\text{д}}, \tag{2.55}$$

$$\text{на ось } y \quad 0 = F - mg - F_{\text{тр}} \quad (a = 0), \tag{2.56}$$

$$F_{\text{тр}} = kN. \tag{2.57}$$

Учитывая (2.55) и (2.57) получим для F,

$$F = mg + kF_{\text{д}},$$

$$F = (30 \cdot 10 + 0,2 \cdot 100)\,\text{Н} = 320\,\text{Н}. \tag{2.58}$$

Согласно первому закону Ньютона, при этом значении силы F тело также может оставаться в покое относительно вертикальной стены. Однако в этом случае сила F не будет минимальной.

Сила тяги может быть уменьшена, если предположить, что тело стремится двигаться вниз и его удерживают в покое две силы, направленные вверх, — сила тяги и сила трения (рис. 2.19,*б*). В этом случае основной закон динамики также запишется в виде (2.54), так как на тело действуют те же пять сил.

В проекциях же на оси координат уравнение (2.54) будет иметь вид:

$$\text{на ось } x \quad 0 = N - F_{\text{д}},$$

$$\text{на ось } y \quad 0 = F + F_{\text{тр}} - mg. \tag{2.59}$$

Используя выражение (2.57) для $F_{\text{тр}}$, получим

$$F = mg - kF_{\text{д}}, \tag{2.60}$$

$$F = (30 \cdot 10 - 0,2 \cdot 100)\,\text{Н} = 280\,\text{Н}.$$

Выражение (2.60) дает минимальное значение силы F, так как значение силы трения покоя было взято максимальным (формула (2.57)). При увеличении силы F, если тело остается в покое, то значение силы трения уменьшается до нуля (сила трения покоя). В этом случае $mg = F$. При увеличении F сила трения покоя будет направлена так же, как и сила тяжести, достигая максимального значения (2.57). Дальнейшее увеличение F приводит к ускоренному движению тела.

Задача 10. На гладком горизонтальном столе лежит доска массой $M = 2$ кг, на которой находится брусок массой $m = 1$ кг. Тела соединены легкой нитью, перекинутой через блок, масса которого равна нулю. Какую силу F нужно приложить к доске, чтобы она начала двигаться от блока с постоянным ускорением $a = 0,5g$? Коэффициент трения между телами $k = 0,5$ (рис. 2.20). Трением между доской и столом пренебречь. Считать $g = 10\,\text{м/с}^2$.

Дано: $M = 2\,\text{кг}$, $m = 1\,\text{кг}$, $a = 0,5g$, $k = 0,5$; F — ?

Решение. На брусок действуют четыре силы: сила тяжести $\mathbf{F}_{\text{т1}} = m\mathbf{g}$, сила нормальной реакции $\mathbf{N}_1$, сила натяжения нити $\mathbf{T}_1$ и сила трения $\mathbf{F}_{\text{тр1}}$. На доску действуют шесть сил: сила тяжести $\mathbf{F}_{\text{т2}} = M\mathbf{g}$, сила $\mathbf{F}$, сила трения $\mathbf{F}_{\text{тр2}}$ со стороны бруска, сила давления со стороны бруска $\mathbf{F}_{\text{д}} = -\mathbf{N}_1$, сила нормальной реакции $\mathbf{N}_0$, сила натяжения нити $\mathbf{T}_2$. Запишем основной закон динамики для каждого из тел:

$$m\mathbf{a}_1 = \mathbf{N}_1 + \mathbf{F}_{\text{тр1}} + \mathbf{F}_{\text{т1}} + \mathbf{T}_1. \tag{2.61}$$

$$M\mathbf{a} = \mathbf{F}_{\text{т2}} + \mathbf{N}_0 + \mathbf{F}_{\text{д}} + \mathbf{T}_2 + \mathbf{F}_{\text{тр2}} + \mathbf{F}. \tag{2.62}$$

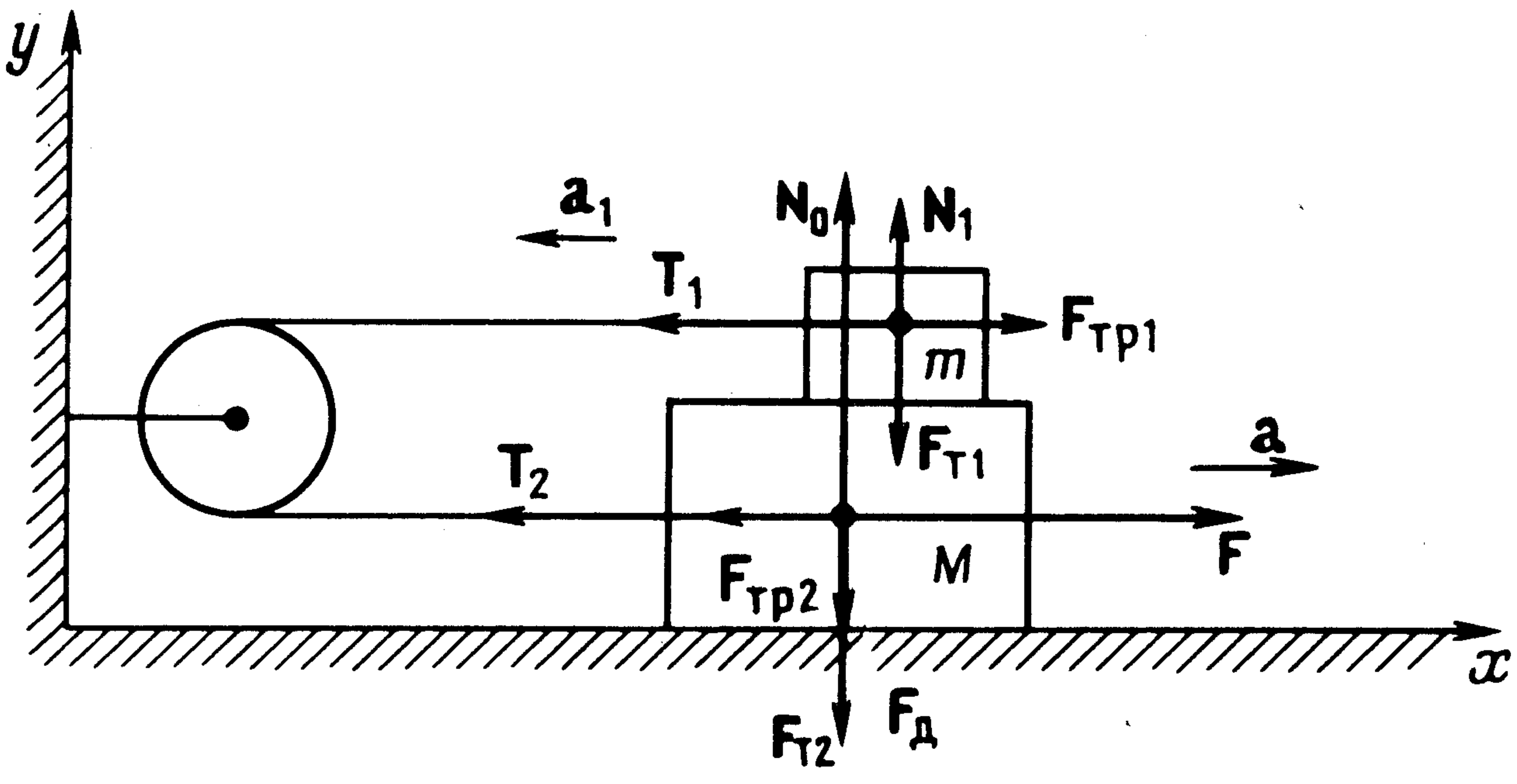


Рис. 2.20.

Запишем уравнения (2.61) и (2.62) в проекциях на оси координат:

$$\begin{aligned} &\text{на ось } x \quad && -ma_1 = -T_1 + F_{\text{тр}1}, \\ &\text{на ось } y \quad && 0 = N_1 - mg, \\ & && F_{\text{тр}1} = kN_1, \end{aligned} \tag{2.61а}$$

$$\begin{aligned} &\text{на ось } x \quad && Ma = -T_2 - F_{\text{тр}2} + F, \\ &\text{на ось } y \quad && 0 = N_0 - F_\text{д} - Mg. \end{aligned} \tag{2.62а}$$

По третьему закону Ньютона $T_1 = T_2$ и $F_{\text{тр}1} = F_{\text{тр}2}$, а вследствие нерастяжимости нити $a = a_1$. Решая совместно уравнения

$$Ma = -T - F_\text{тр} + F,$$
$$-ma = -T + F_\text{тр},$$

получим

$$(M + m)a = F - 2F_\text{тр} = F - 2kmg, \tag{2.63}$$

откуда

$$F = 2kmg + (M + m)a,$$
$$[F] = (\text{кг} \cdot \text{м/с}^2) + (\text{кг} \cdot \text{м/с}^2) = \text{Н}.$$
$$F = 25\,\text{Н}.$$

Заметим, что относительно доски брусок движется с ускорением $2a$.

Задача 11. Тело массы m, движущееся с ускорением a, прикреплено к двум соединенным последовательно пружинам жесткости k_1 и k_2. Каково суммарное удлинение пружин $x_1 + x_2$? (Колебаний нет, массами пружин пренебречь.) Коэффициент трения $k_\text{тр}$ (рис. 2.21).

Дано: m, F, $k_\text{тр}$, k_1, k_2; $(x_1 + x_2)$ — ?

Решение. На тело действуют четыре силы: сила тяжести $\mathbf{F}_\text{т}$, сила трения $\mathbf{F}_\text{тр}$, сила нормальной реакции $\mathbf{N}$, сила натяжения первой пружины $\mathbf{F}_{\text{н}1}$. Основной закон динамики для тела массой m запишется в виде

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F}_{\text{н}1} + \mathbf{F}_\text{тр} + m\mathbf{g} + \mathbf{N}. \tag{2.64}$$

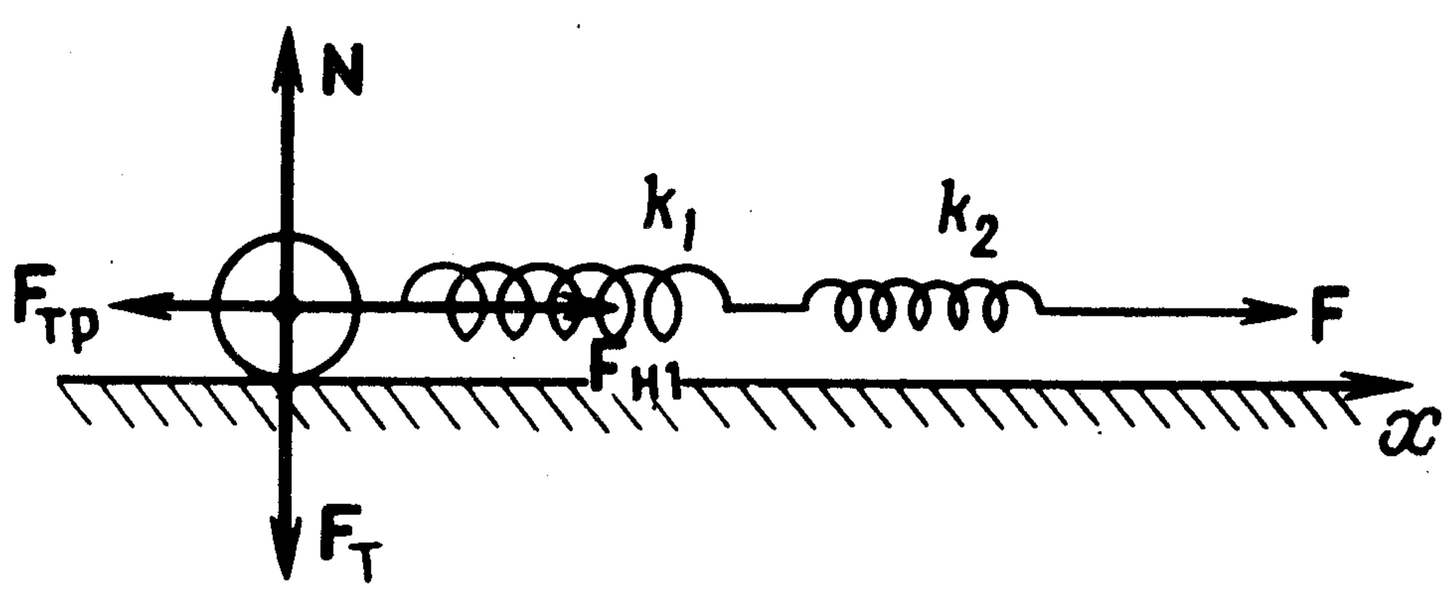


Рис. 2.21.

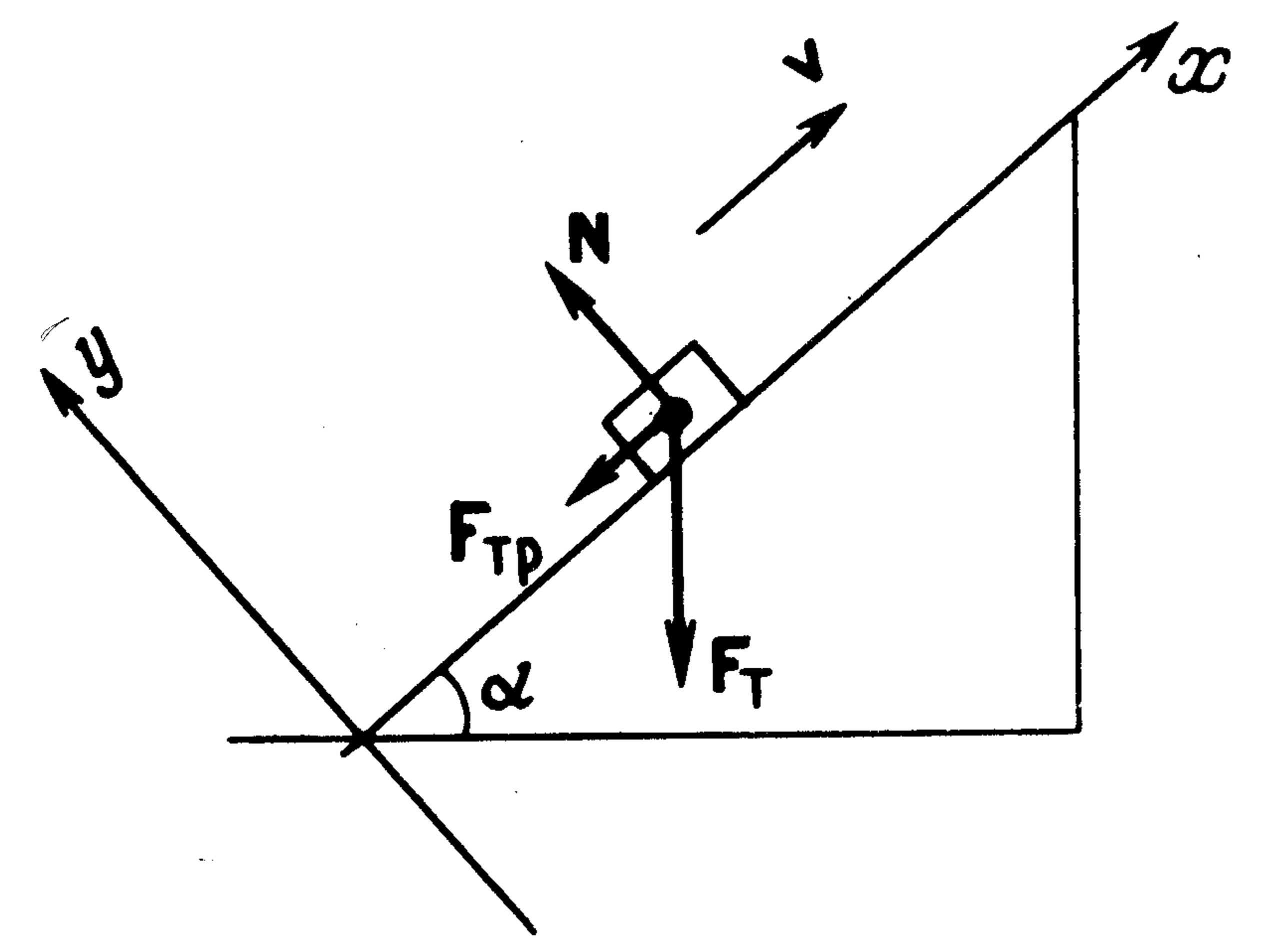


Рис. 2.22.

Поскольку ось x направлена вдоль плоскости, по которой движется тело, то уравнение (2.64) в проекции на эту ось имеет вид

$$ma = F_{н1} - k_{тр}mg. \tag{2.65}$$

Сила натяжения первой пружины есть $F_{н1} = m(a + k_{тр}g)$. Отсюда в силу $F_{н1} = kx_1$ имеем

$$x_1 = m(a + k_{тр}g)/k_1. \tag{2.66}$$

По условию задачи массами пружин пренебрегаем, поэтому сила натяжения второй пружины $F_{н2}$ равна силе натяжения первой пружины $F_{н1}$. Если бы силы натяжения не были равны, то это вызвало бы дальнейшую деформацию одной из пружин, здесь же рассматривается движение, начиная с момента, когда пружины уже больше не деформируются: $F_{н1} = F_{н2}$, откуда

$$x_2 = m(a + k_{тр}g)/k_2. \tag{2.67}$$

Следовательно, суммарное удлинение равно

$$x = x_1 + x_2 = m(a + k_{тр}g)\left(\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}\right),$$

и окончательно

$$x = \frac{m(a + k_{тр}g)(k_1 + k_2)}{k_1 k_2}. \tag{2.68}$$

Задача 12. Через какое время скорость тела, которому была сообщена скорость v_0, направленная вверх по наклонной плоскости, снова будет равна v_0? Коэффициент трения k, угол наклона плоскости к горизонту α. Тело начинает двигаться со скоростью v_0, находясь посередине наклонной плоскости.

Дано: v_0, α, k; t — ?

Решение. Скорость тела снова станет равной v_0, когда тело будет спускаться по наклонной плоскости. На тело действуют три силы: сила тяжести $\mathbf{F}_т$, сила нормальной реакции $\mathbf{N}$, сила трения $\mathbf{F}_{тр}$ (рис. 2.22).

Рассмотрим движение тела относительно наклонной плоскости. Направим ось x вдоль плоскости, ось y перпендикулярно ей.

Основной закон динамики для тела запишется:

$$m\mathbf{a} = m\mathbf{g} + \mathbf{N} + \mathbf{F}_{тр}. \tag{2.69}$$

Когда тело движется вверх, сила трения направлена в сторону, противоположную направлению оси x. Отметим, что ускорение в этом случае направлено в сторону, противоположную скорости. В проекциях на оси координат уравнение (2.69) имеет вид:

$$\text{на ось } x \qquad -ma_1 = -mg\sin\alpha - F_{\text{тр}}, \tag{2.70}$$

$$\text{на ось } y \qquad 0 = N - mg\cos\alpha, \tag{2.71}$$

$$F_{\text{тр}} = kN = kmg\cos\alpha,$$

откуда

$$a_1 = g(\sin\alpha + k\cos\alpha). \tag{2.72}$$

В наивысшей точке подъема $v = 0$:

$$v = v_0 - a_1 t_1 = 0,$$

где t_1 — промежуток времени, в течение которого тело поднимается по плоскости:

$$t_1 = \frac{v_0}{a_1} = \frac{v_0}{g(\sin\alpha + k\cos\alpha)}. \tag{2.73}$$

Когда тело скользит вниз, сила трения изменяет направление, и в проекции на ось x основной закон динамики запишется в виде

$$-ma_2 = -mg\sin\alpha + kmg\cos\alpha,$$

$$a_2 = g(\sin\alpha - k\cos\alpha). \tag{2.74}$$

Скорость тела изменяется по закону $v = a_2 t$. Тело будет иметь скорость v_0 через промежуток времени t_2:

$$t_2 = \frac{v_0}{a_2} = \frac{v_0}{g(\sin\alpha - k\cos\alpha)}. \tag{2.75}$$

Окончательно, $t = t_1 + t_2$

$$t = \frac{2v_0\sin\alpha}{g(\sin^2\alpha - k^2\cos^2\alpha)}. \tag{2.76}$$

Задача 13. На наклонной плоскости с углом наклона α неподвижно лежит тело. Коэффициент трения между телом и плоскостью равен k. Наклонная плоскость начинает двигаться по столу с ускорением $\mathbf{a}$ в направлении, указанном стрелкой (рис. 2.23). При каком значении этого ускорения тело начнет соскальзывать?

Дано: k_1, α; a — ?

Решение. Тело находилось в покое на наклонной плоскости, следовательно, $k_{\text{тр}} \geq \operatorname{tg}\alpha$. Когда плоскость начинает двигаться, изменяется сила давления тела на стол и соответственно сила нормальной реакции, уменьшается сила трения и тело может начать скользить вдоль наклонной плоскости. Рассмотрим движение тела относительно стола (инерциальная система отсчета). Ускорение тела относительно этой системы отсчета $\mathbf{a}$ равно

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_0 + \mathbf{a}',$$

где $\mathbf{a}'$ — ускорение тела относительно плоскости, $\mathbf{a}_0$ — ускорение плоскости относительно стола. Если скольжения тела нет, то $\mathbf{a} = \mathbf{a}_0$. Выберем оси координат, как показано на рис. 2.23. Проекции ускорения тела на оси x и y равны

$$a_x = a' - a_0\cos\alpha, \quad a_y = -a_0\sin\alpha.$$

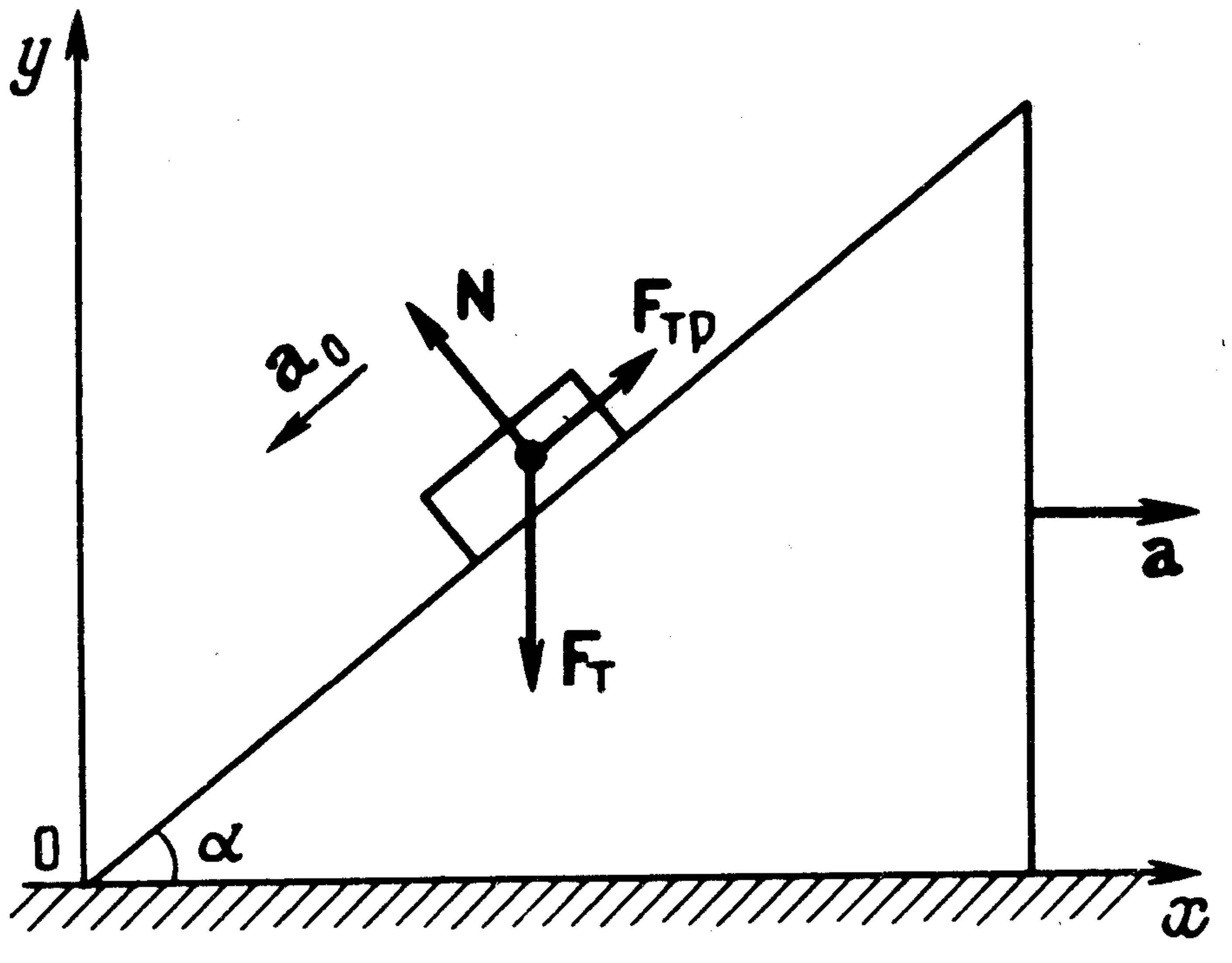


Рис. 2.23.

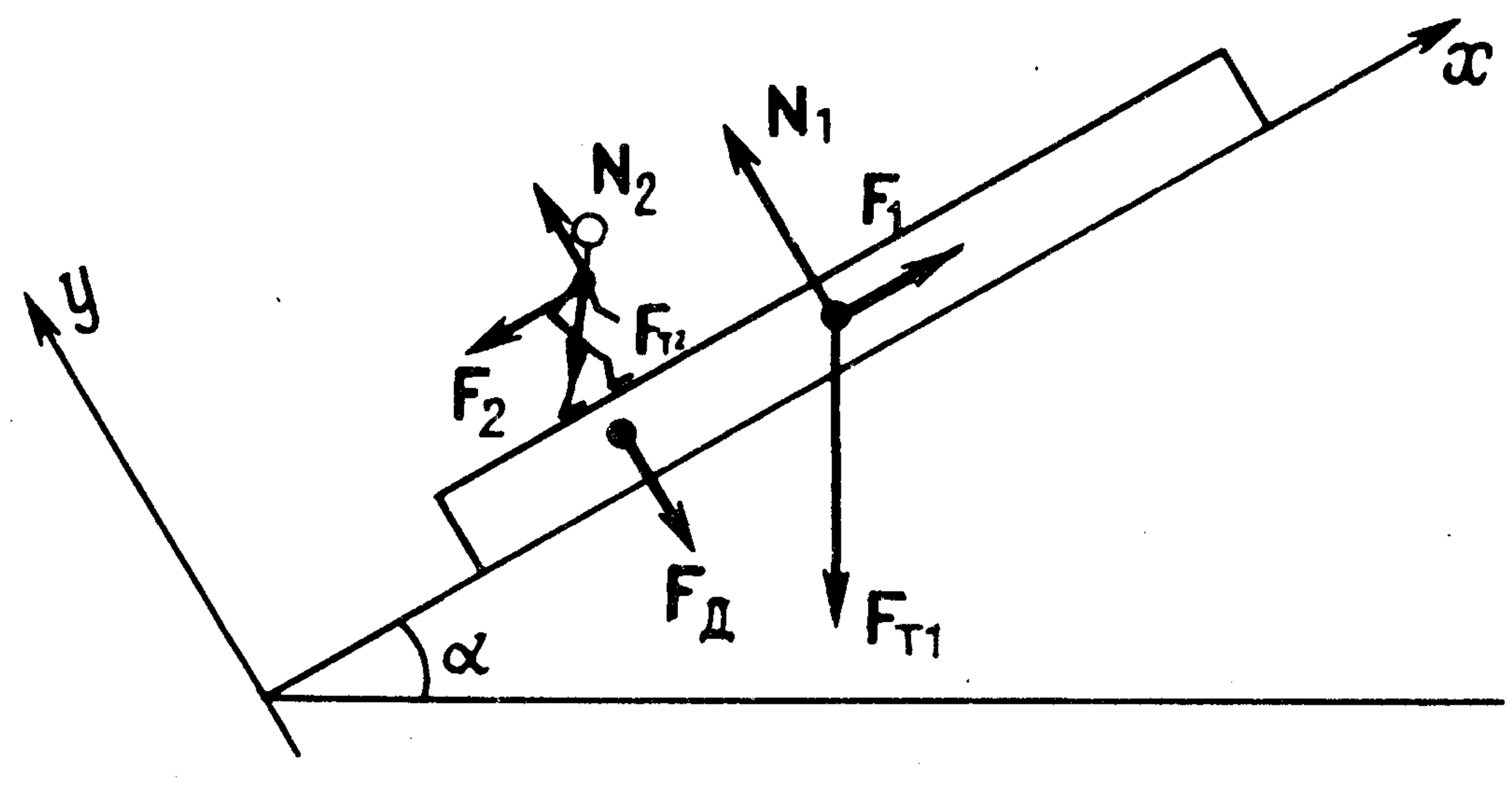


Рис. 2.24.

На тело действуют три силы: сила тяжести $\mathbf{F}_т = m\mathbf{g}$, сила нормальной реакции $\mathbf{N}$ и сила трения $\mathbf{F}_{тр}$. Основной закон динамики для тела имеет вид

$$m\mathbf{a} = m\mathbf{g} + \mathbf{N} + \mathbf{F}_{тр}. \tag{2.77}$$

В проекциях на оси координат уравнение (2.77) запишется $(a' = 0)$:

$$\text{на ось } x \quad -ma_0 \cos\alpha = mg\sin\alpha - F_{тр}, \tag{2.78}$$

$$\text{на ось } y \quad -ma_0 \sin\alpha = N - mg\cos\alpha. \tag{2.79}$$

Из уравнения (2.79) следует, что сила нормальной реакции зависит от a_0, что ясно и из физических соображений. При увеличении a_0 сила нормальной реакции убывает. Сила трения из (2.78) равна

$$F_{тр} = m(g\sin\alpha + a_0\cos\alpha). \tag{2.80}$$

Чем меньше a_0, тем меньше должна быть сила трения, удерживающая тело неподвижным на наклонной плоскости.

Максимальное значение силы трения дается выражением $F_{тр} = k_{тр}N$, отсюда можно определить $a_{0\max}$, при котором тело еще будет оставаться неподвижным на плоскости:

$$a_{0\max} = \frac{k_{тр} - \mathrm{tg}\alpha}{1 + k_{тр}\mathrm{tg}\alpha}, \tag{2.81}$$

следовательно, при $a < a_{0\max}$ тело неподвижно относительно наклонной плоскости и движется с ускорением a_0 относительно стола, при $a > a_{0\max}$ тело начинает соскальзывать.

Задача 14. На наклонной плоскости, составляющей угол α с горизонтом, лежит доска. С каким ускорением и в каком направлении должен бежать по доске человек, чтобы доска оставалась неподвижной на плоскости? Массы человека и доски m и M, соответственно, трением доски о плоскость пренебречь (рис. 2.24).

Дано: m, M, α, k; a — ?

Решение. Человек при ходьбе отталкивается от доски, действуя на нее силой $\mathbf{F}_1$. На доску действуют четыре силы: сила тяжести $\mathbf{F}_{т1} = M\mathbf{g}$, сила нормальной реакции $\mathbf{N}_1$, сила давления человека на доску $\mathbf{F}_д$ и сила трения $\mathbf{F}_1$ со стороны человека. (Именно благодаря этой внешней силе человек может двигаться; при отсутствии силы трения, под действием только внутренних сил центр тяжести человека не будет перемещаться.) Сила $\mathbf{F}_1$ компенсирует составляющую силы тяжести, направленную вниз вдоль наклонной плоскости. Условие равновесия доски запишется в виде

$$0 = \mathbf{F}_{\text{т}1} + \mathbf{N}_1 + \mathbf{F}_{\text{д}} + \mathbf{F}_1. \tag{2.82}$$

На человека действуют сила тяжести $\mathbf{F}_{\text{т}2} = m\mathbf{g}$, сила нормальной реакции $\mathbf{N}_2$, сила трения со стороны доски $\mathbf{F}_2$, направленная вниз (по 3-му закону Ньютона), $\mathbf{F}_2 = -\mathbf{F}_1$. Основной закон динамики для человека имеет вид

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F}_2 + m\mathbf{g} + \mathbf{N}_2. \tag{2.83}$$

Выберем оси x и y, как показано на рис. 2.24.

В проекциях на оси координат уравнение (2.82) запишется в виде:

$$\text{на ось } x \quad 0 = F_1 - Mg\sin\alpha, \tag{2.84}$$

$$\text{на ось } y \quad 0 = N_1 - F_{\text{д}} - Mg\cos\alpha, \tag{2.85}$$

а уравнение (2.83) в виде

$$\text{на ось } x \quad ma = -mg\sin\alpha - F_2, \tag{2.86}$$

$$\text{на ось } y \quad 0 = N_2 - mg\cos\alpha. \tag{2.87}$$

По 3-му закону Ньютона $F_1 = F_2$. Из уравнения (2.84) следует: $F_1 = Mg\sin\alpha$. Подставив $F_2 = F_1$ в (2.86), получим

$$ma = -mg\sin\alpha - Mg\sin\alpha,$$

откуда окончательно искомое ускорение a определится выражением

$$a = -\frac{M+m}{m}g\sin\alpha.$$

Ускорение человека должно быть направлено вниз по наклонной плоскости. Однако направление ускорения не указывает направления движения. Если человек бежит вверх, то он должен бежать равнозамедленно, если вниз, то равноускоренно.

Задачи для самостоятельного решения

Задача 1. Тело массой 200 кг равномерно тянут с силой 1500 Н вверх по наклонной плоскости с углом наклона 30°. С каким ускорением тело будет соскальзывать с наклонной плоскости, если его отпустить?

Ответ: $2{,}5\,\text{м/с}^2$.

Задача 2. В устройстве, показанном на рис. 2.25, груз m_1 скользит без трения по наклонной плоскости с углом наклона $\alpha = 30°$, m_1=400 г, m_2=220 г. Найти ускорение грузов.

Ответ: $a_1 = 2\text{м/с}^2$, $a_2 = 1\text{м/с}^2$.

Задача 3. Два бруска массой M=0,2 кг каждый поместили на наклонную плоскость с углом $\alpha = 45°$, как показано на рис. 2.26. Коэффициент трения нижнего бруска о наклонную плоскость $k_1 = 1$, верхнего $k_2 = 0,1$. Определить силу взаимодействия брусков при их совместном соскальзывании с наклонной плоскости.

Ответ: 0,63 Н.

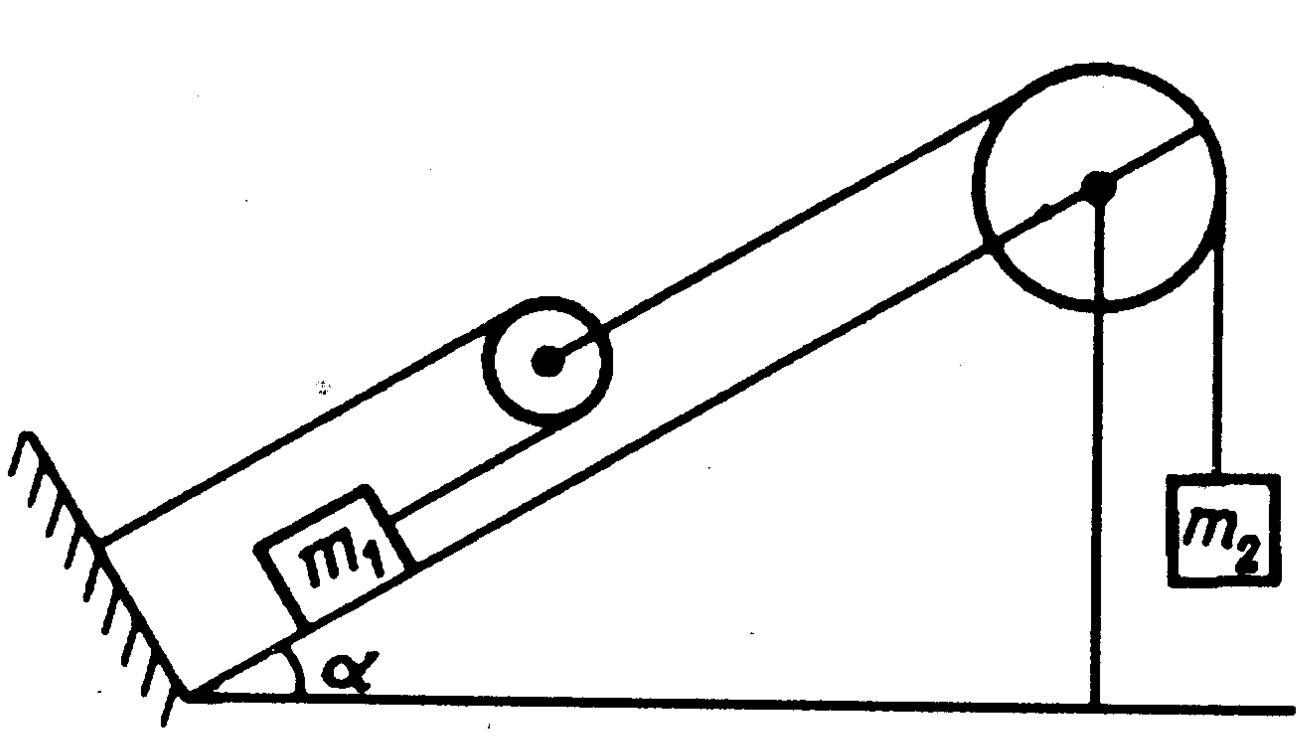


Рис. 2.25.

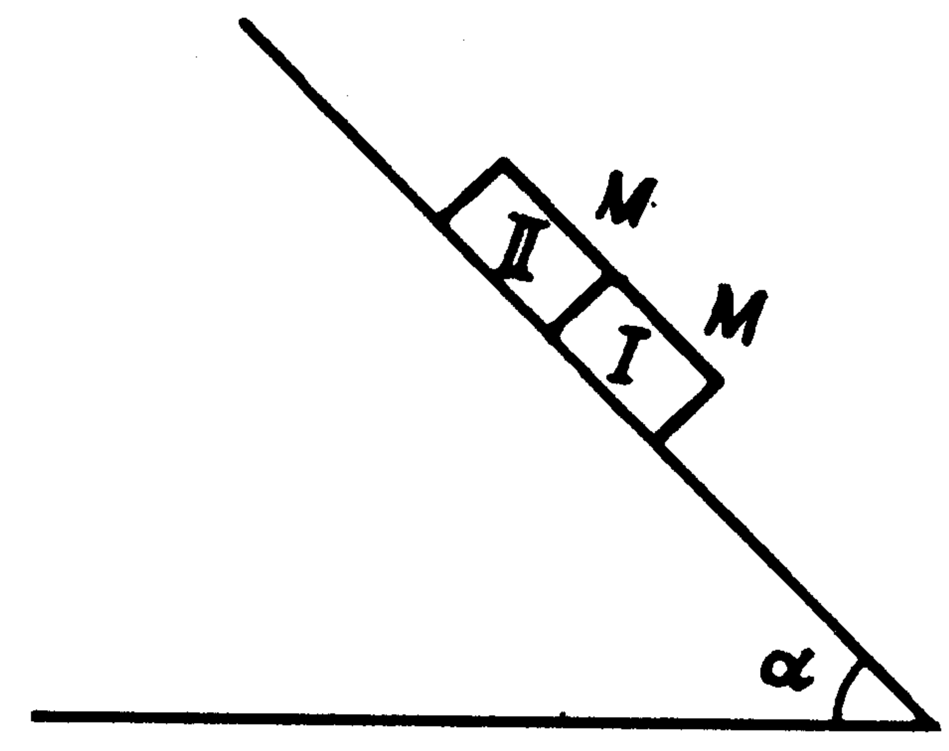


Рис. 2.26.

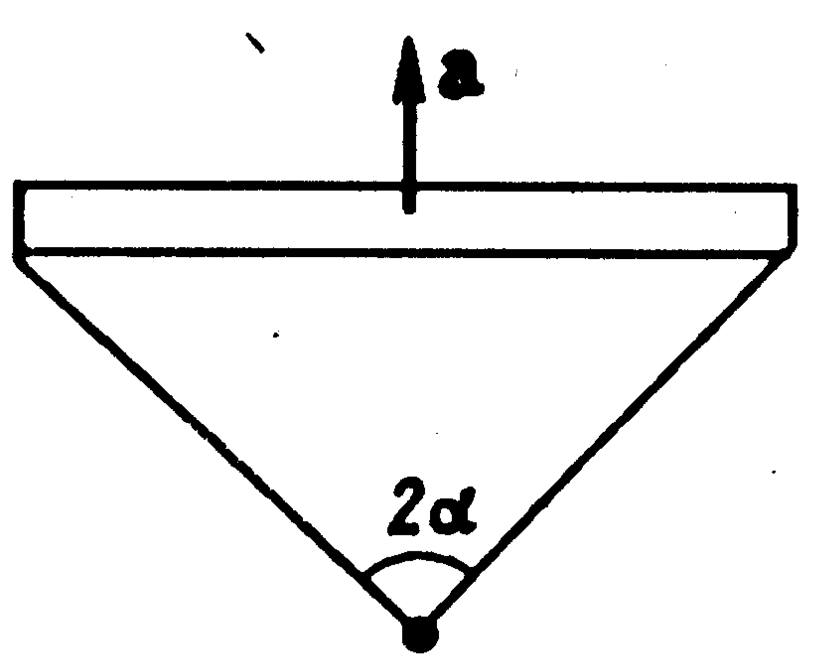


Рис. 2.27.

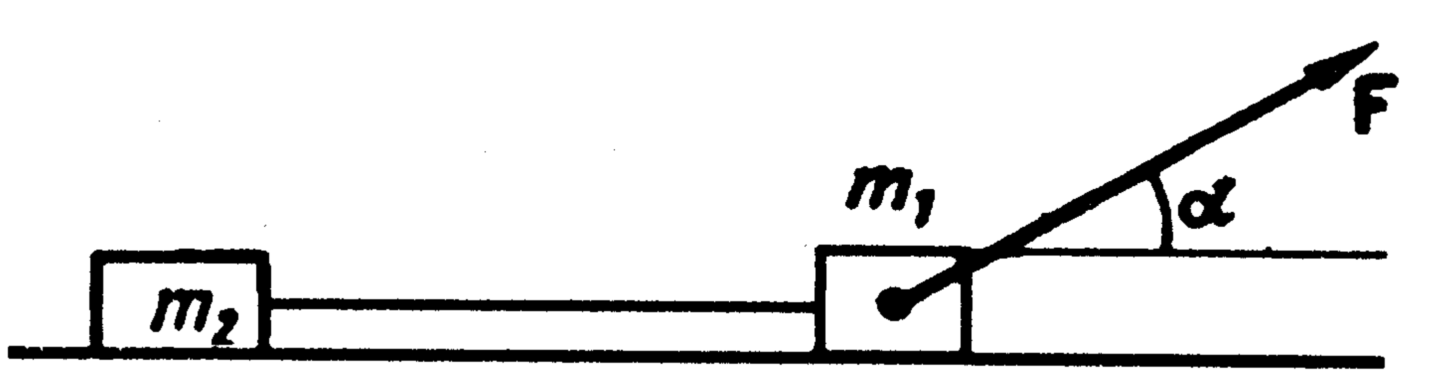


Рис. 2.28.

Задача 4. Два тела, связанные нитью, движутся по гладкому горизонтальному столу. Когда сила 100 Н была приложена к правому телу, сила натяжения нити была равна 30 Н. Какова будет сила натяжения нити, если приложить эту силу к левому телу?

Ответ: 70 Н.

Задача 5. Шарик массой m прикреплен двумя нитями к доске (рис. 2.27). Каким будет натяжение каждой нити, если доска станет двигаться вверх с ускорением a?

Ответ: $T = m(g + a)/2\cos\alpha$.

Задача 6. На столе лежат два бруска, связанные нитью. На брусок 1 действует сила 20 Н под углом $\alpha = 30^\circ$ к горизонту. Коэффициент трения брусков о стол $k = 0,1$, массы брусков $m_1 = 4$ кг и $m_2 = 2$ кг. Определить ускорение, с которым движутся тела, а также силу натяжения нити (рис. 2.28).

Ответ: $a = 1,8\,\text{м/с}^2$, $T = 11,3\,\text{Н}$.

Задача 7. На наклонной плоскости находится тело массой m, на которое действует горизонтально направленная сила $\mathbf{F}$ (рис. 2.29). Определить ускорение тела $\mathbf{a}$ и силу, с которой оно давит на плоскость, $F_д$. Коэффициент трения тела о плоскость равен k, наклонная плоскость составляет с горизонтом угол α.

Ответ: $a = [F(\cos\alpha + k\sin\alpha) + mg(\sin\alpha - k\cos\alpha)]/m$; $F_д = mg\cos\alpha - F\sin\alpha$.

Задача 8. Поезд, подъезжая к станции со скоростью v=72 км/ч, начинает равномерно тормозить. Каково время торможения поезда до полной остановки, безопасное для пассажиров (пассажиры не падают с полок)? Коэффициент трения о полки $k = 0,2$.

Ответ: $t = v/kg = 10$ с.

Задача 9. Две гири связаны нерастяжимой нитью, перекинутой через блок. Разность их высот равна 2 м. Предоставленные самим себе, гири через 2 с после

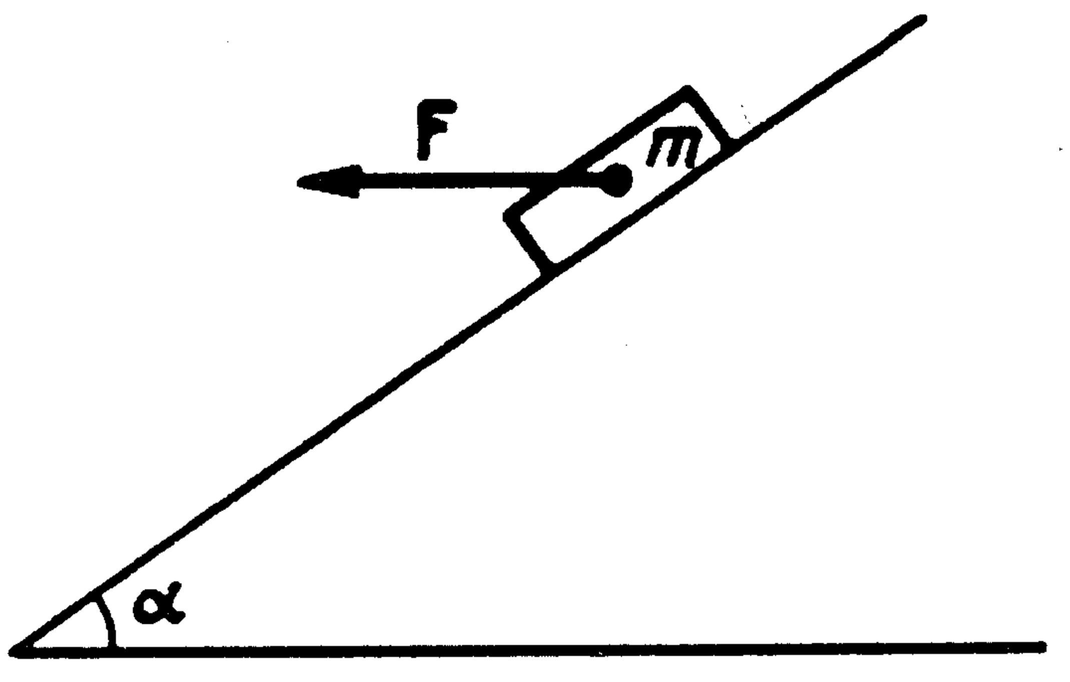


Рис. 2.29.

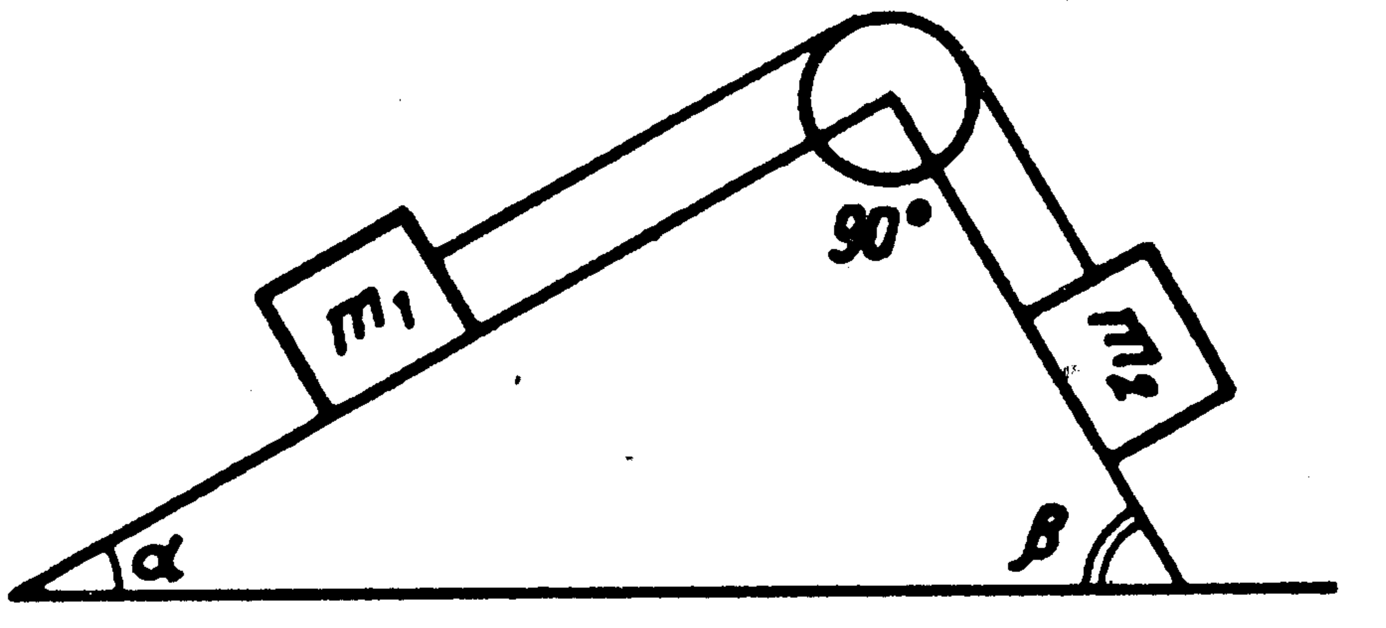


Рис. 2.30.

начала движения оказались на одной высоте. Какова масса более легкой гири, если масса другой гири 0,2 кг? Масса блока равна нулю.

Ответ: $m_1 = 0,183$ кг.

Задача 10. Через блок перекинута нить, к которой привязаны два груза одинаковой массы. Грузы лежат на плоскостях клина, расположенных под углами α и β к горизонту; $\alpha = 30°$, $\beta = 60°$ (рис. 2.30). Коэффициент трения грузов о плоскости равен $k = 0,1$. Определить ускорения тел.

Ответ: $a = (g/2)[(\sin\beta - \sin\alpha) - k(\cos\alpha + \cos\beta)]$, $a = 1,15 \text{м/с}^2$.

Задача 11. На доске массой m_2 лежит тело массой m_1, к которому привязана нить, перекинутая через блок (масса блока равна нулю). Ко второму концу нити привязан груз M (рис. 2.31). Коэффициент трения между доской и телом k_1, коэффициент трения между доской и столом k_2. При какой максимальной массе груза тело не соскользнет с доски?

Ответ:

$$M = \frac{m_1(k_1 - k_2)(m_1 + m_2)}{m_2(1 + k_2) - m_1(k_1 + k_2)}.$$

Задача 12. Груз массой 4 кг подвешен на пружине, коэффициент упругости которой $k = 1000$ Н/м. Определить, какую дополнительную деформацию пружины Δx вызовет движение точки подвеса пружины вверх с ускорением 2м/с^2; вниз с тем же ускорением. (Принять $g = 10 \text{м/с}^2$.)

Ответ: $\Delta x_1 = 0,008$ м, $\Delta x_2 = 0,008$ м.

Задача 13. Через блок, масса которого равна нулю, перекинут шнурок. На одном конце шнурка привязан груз массой m_1, по другому скользит кольцо массой m_2 с постоянным относительно шнурка ускорением a_2. Найти ускорение груза m_1 и силу трения кольца о шнурок. Массой шнурка пренебречь и считать, что груз m_1 опускается.

Ответ:

$$a_{y1} = \frac{m_1 g - m_2(g - a_2)}{m_1 + m_2}, \qquad F_{\text{тр}} = \frac{m_1 m_2(2g - a_2)}{m_1 + m_2}.$$

Задача 14. По канатной железной дороге с наклоном 30° к горизонту спускается вагонетка массой 500 кг. Какую силу надо приложить к канату, чтобы вдвое снизить скорость вагонетки на пути 10 м, если перед торможением она имела скорость 4 м/с? Коэффициент трения $k = 0,1$.

Ответ: 1770 Н.

Задача 15. От поезда, идущего по горизонтальному участку пути с постоянной скоростью v_0, отделяется 1/3 состава. Сила тяги при этом остается неизменной. В некоторый момент времени скорость отделившихся вагонов уменьшилась в два

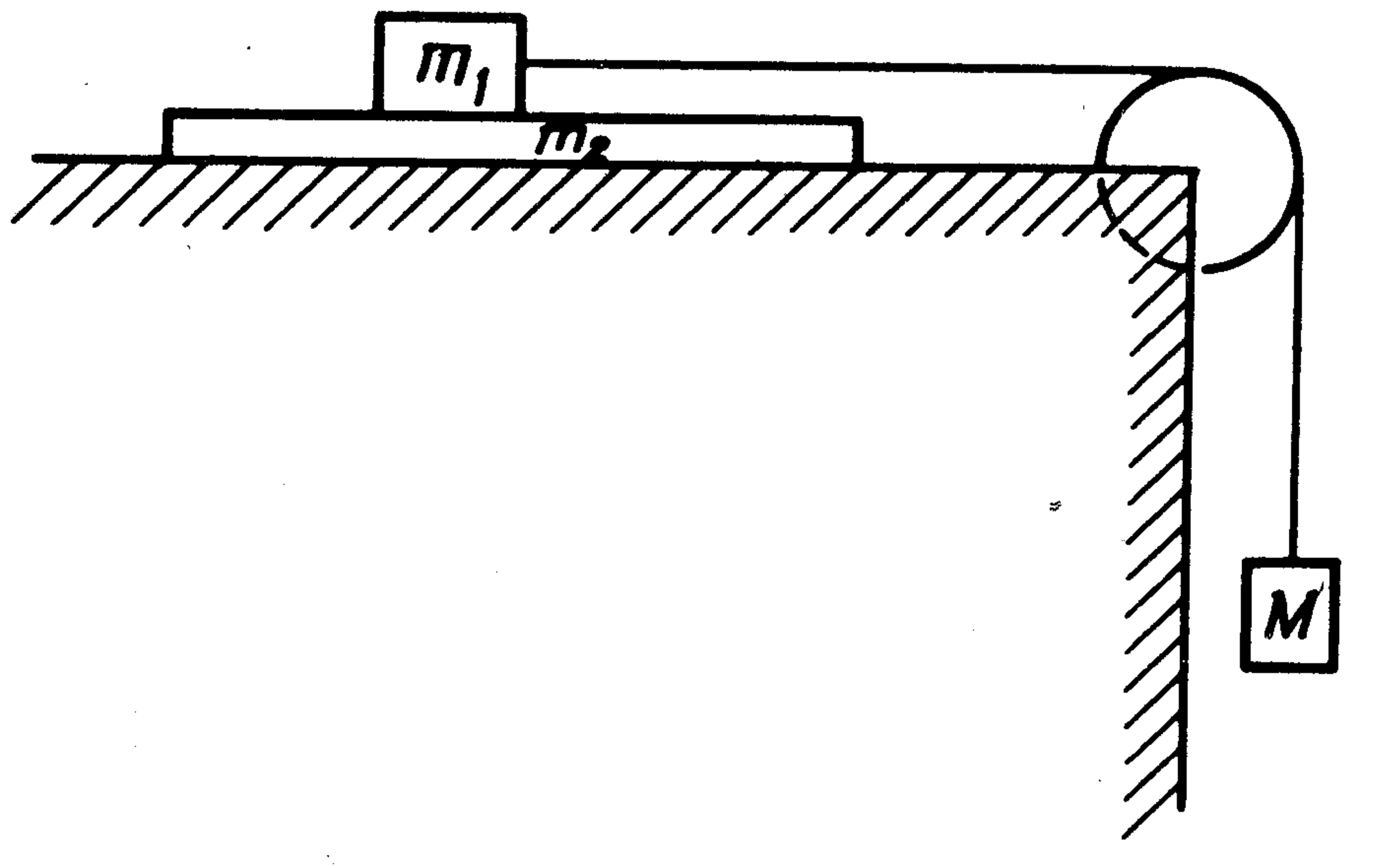


Рис. 2.31.

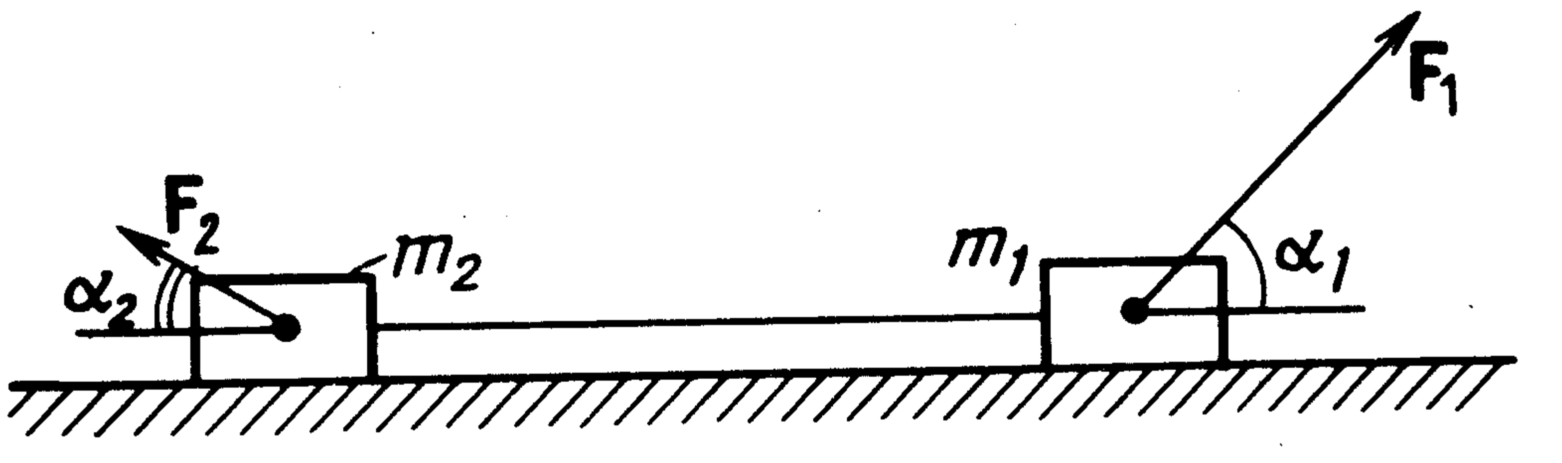


Рис. 2.32.

раза. Определите скорость головной части поезда в этот момент. Сила трения пропорциональна силе тяжести и не зависит от скорости.

Ответ: $v = (5/4)v_0$.

Задача 16. На два бруска массами m_1 и m_2, связанных нерастяжимой нитью, действуют силы F_1 и F_2 под углами α_1 и α_2 к горизонту соответственно (рис. 2.32). Найти ускорение системы, если коэффициент трения между брусками и горизонтальной плоскостью равен k.

Ответ:

$$a = \frac{F_1 \cos \alpha_1 - F_2 \cos \alpha_2 - k[(m_1 + m_2)g - F_1 \sin \alpha_1 - F_2 \sin \alpha_2]}{m_1 + m_2}.$$

Глава 3

Импульс тела. Закон сохранения импульса

Импульс тела (количество движения) $\mathbf{p}$ — физическая величина, равная произведению массы тела на его скорость:

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v}. \tag{3.1}$$

Импульс силы — физическая величина, равная произведению силы на промежуток времени, в течение которого эта сила действует, $\mathbf{F}\Delta t$. 2-й закон Ньютона может быть сформулирован следующим образом:

Изменение импульса тела равно импульсу подействовавшей на него силы, т. е.

$$\Delta\mathbf{p} = \mathbf{F}\Delta t. \tag{3.2}$$

Очевидно, что закон (3.2) переходит в (3.1), если масса m остается постоянной.

Если на тело действуют несколько сил, то в этом случае берется результирующий импульс всех сил, подействовавших на тело. В проекциях на оси координат x, y, z уравнение (3.2) может быть записано в виде

$$\Delta p_x = F_x \,\Delta\, t, \quad \Delta p_y = F_y \,\Delta\, t, \quad \Delta p_z = F_z \,\Delta\, t. \tag{3.3}$$

Из (3.3) следует, что если, например, $F_y\Delta t = 0$ и $F_z\Delta t = 0$, то происходит изменение проекции импульса только на одно направление, и обратно, если изменяется проекция импульса только на одну из осей, то, следовательно, импульс силы, действующей на тело, имеет только одну проекцию, отличную от нуля. Например, пусть шарик, летящий под углом α к горизонту, упруго ударяется о гладкую стенку. Тогда при отражении изменяется только x-компонента импульса (рис. 3.1). Проекции импульса на ось x:

$$p_{1x} = mv_1 \cos\alpha, \quad p_{2x} = -mv_2 \cos\alpha.$$

Изменение импульса:

$$\Delta p_x = p_{2x} - p_{1x} = -mv_2 \cos\alpha - mv_1 \cos\alpha.$$

При упругом ударе о стенку скорости до и после удара равны: $v_1 = v_2 = v$, поэтому

$$\Delta p_x = -2mv \cos\alpha.$$

Следовательно, на шарик подействовал импульс силы, проекция которого на ось x есть $F_x\Delta t = -2mv\cos\alpha$, проекции на ось y

$$p_{1y} = -mv_1 \sin\alpha, \quad p_{2y} = -mv_2 \sin\alpha.$$

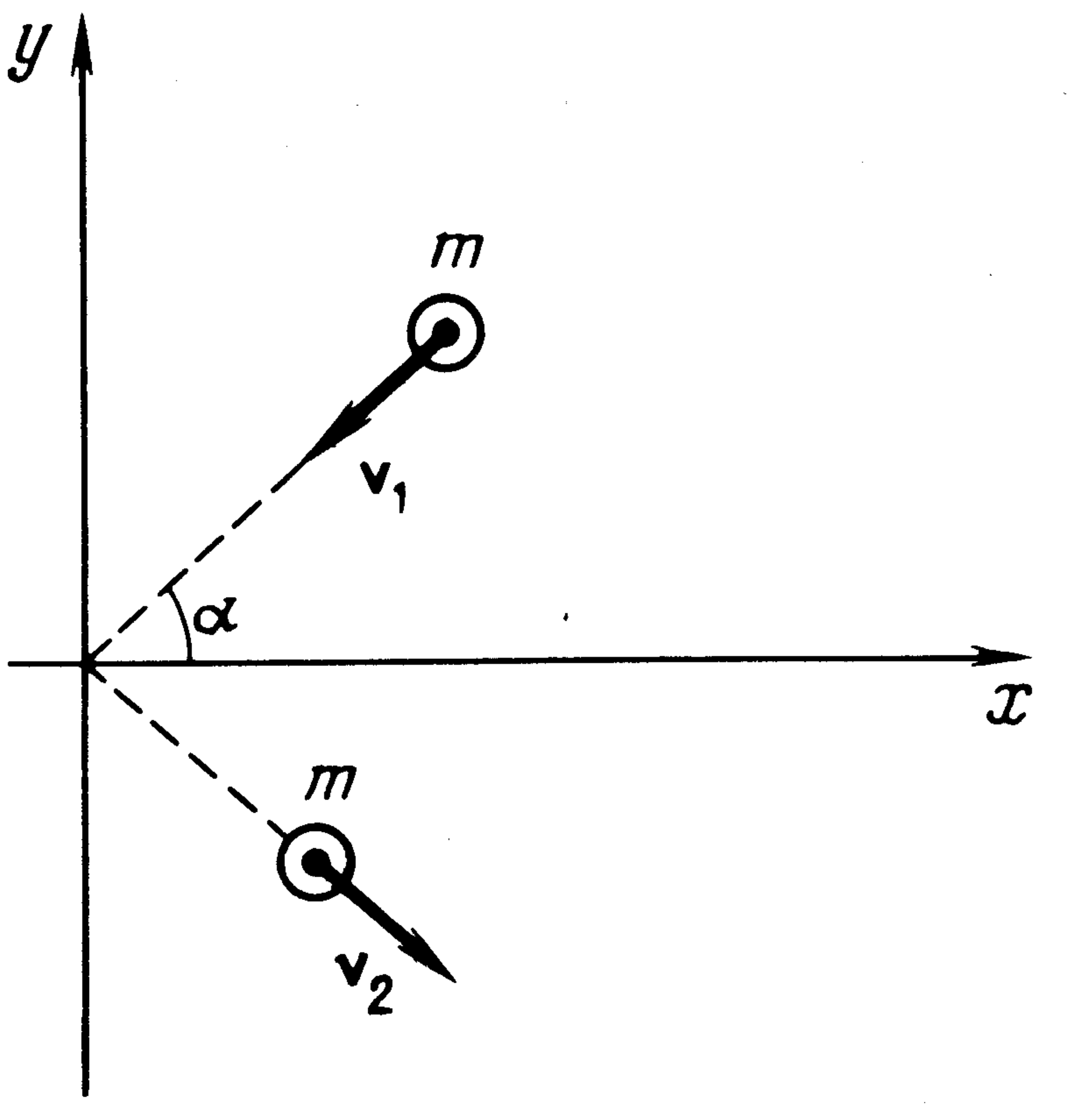


Рис. 3.1.

Изменение импульса:

$$\Delta p_y = p_{2y} - p_{1y} = 0.$$

Следовательно, проекция импульса силы на ось y равна $F_y \Delta t = 0$.

Понятием импульса широко пользуются при решении задач о движении нескольких взаимодействующих тел. Совокупность n взаимодействующих тел называется *системой тел*. Введем понятие *внешних* и *внутренних* сил. *Внешними силами* $F_{\text{внеш}}$ называются силы, действующие на тела системы со стороны тел, не входящих в нее. *Внутренними силами* $F_{\text{внутр}}$ называются силы, возникающие в результате взаимодействия тел, входящих в систему. Например, мальчик подбрасывает мячик. Рассмотрим систему тел мальчик — мяч. Силы тяжести, действующие на мальчика и мяч, сила нормальной реакции, действующая на мальчика со стороны пола, — внешние силы. Сила, с которой мяч давит на руку мальчика, сила, с которой мальчик действует на мяч, пока он не оторвется от руки, — внутренние силы.

Рассмотрим систему из двух взаимодействующих тел 1 и 2. На тело 1 действуют внешняя сила $\mathbf{F}_{\text{внеш}1}$ и внутренняя сила (со стороны второго тела) $\mathbf{F}_{\text{внутр}1}$. На второе тело действуют силы $\mathbf{F}_{\text{внеш}2}$ и $\mathbf{F}_{\text{внутр}2}$. Согласно (3.2), изменение импульса первого тела за промежуток времени Δt равно

$$\Delta \mathbf{p}_1 = \mathbf{F}_{\text{внутр}1}\Delta t + \mathbf{F}_{\text{внеш}1}\Delta t, \tag{3.4а}$$

изменение импульса второго тела:

$$\Delta \mathbf{p}_2 = \mathbf{F}_{\text{внутр}2}\Delta t + \mathbf{F}_{\text{внеш}2}\Delta t. \tag{3.4б}$$

Суммарный импульс системы равен

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2.$$

Сложив левые и правые части уравнений (3.4а) и (3.4б), получим изменение суммарного импульса системы:

$$\Delta \mathbf{p} = (\mathbf{F}_{\text{внутр}1} + \mathbf{F}_{\text{внутр}2})\Delta t + (\mathbf{F}_{\text{внеш}1} + \mathbf{F}_{\text{внеш}2})\Delta t.$$

По 3-му закону Ньютона

$$\mathbf{F}_{\text{внутр}1} = -\mathbf{F}_{\text{внутр}2},$$

откуда

$$\Delta \mathbf{p} = \mathbf{F}_{\text{внеш}} \Delta t, \tag{3.5}$$

где $\mathbf{F}_{\text{внеш}} \Delta t$ — результирующий импульс внешних сил, действующих на тела системы. Итак, уравнение (3.5) показывает, что импульс системы может измениться только под действием внешних сил. *Закон сохранения импульса* можно сформулировать следующим образом:

Импульс системы сохраняется, если результирующий импульс внешних сил, действующих на тела, входящие в систему, равен нулю.

Системы, в которых на тела действуют только внутренние силы (т. е. тела системы взаимодействуют только друг с другом), называются *замкнутыми* (изолированными). Очевидно, что в замкнутых системах импульс системы сохраняется. Однако и в незамкнутых системах в некоторых случаях можно использовать закон сохранения импульса. Перечислим эти случаи.

1. Внешние силы действуют, но их результирующая равна 0.

2. Проекция внешних сил на какое-то направление равна 0, следовательно, проекция импульса на это направление сохраняется, хотя сам вектор импульса не остается постоянным.

3. Внешние силы много меньше внутренних сил ($F_{\text{внеш}} << F_{\text{внутр}}$). Изменение импульса каждого из тел практически равно $F_{\text{внутр}} \Delta t$.

Примеры применения закона сохранения импульса

Задача 1. Два шарика массами m_1, и m_2 движутся навстречу друг другу по идеально гладкой поверхности со скоростями $\mathbf{v}_1$ и $\mathbf{v}_2$. Определите скорость $\mathbf{u}$ шариков после абсолютно неупругого удара (рис. 3.2).

Абсолютно неупругим ударом называется взаимодействие, в результате которого тела начинают двигаться вместе с одинаковыми скоростями.

Дано: m_1, m_2, v_1, v_2; u — ?

Решение. На шарики действуют внешние силы: сила тяжести и сила нормальной реакции, однако результирующая их равна 0, т. е. можно применить закон сохранения импульса (случай 1)

$$\mathbf{p}_{\text{I}} = \mathbf{p}_{\text{II}} \tag{3.6}$$

где $\mathbf{p}_{\text{I}} = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2$ — импульс системы до взаимодействия ($\mathbf{p}_1 = m_1\mathbf{v}_1$, $\mathbf{p}_2 = m_2\mathbf{v}_2$), $\mathbf{p}_{\text{II}}$ — импульс системы после взаимодействия, $\mathbf{p}_{\text{II}} = (m_1 + m_2)\mathbf{u}$. Выберем ось x вдоль плоскости и запишем (3.6) в проекциях на ось x:

$$m_1 v_1 - m_2 v_2 = (m_1 + m_2)u,$$

откуда

$$u = \frac{m_1 v_1 - m_2 v_2}{m_1 + m_2}.$$

Задача 2. Акробат массой $m_1 = 50$ кг прыгает, держа камень $m_2 = 5$ кг в руке, под углом 60° к горизонту со скоростью $v_0 = 6$м/с. В наивысшей точке своей траектории он бросает груз горизонтально назад с относительной скоростью $v' = 2$ м/с. На сколько увеличится дальность прыжка акробата?

Дано: $m_1 = 50$ кг, $m_2 = 5$ кг, $v_0 = 6$ м/с, $\alpha = 60°$, $v' = 2$ м/с; Δs — ?

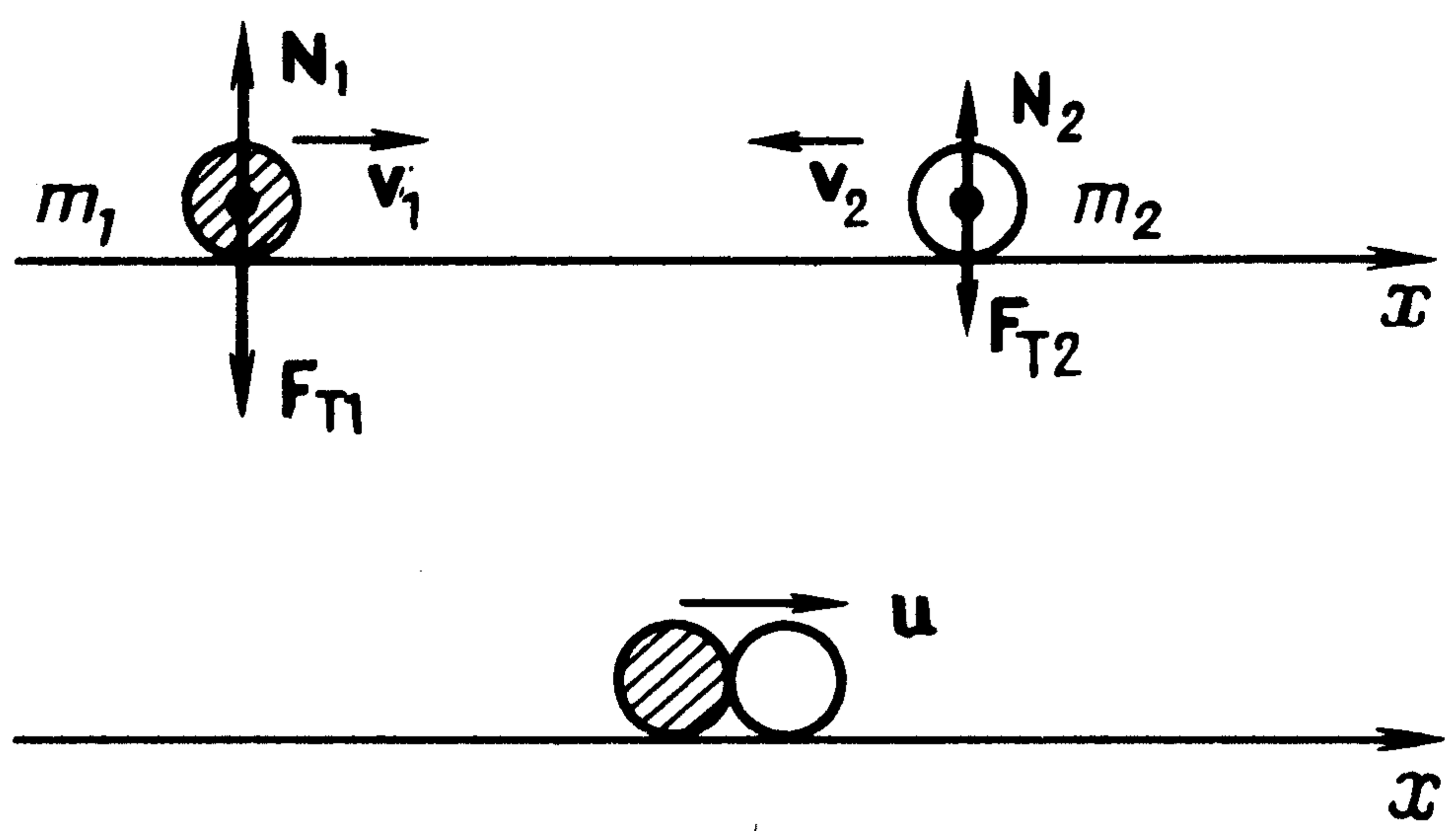


Рис. 3.2.

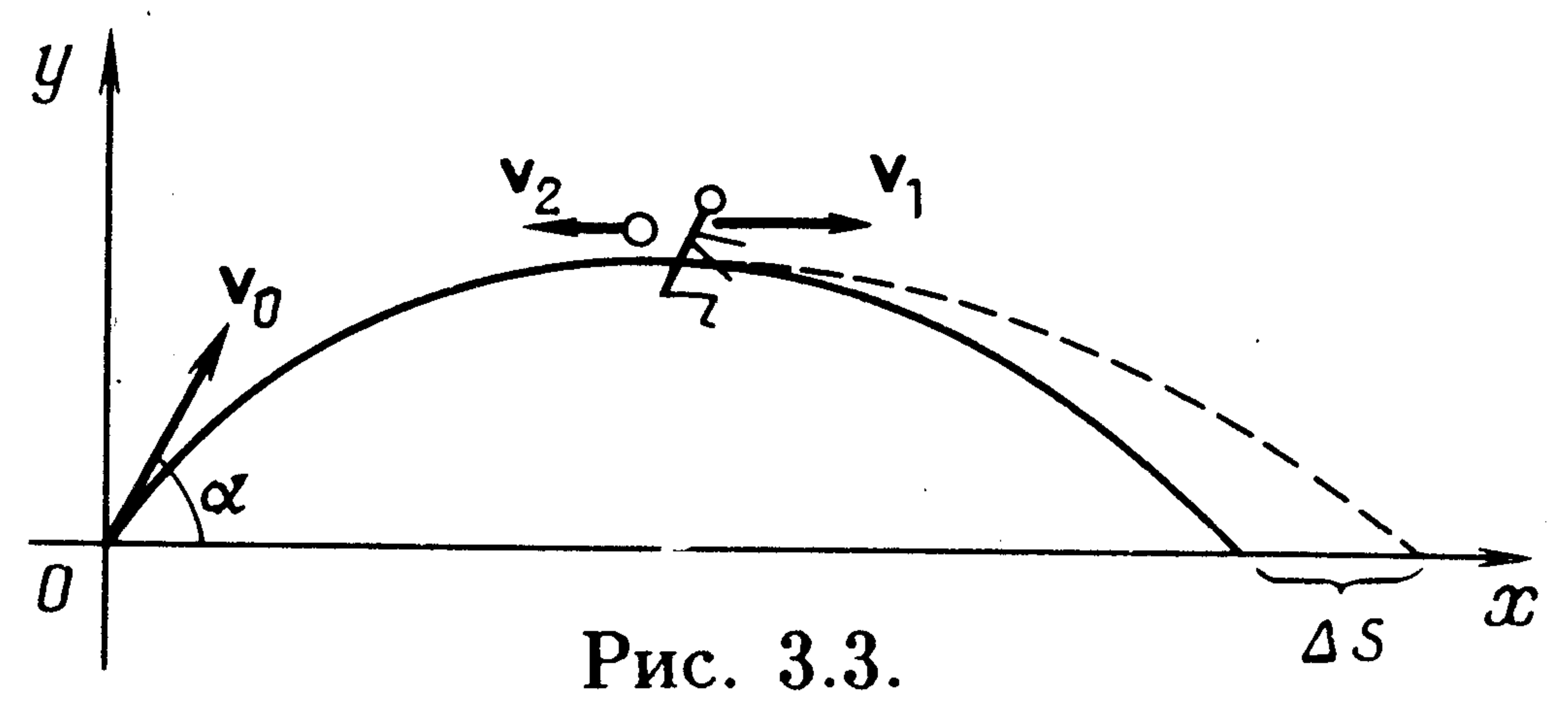


Рис. 3.3.

Решение. Дальность прыжка увеличивается вследствие увеличения скорости акробата за счет бросания камня. Выберем направление осей координат, как показано на рис. 3.3. По оси x движение акробата равномерное со скоростью $v_{0x} = v_0 \cos\alpha$ и со скоростью v_{1x} после бросания камня. Увеличение дальности прыжка $\Delta s = (v_{1x} - v_{0x})t$, где t — время прыжка с момента бросания до падения на землю. На тела действуют внешние силы — силы тяжести, однако проекции сил тяжести на ось x равны нулю. Следовательно, проекция импульса на ось x остается постоянной (случай 2):

$$p_{\mathrm{I}x} = p_{\mathrm{II}x}, \quad (m_1 + m_2)v_{0x} = m_1 v_{1x} - m_2 v_{2x}. \tag{3.7}$$

Скорость камня v_{2x} берется относительно неподвижной системы отсчета, в условии задачи дана скорость камня относительно акробата. Заметим, что импульсы всех тел должны рассчитываться относительно одной системы отсчета. Согласно закону сложения скоростей,

$$v_{2x} = v' - v_{1x}. \tag{3.8}$$

Подставив (3.8) в (3.7), получим для v_{1x}

$$v_{1x} = v_{0x} + \frac{m_2 v'}{m_1 + m_2},$$

откуда

$$\Delta s = \frac{m_2 v'}{m_1 + m_2} t.$$

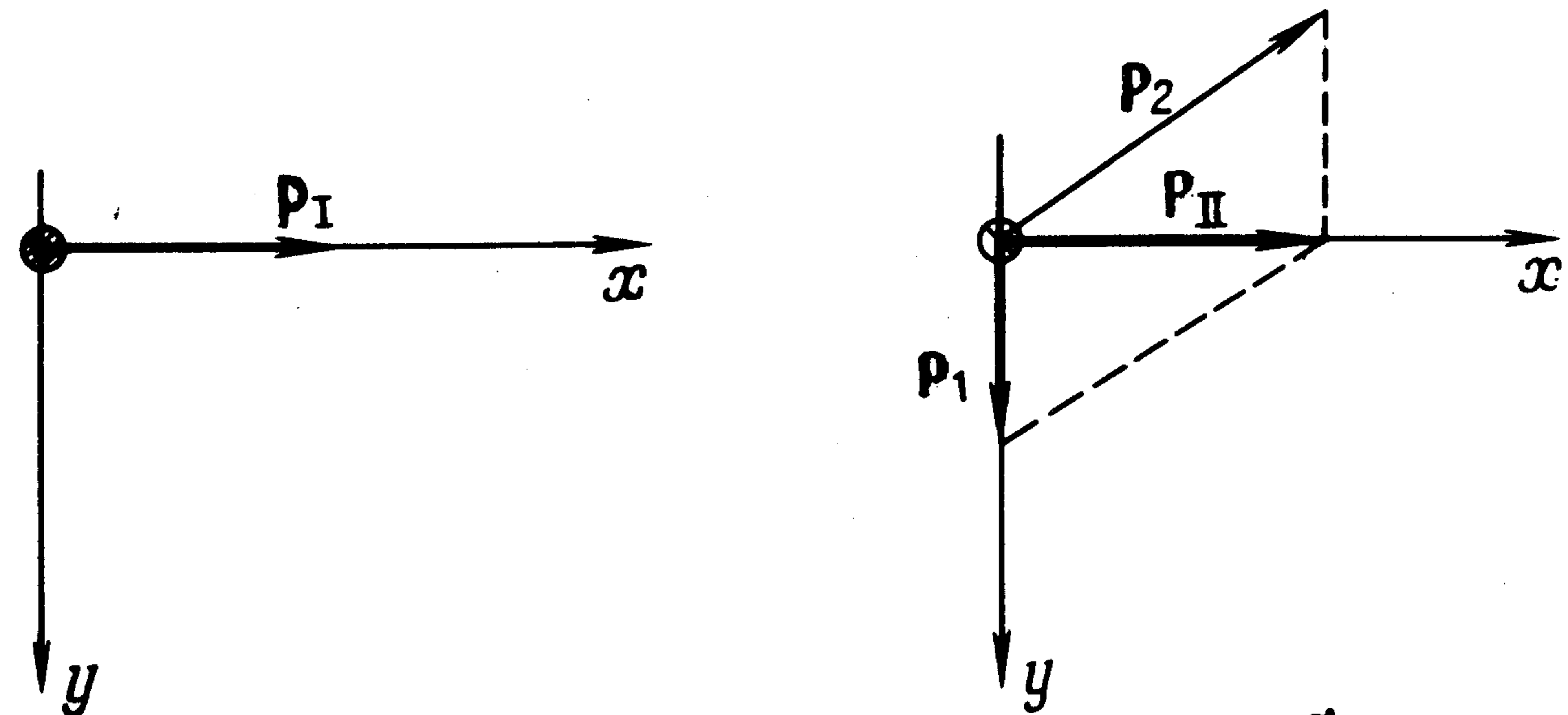
Длительность прыжка $t = v_{0y}/g$ (см. задачу 6, гл. 1). Окончательно

$$\Delta s = \frac{m_2 v'}{m_1 + m_2} \frac{v_0 \sin\alpha}{g}, \quad \Delta s = 0{,}095\text{м}.$$

Задача 3. На высоте $h = 80$ м снаряд, летящий горизонтально со скоростью $v_0 = 100\,\text{м/с}$, разрывается на два равных осколка. Первый осколок через $t_1 = 2\,\text{с}$ падает в эпицентр взрыва. Определить дальность полета второго осколка l_2.

Дано: $v_0 = 100\,\text{м/с}$, $h = 80\,\text{м}$, $t_1 = 2\,\text{с}$; l_2 — ?

Решение. Для определения дальности полета второго осколка необходимо знать его скорость после взрыва. Для определения этой скорости воспользуемся законом сохранения импульса. На тела (снаряд, осколки) действует внешняя



а *б*

Рис. 3.4.

сила — сила тяжести, однако $F_\text{т} \ll F_\text{внутр}$ (случай 3). По закону сохранения импульса

$$\mathbf{p}_\mathrm{I} = \mathbf{p}_\mathrm{II}, \tag{3.9}$$

где $\mathbf{p}_\mathrm{II} = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2$, $\mathbf{p}_1$ — импульс первого осколка, а $\mathbf{p}_2$ — импульс второго осколка.

Определим импульс первого осколка. Предположим, что непосредственно после взрыва он летит вниз. Уравнение движения его вдоль оси y:

$$y_1 = v_{1y}t + a_{1y}t^2/2,$$

где $v_{1y} = v_1$, $\quad a_{1y} = g$, откуда

$$v_1 = \frac{h - gt^2/2}{t_1},$$

$$v_1 = \frac{80 - (10 \cdot 4)/2}{2}\,\text{м/с} = 30\,\text{м/с}.$$

Поскольку $v_{1y} > 0$, следовательно, наше предположение оказалось верным и первый осколок после взрыва летит вниз. На рис. 3.4 показаны импульсы снаряда и осколков. В проекциях на оси координат уравнение (3.9) записывается в виде

$$p_\mathrm{I} = p_{2x}, \quad p_{1y} + p_{2y} = 0, \quad \text{т. е.} \quad mv_0 = (m/2)v_{1x}, \quad (m/2)v_{1y} + (m/2)v_{2y} = 0,$$

откуда

$$v_{2x} = 2v_0, \quad v_{2y} = -v_{1y} = -v_1.$$

Для второго осколка законы движения по осям x и y имеют вид (рис. 3.4,*б*)

$$x_2 = 2v_0t, \quad y_2 = v_{2y}t + gt^2/2 = -v_1t + gt^2/2, \quad v_{2y} < 0.$$

При падении $y_2 = 0$, откуда

$$t_2 = \left(v_1 + \sqrt{v_1^2 + 2gh}\right)/g,$$

$$t_2 = \left(30 + \sqrt{900 + 1600}\right)/10\,\text{с} = 8\,\text{с}.$$

Следовательно,

$$x_2 = l_2 = 2v_0\left(v_1 + \sqrt{v_1^2 + 2gh}\right)/g = 1600\,\text{м}.$$

Задача 4. Лодка длиной l и массой M стоит в спокойной воде. На носу лодки сидит человек массой m. На сколько сместится лодка относительно берега, если человек перейдет с носа на корму (рис. 3.5)? При этом сопротивление воды и перемещение воды в объеме лодки не учитывать.

Дано: m, M, l; Δx — ?

Решение. Прежде чем человек пошел по лодке, импульс системы лодка — человек был равен 0:

$$\mathbf{p}_{\mathrm{I}} = 0.$$

После того как человек пойдет по лодке относительно берега со скоростью $\mathbf{v}_1$, лодка начнет двигаться со скоростью $\mathbf{v}_2$.

Скорость человека относительно берега $\mathbf{v}_1$ связана со скоростью человека относительно лодки $\mathbf{v}_1'$ соотношением

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_1' + \mathbf{v}_2.$$

Поскольку сумма внешних сил, действующих на систему, равна нулю, можно использовать закон сохранения импульса: $\mathbf{p}_{\mathrm{I}} = \mathbf{p}_{\mathrm{II}}$. В проекции на ось x имеем

$$0 = Mv_2 - mv_1. \tag{3.10}$$

Скорость человека относительно лодки v_1' равна $v_1' = v_1 + v_2$. Очевидно, что эта скорость определяется из выражения $v_1' = l/\Delta t$, где Δt — время движения человека по лодке. За этот же промежуток времени лодка перемещается на расстояние Δx, равное $v_2\Delta t$, откуда скорость лодки и человека

$$v_2 = \frac{\Delta x}{\Delta t}, \quad v_1 = (l/\Delta t) - (\Delta x/\Delta t).$$

Подставив найденные выражения в (3.10), получим

$$M\frac{\Delta x}{\Delta t} - m\left(\frac{l}{\Delta t} - \frac{\Delta x}{\Delta t}\right) = 0.$$

Окончательно,

$$\Delta x = \frac{ml}{m+M}.$$

Задача 5. Частица массы m_1, имеющая скорость v, налетела на покоящуюся частицу массы m_2 и отскочила от нее со скоростью v_1 под прямым углом к направлению первоначального движения. Какова скорость второй частицы v_2? Массы частиц малы и силой тяжести по сравнению с силами взаимодействия частиц можно пренебречь.

Дано: m_1, m_2, v, v_1; v_2 — ?

Решение. По условию задачи $F_{\text{внеш}} << F_{\text{внутр}}$ (3-й случай). Оси координат выберем, как показано на рис. 3.6. По закону сохранения импульса

$$\mathbf{p}_{\mathrm{I}} = \mathbf{p}_{\mathrm{II}}, \tag{3.11}$$

где $\mathbf{p}_{\mathrm{I}} = m_1\mathbf{v}$, $\mathbf{p}_{\mathrm{II}} = m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2$. Запишем уравнение (3.11) в проекциях на оси координат:

$$\text{на ось } x \qquad m_1 v = m_1 v_{1x} + m_2 v_{2x}, \quad (v_{1x} = 0),$$
$$\text{на ось } y \qquad 0 = m_1 v_1 + m_2 v_{2y},$$

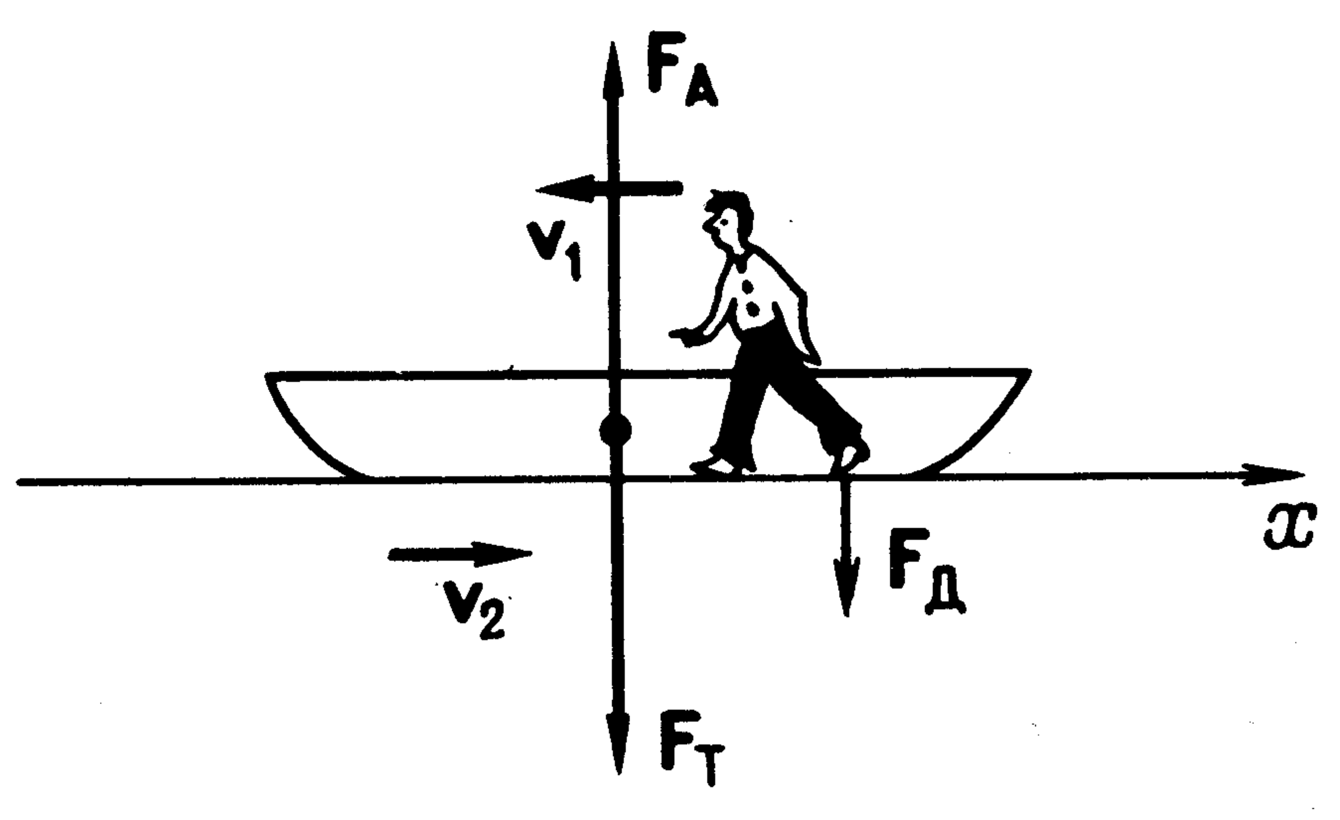


Рис. 3.5.

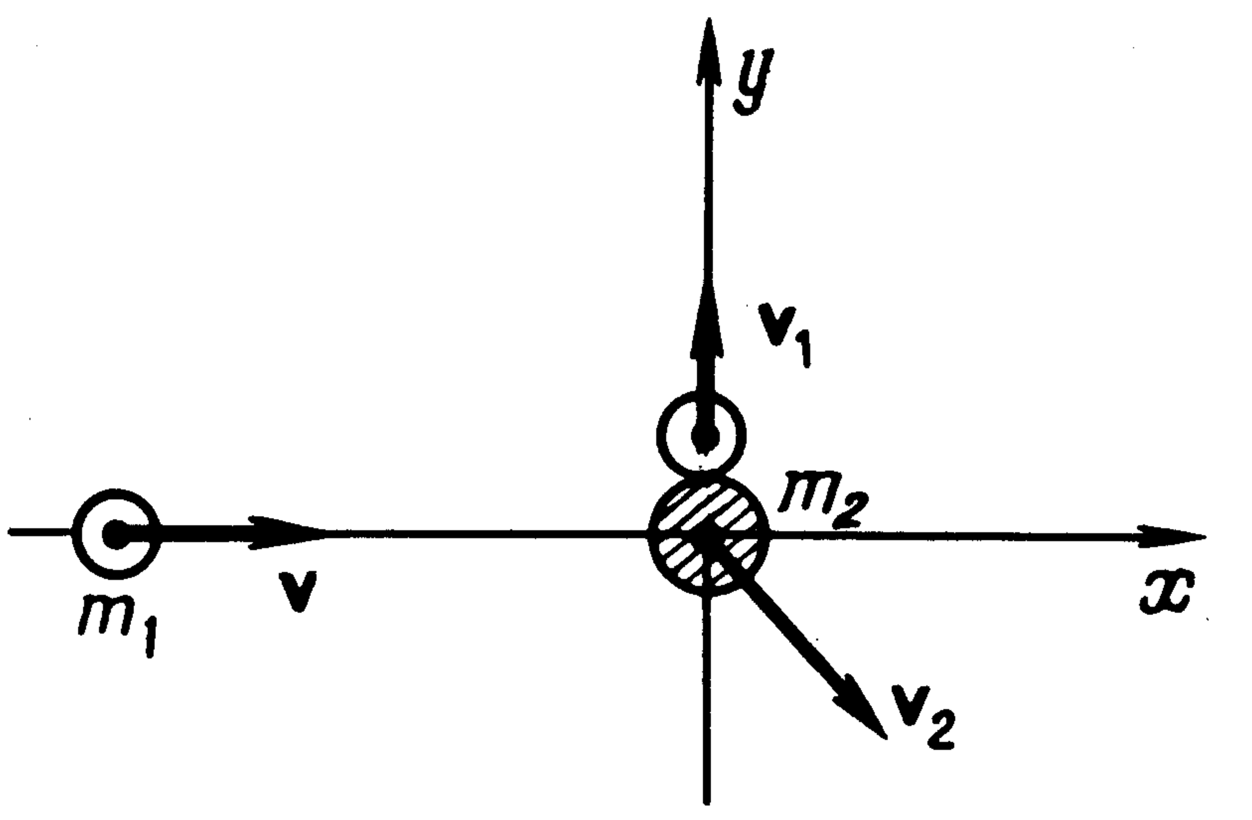


Рис. 3.6.

откуда

$$v_{2x} = (m_1/m_2)v, \quad v_{2y} = -(m_1/m_2)v_1.$$

Следовательно,

$$v_2 = \sqrt{v_{2x}^2 + v_{2y}^2}, \quad v_2 = (m_1/m_2)\sqrt{v^2 + v_1^2}.$$

Задача 6. Два человека на роликовых коньках стоят друг против друга. Масса первого человека $m_1 = 70$ кг, а второго $m_2 = 80$ кг. Первый бросает второму груз массой $m = 10$ кг со скоростью, горизонтальная составляющая которой $v = 5$ м/с относительно земли. Определить скорость первого человека после броска и второго после того, как он поймает груз. Трение не учитывать.

Дано: $m_1 = 70$ кг, $m_2 = 80$ кг, $m = 10$ кг, $v = 5$ м/с; v_1 — ? v_2 — ?

Решение. В данном случае рассматривается система трех тел: два человека и груз. В связи с тем, что трение не учитывается и проекции всех внешних сил на горизонтальное направление (например, на ось x) равны нулю, проекция импульса системы на это направление сохраняется. Рассмотрим сначала систему 1-й человек — груз, а затем 2-й человек — груз. В условии задачи дается скорость груза, которую мы не можем использовать, применяя закон сохранения импульса к системе в целом, так как в начальном состоянии скорость груза была равна нулю, как и скорость 1-го человека, а в конечном состоянии скорость груза равняется скорости 2-го человека. Итак, для системы человек массой m_1 — груз закон сохранения импульса в проекции на ось x имеет вид

$$p_{Ix} = p_{IIx}, \quad 0 = m_1 v_1 - mv.$$

Тогда скорость v_1 1-го человека после броска равна

$$v_1 = \frac{mv}{m_1}, \quad v_1 = \frac{5}{7}\text{ м/с}$$

Для системы груз — 2-й человек проекция импульса на ось x до взаимодействия равна

$$p'_{Ix} = -mv.$$

После взаимодействия имеем

$$p'_{IIx} = -(m + m_2)v_2.$$

Следовательно,

$$-mv = -(m + m_2)v_2,$$

откуда для скорости v_2 получаем выражение

$$v_2 = \frac{mv}{m + m_2}; \quad v_2 = \frac{50}{90}\text{м/с} = \frac{5}{9}\,\text{м/с}.$$

Заметим, что в условии задачи была дана скорость груза относительно земли, скорости первого и второго человека v_1 и v_2 рассчитывались относительно этой же системы отсчета.

Задача 7. Ракета массой $m_0 = 3000$ кг летит со скоростью $v = 200$ м/с. От нее отделяется ступень массой $m = 1000$ кг, при этом скорость головной части возрастает на 20 м/с. Определить, с какой скоростью будет двигаться отделившаяся часть ракеты.

Дано: $m_0 = 3000\,\text{кг}$, $m = 1000\,\text{кг}$, $v = 200\,\text{м/с}$, $\Delta v = 20\,\text{м/с}$; v_2 — ?

Решение. Решим эту задачу двумя способами, рассматривая движение относительно двух систем отсчета. Обе системы отсчета инерциальные.

Способ 1. Рассмотрим движение частей ракеты относительно системы отсчета, связанной с движущейся с постоянной скоростью ракетой. Тогда до отделения головной части импульс системы был равен нулю, $\mathbf{p}_\text{I} = 0$. Относительно этой системы отсчета скорость головной части после отделения равна $u_1 = \Delta v$, скорость отделившейся части равна u_2 и направлена в противоположную сторону:

$$\mathbf{p}_\text{II} = m\mathbf{u}_2 + (m_0 - m)\mathbf{u}_1, \quad \mathbf{p}_\text{I} = \mathbf{p}_\text{II} \quad \text{(3 случай)}.$$

В проекциях на направление движения

$$(m_0 - m)u_1 - mu_2 = 0,$$

откуда

$$u_2 = \frac{m_0 - m}{m}\Delta v, \quad u_2 = 40\,\text{м/с}.$$

Следовательно, относительно Земли скорость отделившейся части

$$v_2 = v - u_2 = 160\,\text{м/с}.$$

Способ 2. Рассмотрим движение ракеты относительно Земли. Импульс системы до отделения головной части равнялся

$$\mathbf{p}_\text{I} = m_0\mathbf{v}.$$

Импульс после отделения равен сумме импульсов частей ракеты:

$$\mathbf{p}_\text{II} = m\mathbf{v}_1 + (m_0 - m)\mathbf{v}_1, \quad \mathbf{p}_\text{I} = \mathbf{p}_\text{II}.$$

В проекциях на направление движения ракеты закон сохранения импульса имеем вид

$$m_0 v = (m_0 - m)v_1 - mv_2$$

(в предположении, что отделившаяся часть летит в противоположную сторону). Для v_2 получим

$$v_2 = \frac{(m_0 - m)v_1 - m_0 v}{m}.$$

Скорость головной части $v_1 = v + \Delta v = 220\,\text{м/с}$, отсюда

$$v_2 = \frac{2000 \cdot 220 - 3000 \cdot 200}{1000}\text{м/с} = -160\,\text{м/с}.$$

Знак минус указывает, что предположение о направлении движения отделившейся части ракеты неверно. Отделившаяся часть ракеты летит в том же направлении, что и головная, со скоростью 160 м/с.

Задачи для самостоятельного решения

Задача 1. Три лодки одинаковой массы M движутся по инерции друг за другом с одинаковой скоростью v. Из средней лодки в крайние одновременно перебрасывают грузы массой m со скоростью u относительно лодок. Какие скорости будут иметь лодки после перебрасывания? Сопротивление воды не учитывать.

Ответ:

$$v_1 = \frac{Mv + m(v+u)}{M+m}; \quad v_2 = v; \quad v_3 = \frac{Mv + m(v-u)}{M+m}.$$

Задача 2. Космический корабль должен, изменив курс, двигаться с прежним по модулю импульсом p под углом α к первоначальному направлению. На какое минимальное время должен быть включен двигатель с силой тяги F и как при этом нужно ориентировать ось двигателя?

Ответ: $t = 2p(\sin\alpha/2)/F$, $\beta = (\pi+\alpha)/2$ к начальной скорости.

Задача 3. Космический корабль перед отделением последней ступени ракеты-носителя имел скорость v. После отбрасывания последней ступени его скорость стала равной $1,01v$, при этом отделившаяся ступень удаляется относительно корабля со скоростью $0,04v$. Какова масса последней ступени, если масса корабля равна m_0?

Ответ: $m = m_0/3$.

Задача 4. Граната, летевшая со скоростью 10 м/с, разорвалась на два осколка. Больший осколок, масса которого 60% массы всей гранаты, продолжал двигаться в прежнем направлении, но с увеличенной скоростью, равной 25 м/с. Найти скорость меньшего осколка.

Ответ: v_2=12,5 м/с.

Задача 5. Тело массой m соскальзывает с наклонной плоскости на неподвижную платформу. Какую скорость будет иметь платформа, когда груз упадет на нее? Масса платформы M, высота начального положения тела h, угол наклона плоскости к горизонту α, коэффициент трения между наклонной плоскостью и телом k. Платформа движется без трения.

Ответ:

$$v = \frac{m\sqrt{2gl(\sin\alpha - k\cos\alpha)}\cos\alpha}{m+M}.$$

Задача 6. Плот массой $M = 2000$ кг находится на расстоянии $S = 2$ м от берега. Автомобиль массой $m = 1000$ кг перемещается от одного края плота к другому. Сможет ли при этом плот пристать к берегу, если длина плота $L = 7$ м.

Ответ: сможет.

Задача 7. На конце соломинки, лежащей на гладком столе, сидит кузнечик. С какой минимальной скоростью он должен прыгнуть, чтобы попасть на другой конец соломинки? Трение между столом и соломинкой не учитывать. Масса соломинки M, ее длина l, масса кузнечика m.

Ответ: $v = \sqrt{Mgl/(M+m)}$.

Задача 8. Снаряд массой $m_1 = 20$ кг, летевший со скоростью $v_1 = 500$ м/с под углом $\alpha = 30^\circ$ к горизонту, попадает в платформу с песком массой $m_2 = 10$ т и застревает в песке. Определите скорость движения платформы, если первоначально платформа двигалась навстречу снаряду со скоростью $v_2 = 2$ м/с.

Ответ: $v = 1,15$ м/с.

Глава 4

Механическая работа и энергия. Закон сохранения энергии

Пусть на тело действует постоянная сила $\mathbf{F}$ и тело перемещается на $\Delta\mathbf{s}$. Механическая работа равна произведению модулей силы и перемещения точки приложения силы на косинус угла между вектором силы и вектором перемещения (рис. 4.1):

$$A = F\Delta s\cos\alpha. \tag{4.1}$$

Проекция силы на вектор перемещения равна

$$F_s = F\cos\alpha,$$

следовательно,

$$A = F_s\Delta s. \tag{4.2}$$

Из формулы (4.1) следует, что при $\alpha < \pi/2$ работа силы положительна, $A > 0$, при $\alpha = \pi/2$ $A = 0$, при $\alpha > \pi/2$ $A < 0$.

На рис. 4.2 изображена зависимость F_s от s. Из формулы (4.2) очевидно, что работа силы $\mathbf{F}$ численно равна площади заштрихованного прямоугольника.

Если F_s зависит от s по произвольному закону (рис. 4.3), то, разбивая полное перемещение на малые отрезки Δs_i, в пределах каждого из которых значение F_{si} можно считать постоянным, получим, что работа силы $\mathbf{F}$ на перемещении $\mathbf{s}$ равна площади криволинейной трапеции:

$$A = \sum_i F_{si}\Delta s_i.$$

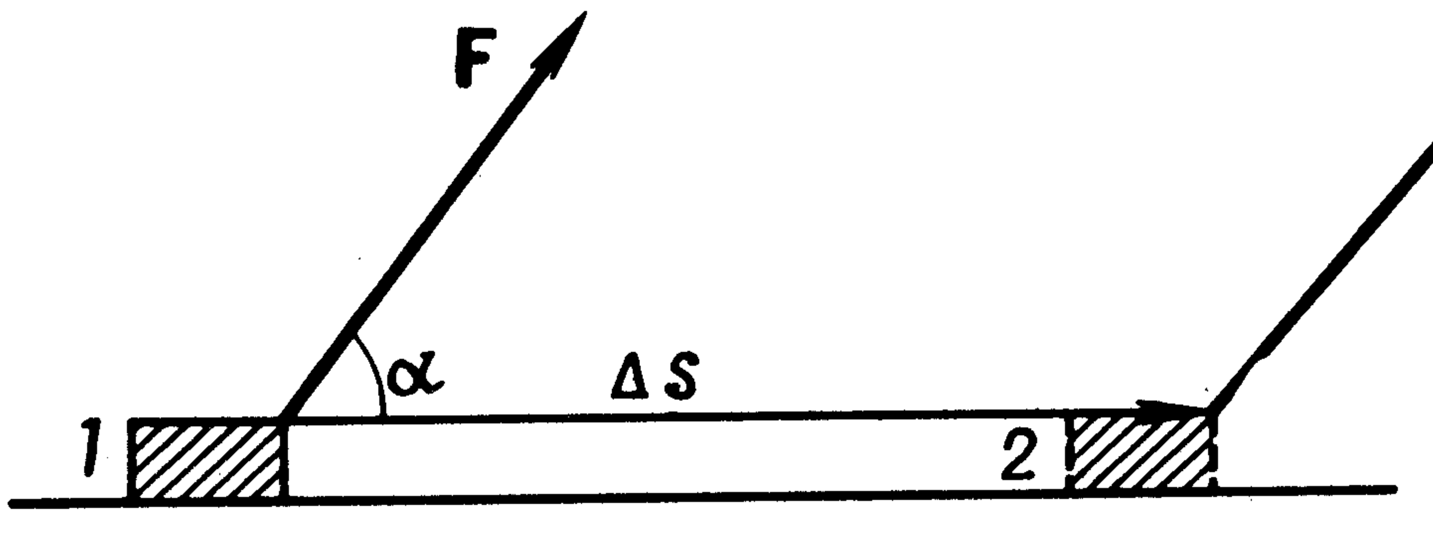


Рис. 4.1.

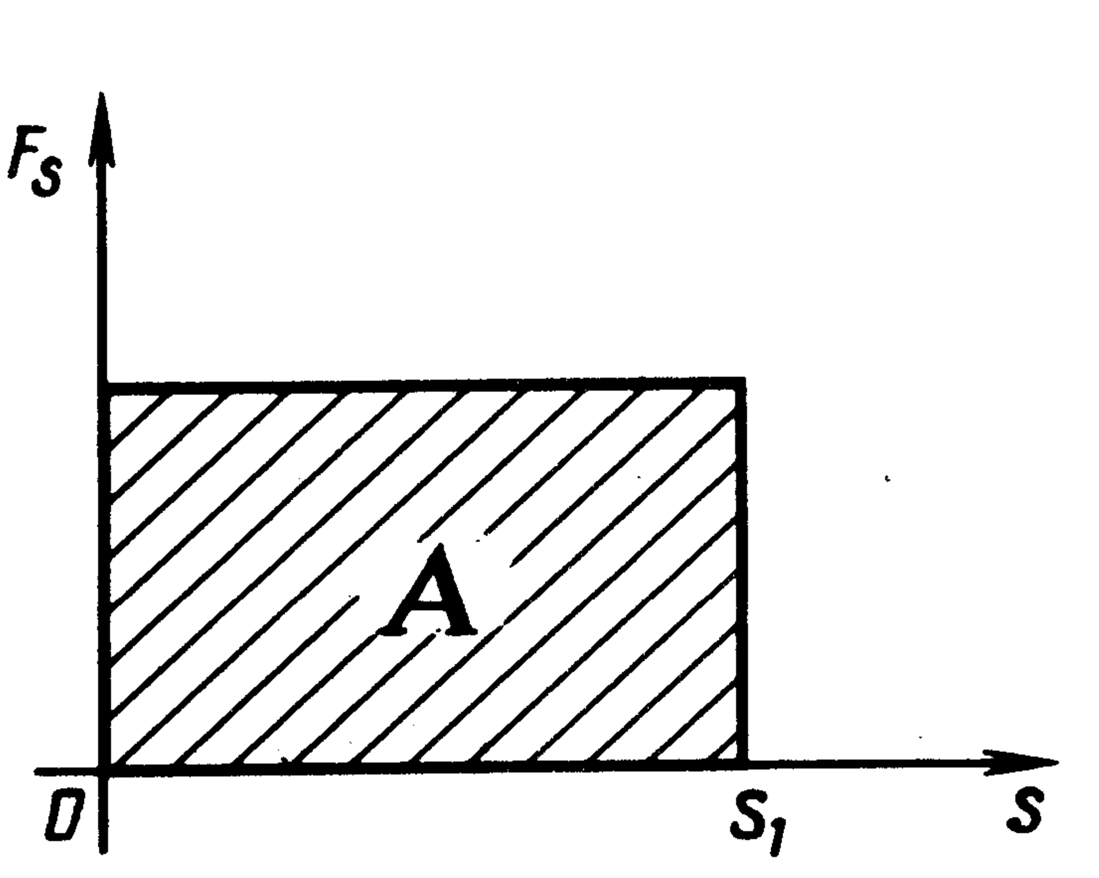


Рис. 4.2.

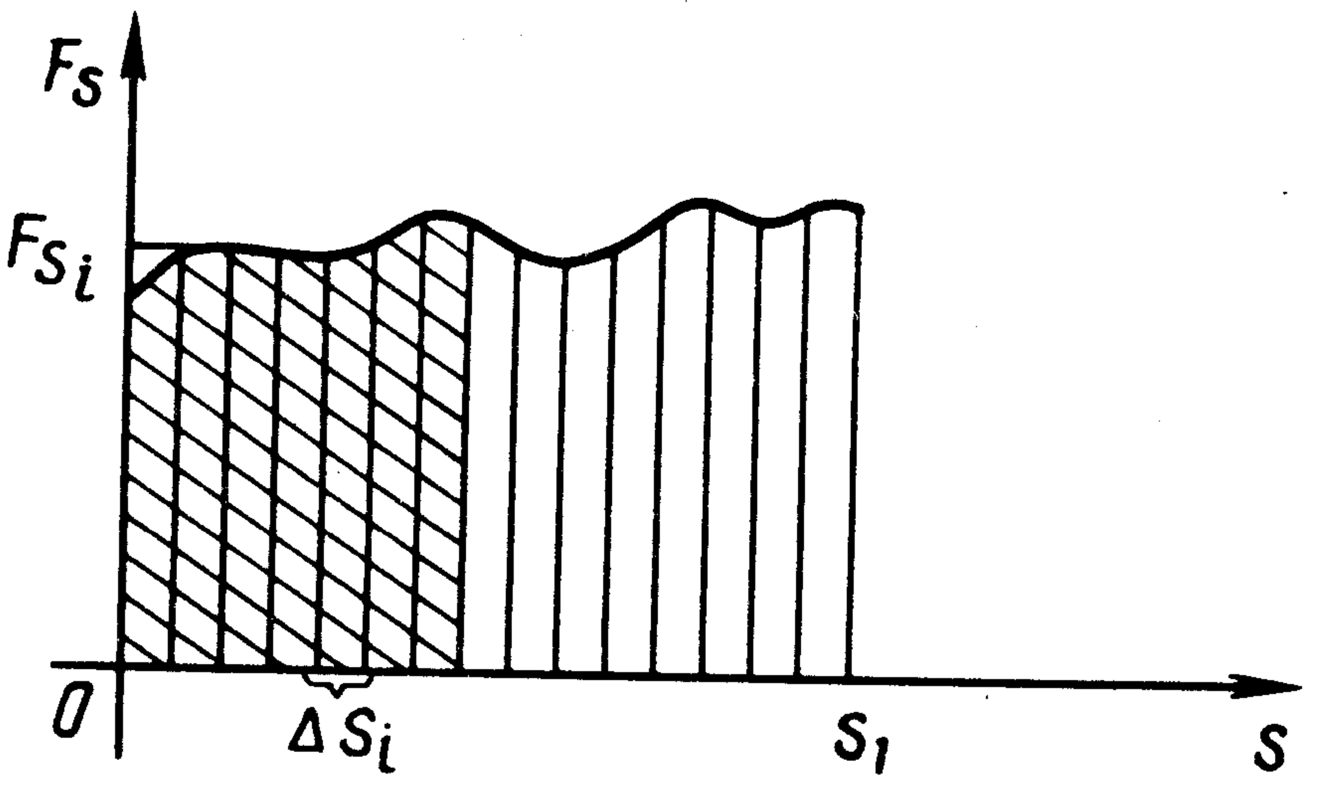


Рис. 4.3.

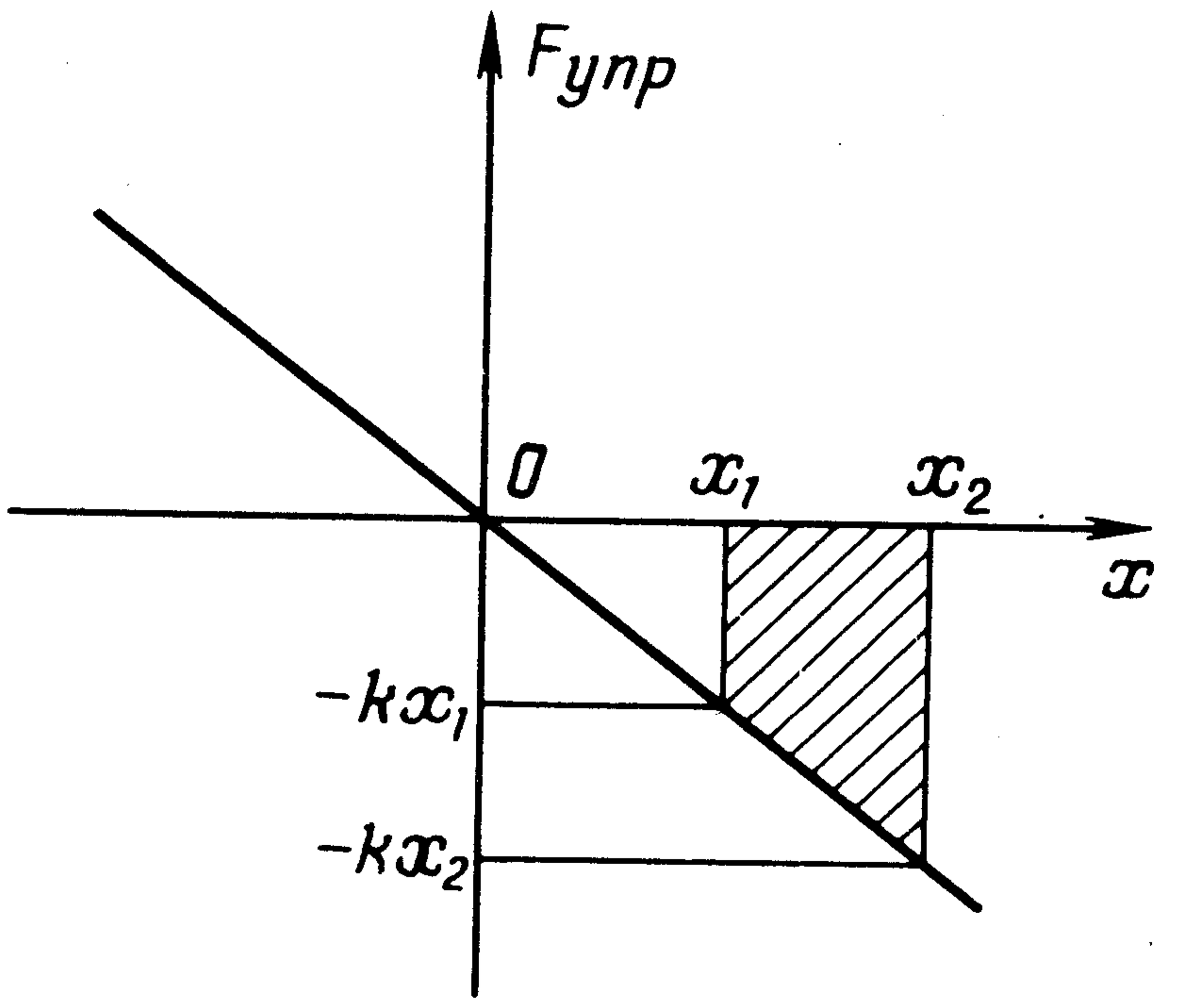


Рис. 4.4.

Работа силы упругости. Сила упругости равна $F_{\text{упр}} = -kx$. Зависимость силы упругости от x изображена на рис. 4.4. При растяжении пружины от x_1 до x_2 работа силы упругости с точностью до знака равна площади заштрихованной трапеции:

$$A = -\frac{kx_1 + kx_2}{2}(x_2 - x_1) = \frac{kx_1^2}{2} - \frac{kx_2^2}{2} < 0. \tag{4.3}$$

Работа силы упругости при растяжении отрицательна, так как сила упругости направлена в сторону, противоположную перемещению. При восстановлении размеров пружины работа силы упругости положительна, так как сила упругости по направлению совпадает с перемещением.

Работа силы тяготения. Сила тяготения зависит от расстояния от центра Земли r. Определим работу силы тяготения при перемещении тела массы m из точки A в точку B (рис. 4.5). На малом перемещении Δr работа силы тяготения

$$\Delta A = -F_{\text{т}}\Delta r = -G(mM_{\text{З}}/r_{\text{ср}}^2)\Delta r, \quad \Delta r = r_2 - r_1,$$

где $M_{\text{З}}$ — масса Земли. Если Δr мало, то $r_{\text{ср}}^2 = r_1 r_2$ и

$$\Delta A = -GmM_{\text{З}}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right).$$

Таким образом, работа при перемещении из точки A в точку B определится как сумма работ на малых перемещениях Δr_i:

$$\begin{aligned} A &= \sum_i \Delta A_i, \\ A &= -\left[F_{\text{т}1}(r_1 - r_A) + F_{\text{т}2}(r_2 - r_1) + \ldots\right], \\ A &= -GmM_{\text{З}}\left[\left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_1}\right) + \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) + \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_3}\right) + \ldots \right. \\ &\quad \left. \ldots + \left(\frac{1}{r_n} - \frac{1}{r_B}\right)\right] = -GmM_{\text{З}}\left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B}\right). \end{aligned} \tag{4.4}$$

Если $r_A = R_{\text{З}}$, а $r_B \to \infty$, то

$$A = -GmM_{\text{З}}/R_{\text{З}} \tag{4.5}$$

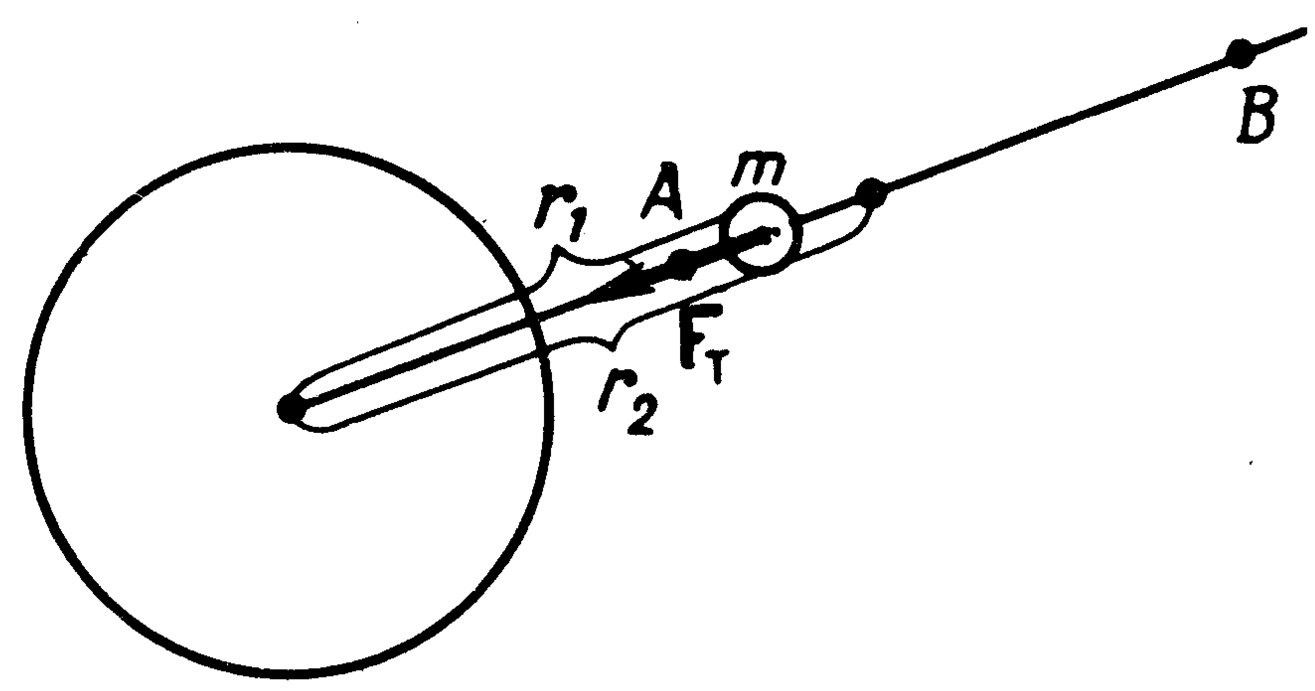


Рис. 4.5.

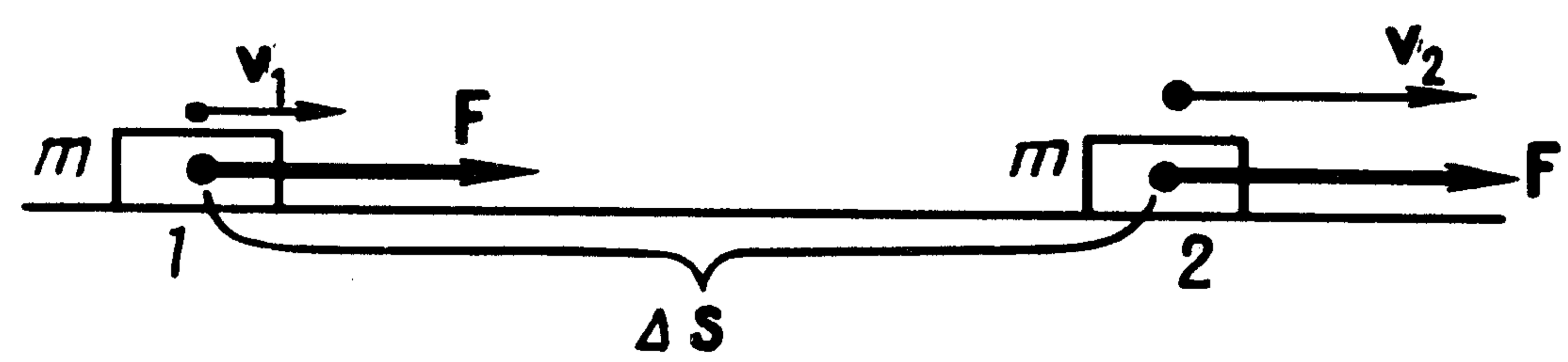


Рис. 4.6.

есть работа силы тяготения при перемещении тела с поверхности Земли в бесконечно удаленную точку траектории.

Механическая энергия характеризует способность тела совершать механическую работу. Полная механическая энергия тела складывается из *кинетической* и *потенциальной энергии.*

Кинетическая энергия — это энергия, которой обладает движущееся тело. Пусть на тело m действует сила $\mathbf{F}$, перемещение тела $\Delta \mathbf{s}$. Работа силы $\mathbf{F}$ равна (рис. 4.6)

$$A = F\Delta s \quad (\cos\alpha = 1). \tag{4.6}$$

Согласно 2-му закону Ньютона,

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a}. \tag{4.7}$$

Если в точках 1 и 2 скорость тела v_1 и v_2, то

$$\Delta s = (v_2^2 - v_1^2)/2a. \tag{4.8}$$

Подставив в (4.6) выражения (4.7) и (4.8), получим

$$A = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2}. \tag{4.9а}$$

Итак, если на тело действует сила $\mathbf{F}$, работа которой отлична от нуля, $A \neq \neq 0$, то это приводит к изменению величины $mv^2/2$, называемой кинетической энергией:

$$E_{\text{кин}} = mv^2/2. \tag{4.9б}$$

Из (4.9а) следует, что изменение кинетической энергии равно работе силы, действующей на тело. Если на тело действует несколько сил, то изменение кинетической энергии равно алгебраической сумме работ, совершаемых при данном перемещении каждой из сил.

Потенциальной энергией обладает система тел, взаимодействующих между собой, если силы взаимодействия консервативны. *Консервативной* (потенциальной) силой называется сила, работа которой не зависит от формы траектории, а определяется только положением начальной и конечной точек траектории.

Рассмотрим перемещение массы m из точки 1 в точку 2 по различным траекториям (рис. 4.7). Работа силы тяжести тела по прямой $1 \longrightarrow 2$ определяется выражением

$$A_{\text{I}} = mgl\cos\alpha.$$

Поскольку $h = l\cos\alpha$,

$$A_{\text{I}} = mgh.$$

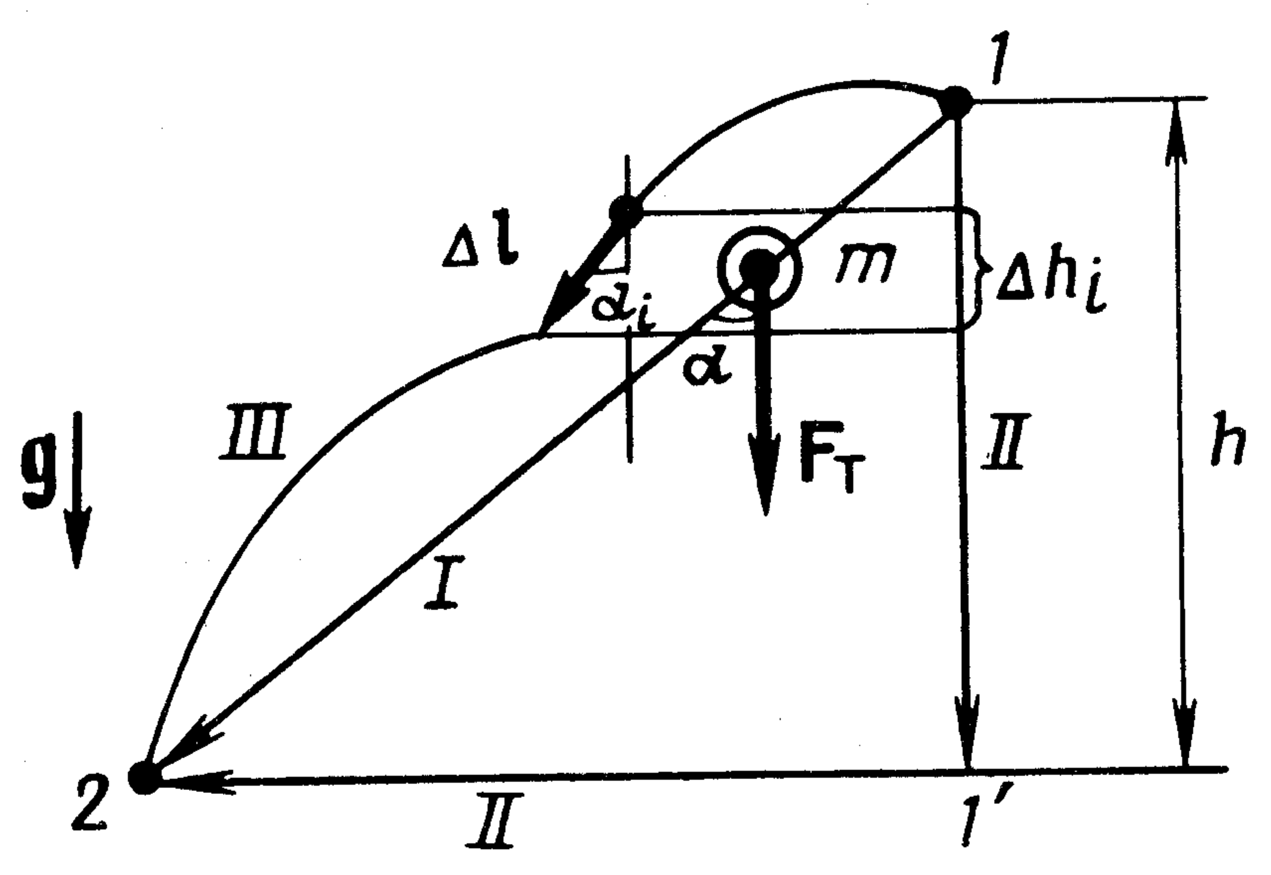


Рис. 4.7.

Работа силы тяжести при движении тела по траектории $1 \longrightarrow 1' \longrightarrow 2$:

$$A_{\text{II}} = A_{1 \longrightarrow 1'} + A_{1' \longrightarrow 2} = mgh + 0.$$

Подсчитаем работу силы тяжести при движении тела по траектории III. Представим траекторию с какой угодно степенью точности в виде ломаной, состоящей из вертикальных и горизонтальных отрезков. Тогда работа силы тяжести при перемещении по горизонтали равна нулю, по вертикальным отрезкам Δh_i $\Delta A_i = mg\Delta h_i$. Суммарная работа есть

$$A = \sum_i \Delta A_i = mg \sum_i \Delta h_i = mgh. \tag{4.10}$$

Как показано, работа силы тяжести не зависит от траектории. Сила тяжести — консервативная сила. Очевидно, что работа консервативной силы по замкнутому контуру равна нулю. Сила тяготения и сила упругости также являются консервативными силами. При падении тела потенциальная энергия уменьшается. Из (4.9) следует

$$\Delta E_{\text{п}} = -A_{\text{т}}.$$

Изменение потенциальной энергии равно работе консервативной силы, взятой с обратным знаком:

$$\Delta E_{\text{п}} = -A_{\text{конс}}, \quad A_{\text{конс}} = E_{\text{п.нач}} - E_{\text{п.кон}}.$$

Потенциальная энергия рассчитывается с точностью до постоянной величины, поэтому всегда надо указывать нулевой уровень отсчета потенциальной энергии. Итак, потенциальная энергия тела, поднятого на высоту h ($h << R_{\text{З}}$), равна

$$E_{\text{п}} = mgh. \tag{4.11}$$

Потенциальная энергия, обусловленная силой тяготения, есть

$$E_{\text{п}} = -GmM_{\text{З}}/r; \quad E_{\text{п}} = 0 \quad \text{при} \quad r \longrightarrow \infty. \tag{4.12}$$

Потенциальная энергия сжатой или растянутой пружины равна

$$E_{\text{п}} = kx^2/2, \quad E_{\text{п}} = 0 \quad \text{при} \quad x = 0. \tag{4.13}$$

Как видно из примеров, потенциальная энергия зависит от взаимного расположения тел или частей тела. Неконсервативными силами в механике являются сила трения и сила сопротивления.

Рассмотрим систему двух тел. На тела могут действовать внешние и внутренние силы, которые могут быть консервативными и неконсервативными. Изменение кинетической энергии каждого из тел равно сумме работ всех сил, действующих на это тело, а именно, для первого тела:

$$\Delta E_{k1} = A_{\text{внеш}1} + A_{\text{внутр}1}.$$

Подробно остановимся на этих силах. Сила трения может быть как внутренней, так и внешней силой; обозначим работу всех сил трения $A_{\text{тр}1}$. На тело действуют консервативные внутренние силы, работа которых $A_{\text{внутр.конс.}1}$. Тело может находиться и в поле внешних консервативных сил, работа которых приведет к изменению потенциальной энергии $A_{\text{конс}1} = -\Delta E_{\text{п}1}$. На тело может действовать также внешняя сила, которой мы не будем ставить в соответствие изменение потенциальной энергии. Ее работа есть $A_{\text{внеш}1}$.

Тогда изменение кинетической энергии тел определяется по формуле

$$\Delta E_{\text{к}1} = A_{\text{внеш.конс.}1} + A_{\text{внутр.конс.}1} + A_{\text{внеш}1} + A_{\text{тр}1}.$$

Аналогично, для второго тела имеем

$$\Delta E_{\text{к}2} = A_{\text{внеш.конс.}2} + A_{\text{внутр.конс.}2} + A_{\text{внеш}2} + A_{\text{тр}2}.$$

Поскольку

$$A_{\text{внеш.конс.}1} = -\Delta E_{\text{п}1},$$
$$A_{\text{внеш.конс.}2} = -\Delta E_{\text{п}2},$$

сложив левые и правые части уравнений и перенеся $\Delta E_{\text{п}}$ в левую часть, для изменения полной механической энергии системы, равной

$$E_{\text{мех}} = E_{\text{к}1} + E_{\text{к}2} + E_{\text{п}1} + E_{\text{п}2},$$

получим

$$\Delta E_{\text{мех}} = (A_{\text{внутр.конс.}1} + A_{\text{внутр.конс.}2}) + (A_{\text{внеш}1} + A_{\text{внеш}2}) + (A_{\text{тр}1} + A_{\text{тр}2}).$$

Согласно 3-му закону Ньютона, сумма работ внутренних сил равна 0, это означает, что

$$\Delta E_{\text{мех}} = A_{\text{внеш}} + A_{\text{тр}}, \tag{4.14}$$

т. е. изменение механической энергии равно работе внешних сил и сил трения.

Закон сохранения механической энергии

Механическая энергия системы сохраняется, если работа внешних сил, действующих на тела, входящие в систему, равна нулю и отсутствуют силы трения, т. е. нет перехода механической энергии в другие виды энергии, например, в тепло:

$$E_{\text{мех}} = E_{\text{п}} + E_{\text{к}} = \text{const}.$$

Отметим, что законы сохранения позволяют по начальному состоянию системы (по начальным скоростям) определить конечное состояние не выясняя все детали взаимодействия тел и не уточняя величины сил взаимодействия.

Мощность, развиваемая постоянной силой тяги, равна отношению работы этой силы на некотором перемещении к промежутку времени, за которое это перемещение произошло. Мощность определяется по формуле

$$P = A/t. \tag{4.15}$$

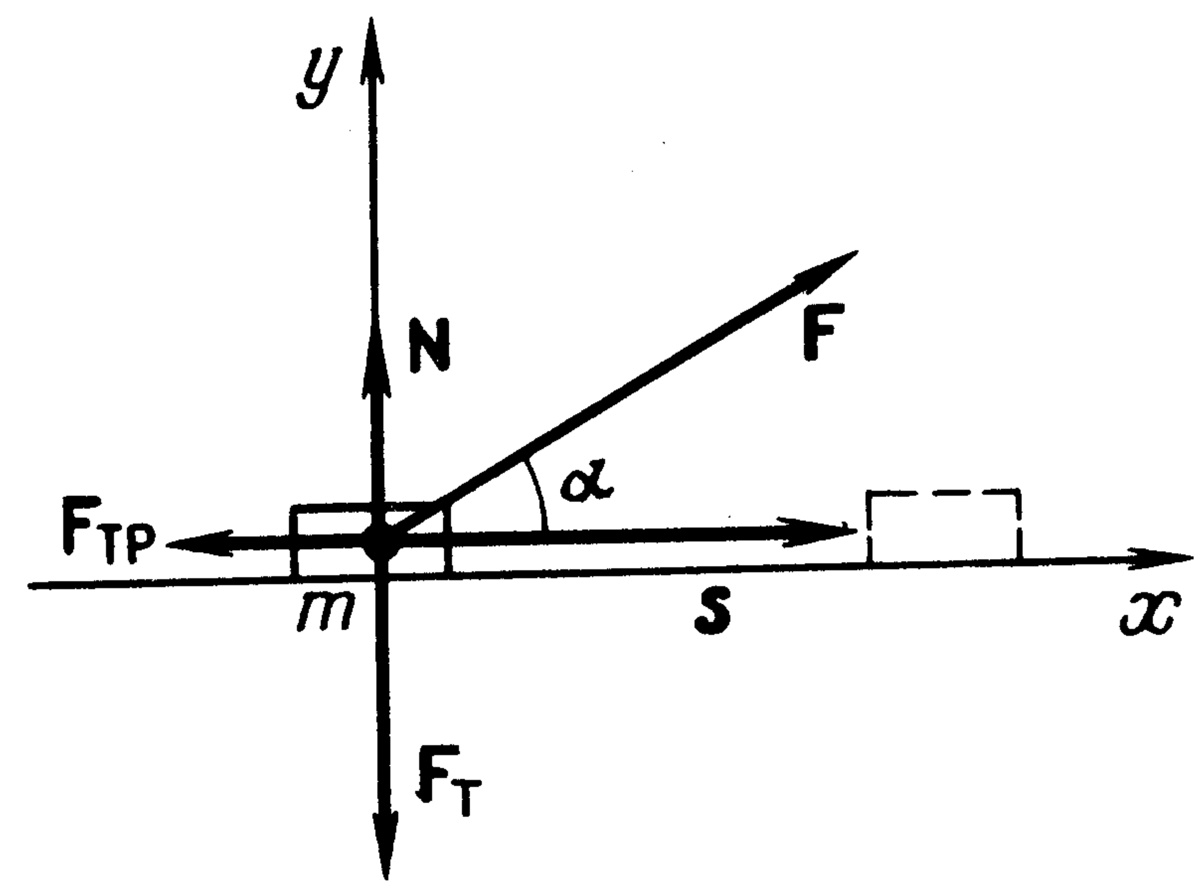


Рис. 4.8.

Поскольку $A = F_s s$, то, подставляя это выражение в формулу (4.15), получим

$$P = F_s s/t = F_s v = Fv\cos\alpha, \tag{4.16}$$

где v — скорость тела, α — угол между векторами $\mathbf{F}$ и $\mathbf{v}$. Если движение тела равномерное, то под v в (4.16) понимается скорость равномерного движения. Если движение неравномерное, но требуется определить среднюю мощность, развиваемую силой тяги на перемещении s, то под v в (4.16) понимается средняя скорость перемещения. Если же требуется найти мощность в некоторый заданный момент времени (мгновенную мощность), то, беря малые промежутки времени и переходя к пределу при $\Delta t \longrightarrow 0$, получим

$$P = F_s \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = F_s v_{\text{мгн}} = F v_{\text{мгн}} \cos\alpha, \tag{4.17}$$

т. е. $v_{\text{мгн}}$ — мгновенная скорость тела. Понятие мощности вводится для оценки работы за единицу времени, которую может совершить какой-то механизм (насос, подъемный кран, мотор машины и т. д.). Поэтому в формулах (4.14)–(4.17) под F всегда понимается только сила тяги.

Примеры решения задач

Задача 1. На тело массой 10 кг, движущееся по горизонтальной плоскости, действует сила $F = 100$ Н под углом $\alpha = 30°$. Определить работы всех сил, действующих на тело, а также их суммарную работу при перемещении тела вдоль плоскости на $s = 10$ м. Коэффициент трения между телом и плоскостью $k = 0{,}1$.

Дано: $F = 100\,\text{Н}$, $m = 10\,\text{кг}$, $k = 0{,}1$, $\alpha = 30°$, $s = 10\,\text{м}$; A_F — ? A_T — ? $A_{\text{тр}}$ — ? A_N — ? A — ?

Решение. На рис. 4.8 показаны силы, действующие на тело: сила тяжести $\mathbf{F}_{\text{т}} = m\mathbf{g}$, сила $\mathbf{F}$, сила нормальной реакции $\mathbf{N}$, сила трения $F_{\text{тр}} = kN$. Выберем систему координат, как показано на рис. 4.8. Работа силы $\mathbf{F}$ при перемещении тела на s (таким же будет перемещение точки приложения всех сил) равна

$$A_F = Fs\cos\alpha.$$

Работа силы трения есть

$$A_{\text{тр}} = F_{\text{тр}} s \cos\alpha_1,$$

где α_1 — угол между направлением силы трения и перемещением, равный 180°, следовательно,

$$A_{\text{тр}} = -F_{\text{тр}}s = -kNs.$$

Силу N определяем из рассмотрения проекций сил на ось y:

$$N + F\sin\alpha - mg = 0,$$

$$N = mg - F\sin\alpha,$$

и окончательно

$$A_{\text{тр}} = -k(mg - F\sin\alpha)s.$$

Работа силы нормальной реакции есть

$$A_N = Ns\cos\alpha_2,$$

где α_2 — угол между векторами $\mathbf{N}$ и $\mathbf{s}$, равный 90°, таким образом, $A_N = 0$. Работа силы тяжести

$$A_{\text{т}} = mgs\cos\alpha_3,$$

где α_3 — угол между векторами $\mathbf{F}_{\text{т}}$ и $\mathbf{s}$, равный $\alpha_3 = -90°$, откуда $A_{\text{т}} = 0$. Суммарная работа A всех сил, действующих на тело, равна

$$A = A_F + A_{\text{тр}} + A_{\text{т}} + A_N = A_F + A_{\text{тр}},$$

и окончательно

$$A = [F\cos\alpha - k(mg - F\sin\alpha)]s,$$

$$[A] = [\text{Н} - (\text{кг}\cdot\text{м/с}^2 - \text{Н})]\text{м} = \text{Н}\cdot\text{м} = \text{Дж}.$$

Подставив данные задачи, получим

$$A_F = 100\cdot 10\sqrt{3/2}\,\text{Дж} = 865\,\text{Дж},$$

$$A_{\text{тр}} = -0,1(10\cdot 10 - 100\cdot 0,5)10 = -50\,\text{Дж},$$

$$A = 815\,\text{Дж}.$$

Для определения средней мощности, развиваемой силой тяги на перемещении $\Delta\mathbf{s}$, необходимо определить время движения тела:

$$P = A/t = Fs(\cos\alpha)/t. \tag{4.18}$$

Поскольку в горизонтальном направлении действуют две силы: проекция силы тяги F и сила трения $F_{\text{тр}}$. Ускорение, с которым движется тело, равно

$$a = (F\cos\alpha - F_{\text{тр}})/m = [F\cos\alpha - k(mg - F\sin\alpha)]/m.$$

Перемещение $s = at^2/2$, откуда

$$t = \sqrt{2s/a}.$$

Подставив выражение для t в (4.18), получим

$$P = \frac{F\cos\alpha}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{s[F\cos\alpha - k(mg - F\sin\alpha)]}{m}},$$

$$[P] = \text{Н}\sqrt{\frac{\text{м}(\text{Н}-\text{Н})}{\text{кг}}} = \text{Н}\sqrt{\frac{\text{м}\cdot\text{кг}\cdot\text{м}}{\text{кг}\cdot\text{с}^2}} = \text{Н}\frac{\text{м}}{\text{с}} = \frac{\text{Дж}}{\text{с}} = \text{Вт},$$

$$P = 778\,\text{Вт}.$$

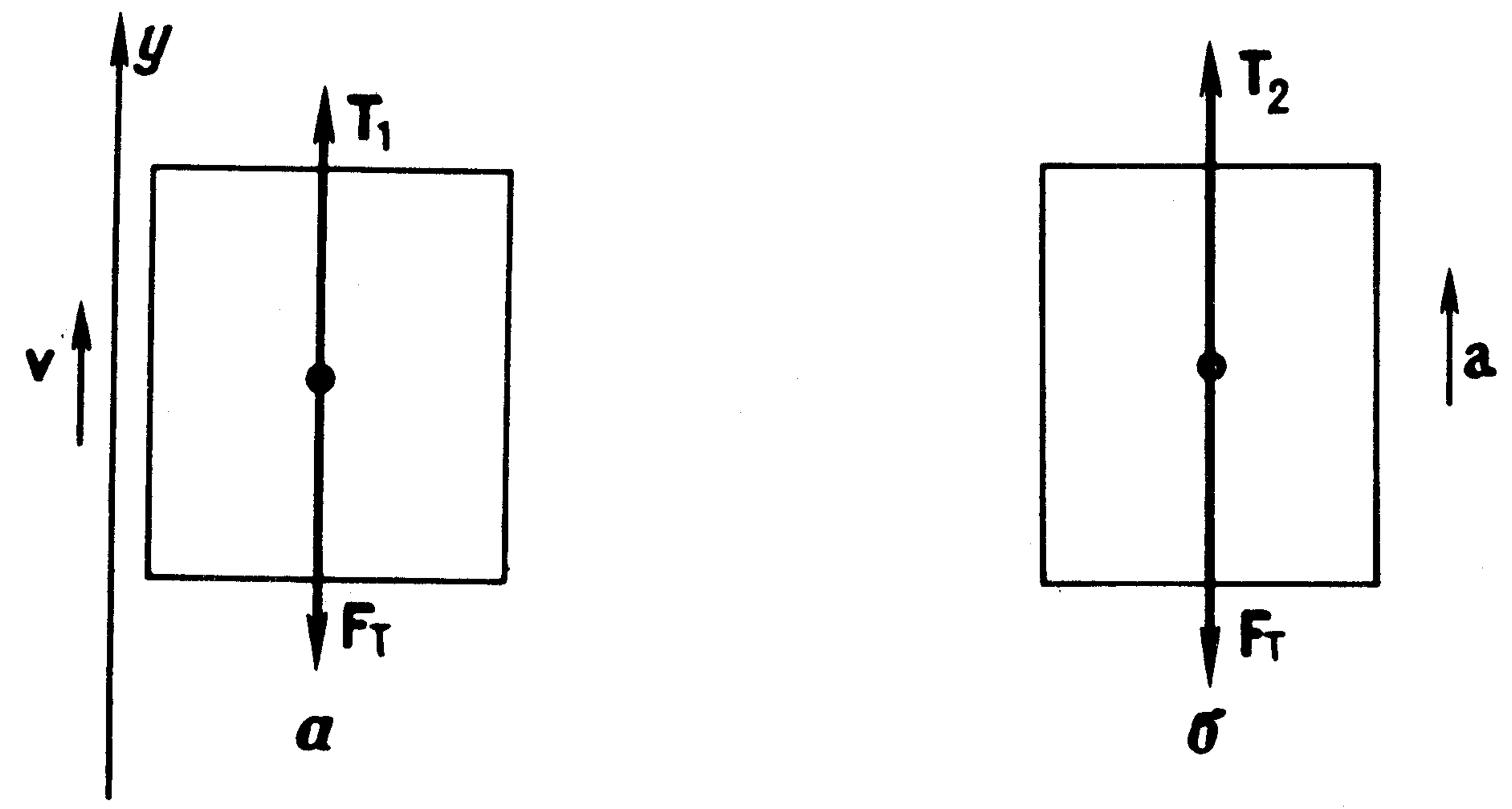


Рис. 4.9.

Задача 2. Лифт массой $m = 10^3$ кг поднимается на высоту $h = 9$ м за время 3 с. Сравнить работу по подъему лифта в двух случаях:

1) лифт поднимается равномерно;

2) лифт поднимается равноускоренно, начальная скорость равна нулю.

Дано: $m = 10^3\,$кг, $h = 9\,$м, $t = 3\,$с, $g = 10\,$м/с^2; A — ?

Решение. 1) Рассмотрим случай равномерного подъема лифта. На лифт действуют две силы: сила тяжести $\mathbf{F}_\text{т} = m\mathbf{g}$ и сила тяги $\mathbf{T}_1$. Ось y направим вертикально вверх (рис. 4.9,*а*). Так как лифт движется равномерно, имеем

$$\mathbf{T}_1 + m\mathbf{g} = 0, \tag{4.19}$$

или в проекциях на ось y

$$T_1 - mg = 0, \quad T_1 = mg. \tag{4.20}$$

Работу по перемещению лифта совершает сила тяги:

$$A = T_1 \Delta s \cos\alpha, \tag{4.21}$$

где $\Delta s = h$, а $\cos\alpha = 1$, так как вектора $\mathbf{T}_1$ и $\Delta\mathbf{s}$ направлены вертикально вверх, поэтому $\alpha = 0$. Подставив выражение (4.20) в (4.21), получим

$$A = mgh = \Delta E_\text{пот},$$

$$A = 10^3 \cdot 10 \cdot 9\,\text{Дж} = 9 \cdot 10^4\text{Дж}.$$

Следовательно, при равномерном подъеме лифта работа по его подъему приводит к изменению его потенциальной энергии.

2) При равноускоренном подъеме лифта на него действуют также две силы: сила тяжести $\mathbf{F}_\text{т}$ и сила тяги $\mathbf{T}_2$. Запишем основной закон динамики

$$m\mathbf{a} = \mathbf{T}_2 + m\mathbf{g},$$

или в проекции на ось y

$$ma = T_2 - mg,$$

откуда

$$T_2 = m(g + a). \tag{4.22}$$

Подставив в уравнение (4.21) выражение для T_2 (4.22), получим

$$A = m(g + a)h = mgh + mah = \Delta E_\text{п} + \Delta E_\text{к}.$$

Ускорение найдем из выражения (помня, что $v_0 = 0$) $h = at^2/2$:

$$a = 2h/t^2.$$

Окончательно

$$A = 10^3 \cdot 9(10 + 2 \cdot 9/9)\,\text{Дж} = 10,8 \cdot 10^4\,\text{Дж}.$$

Работа во втором случае больше, так как изменяются и потенциальная, и кинетическая энергии.

Задача 3. Автомобиль массой $m = 2000$ кг движется вверх по наклонной плоскости с уклоном 0,1, развивая на пути 100 м скорость $v_к = 36$ км/ч. Коэффициент трения $k = 0,05$. Найти среднюю и максимальную мощность двигателя автомобиля при разгоне.

Дано: $m = 2000\,\text{кг}$, $s = 100\,\text{м}$, $\sin\alpha = 0,1$, $k = 0,05$, $v_0 = 0$, $v_к = 36\,\text{км/ч}\,(10\text{м/с})$; $P_{ср}$ — ? $P_{\max}$ — ?

Решение. Автомобиль движется равноускоренно, причем начальная скорость равна нулю. Выберем ось x вдоль наклонной плоскости, ось y — перпендикулярно ей (рис. 4.10).

На автомобиль действуют четыре силы: сила тяжести $\mathbf{F}_т = m\mathbf{g}$, сила реакции опоры $\mathbf{N}$, сила тяги $\mathbf{F}$ и сила трения $\mathbf{F}_{тр}$. Запишем основной закон динамики:

$$m\mathbf{a} = \mathbf{N} + m\mathbf{g} + \mathbf{F} + \mathbf{F}_{тр}. \tag{4.23}$$

Уравнение (4.23) в проекциях на оси координат:

$$\begin{aligned} &\text{на ось } x \quad && ma = F - mg\sin\alpha - F_{тр}, \\ &\text{на ось } y \quad && 0 = N - mg\cos\alpha, \\ & && F_{тр} = kN. \end{aligned} \tag{4.24}$$

Выразим из уравнений (4.24) силу тяги F:

$$F = mg\sin\alpha + kmg\cos\alpha + ma. \tag{4.25}$$

Ускорение равно

$$a = \frac{v_к^2 - v_0^2}{2s} = \frac{v_к^2}{2s}.$$

Найдем работу двигателя автомобиля на этом участке:

$$A = F\Delta s\cos\beta, \tag{4.26}$$

где β — угол между $\mathbf{F}$ и $\Delta\mathbf{s}$, равный нулю. Подставив в (4.26) выражение для F (4.25), получим

$$A = (mg\sin\alpha + kmg\cos\alpha + mv_k^2/2s)s.$$

Средняя мощность $P_{ср}$ по (4.15) равна

$$P_{ср} = A/\Delta t, \quad \Delta t = (v_к - v_0)/a = 2s/v_к,$$

откуда

$$P_{ср} = \frac{m(g\sin\alpha + kg\cos\alpha + v_к^2/2s)s}{2s/v_к} =$$

$$= m(g\sin\alpha + kg\cos\alpha + v_к^2/2s)(v_к/2).$$

Согласно (4.17), максимальная мощность двигателя автомобиля достигается в тот момент, когда скорость максимальна:

$$P_{\text{max}} = F v_{\text{max}} \cos\beta, \quad v_{\text{max}} = v_{\text{к}},$$
$$P_{\text{ср}} = 2 \cdot 10^4 \text{Вт}, \quad P_{\text{max}} = 4 \cdot 10^4 \text{Вт}.$$

Задача 4. Пуля массы 10 г, летящая со скоростью 500 м/с, пробивает доску толщиной 50 см и вылетает со скоростью 200 м/с. Определить среднюю силу сопротивления, которая действовала на пулю.

Дано: $m = 10\,\text{г}\ (0,01\text{кг})$, $v_1 = 500\,\text{м/с}$, $v_2 = 200\,\text{м/с}$, $l = 50\,\text{см}$ (0,5 м); $F_{\text{сопр.ср.}}$ — ?

Решение. Изменение кинетической энергии пули обусловлено действием на нее силы сопротивления, работа которой равна

$$A = -F_{\text{сопр}} l.$$

Знак минус берется потому, что сила сопротивления направлена в сторону, противоположную направлению перемещения. Изменение кинетической энергии пули равно

$$\Delta E_{\text{кин}} = E_{k2} - E_{k1},$$

где

$$E_{k1} = m v_1^2/2, \quad E_{k2} = m v_2^2/2.$$

Следовательно,

$$\frac{m v_2^2}{2} - \frac{m v_1^2}{2} = -F_{\text{сопр}} l,$$

откуда

$$F_{\text{сопр}} = (m/2l)(v_1^2 - v_2^2),$$
$$F_{\text{сопр}} = 2100\,\text{Н}.$$

Задача 5. Из колодца, на 3/4 заполненного водой, насосом откачивают воду. Глубина колодца $h = 20$ м, площадь поперечного сечения $S = 1\,\text{м}^2$. Продолжительность откачки 30 мин, площадь поперечного сечения трубы, через которую производится откачка, $s = 25\text{см}^2$. Определить мощность насоса (рис. 4.11). Плотность воды $\rho_{\text{в}} = 10^3 \text{кг/м}^3$.

Дано: $h_0 = (3/4)h$, $h = 20\,\text{м}$, $S = 1\,\text{м}^2$, $s = 25\,\text{см}^2$ $(2,5 \cdot 10^{-3}\,\text{м}^2)$, $t = 30\,\text{мин}\,(1,8 \cdot 10^3\,\text{с})$, $\rho_{\text{в}} = 10^3\,\text{кг/м}^3$; P — ?

Решение. Согласно (4.15), мощность определится из $P = A/t$, где A — произведенная насосом работа, t — продолжительность откачки. Работа насоса расходуется на сообщение воде кинетической энергии и на подъем воды, т. е. на увеличение ее потенциальной энергии:

$$A = \Delta E_{\text{к}} + \Delta E_{\text{п}}, \quad \Delta E_{\text{к}} = E_{\text{к}2} - E_{\text{к}1},$$

Энергия $E_{\text{к}1} = 0$, так как вода в колодце неподвижна, $E_{\text{к}2} = mv^2/2$. Масса воды в объеме $m = \rho_{\text{в}} V = \rho(3/4)hS$. Скорость течения воды определится из выражения $(3/4)hS = svt$, так как каждую секунду через поперечное сечение трубы протекает объем воды sv, откуда $v = (3/4)hS/ts$. Изменение кинетической энергии

$$\Delta E_{\text{к}} = (\rho_{\text{в}}/2)[(3/4)hS]^3(1/t^2 s^2).$$

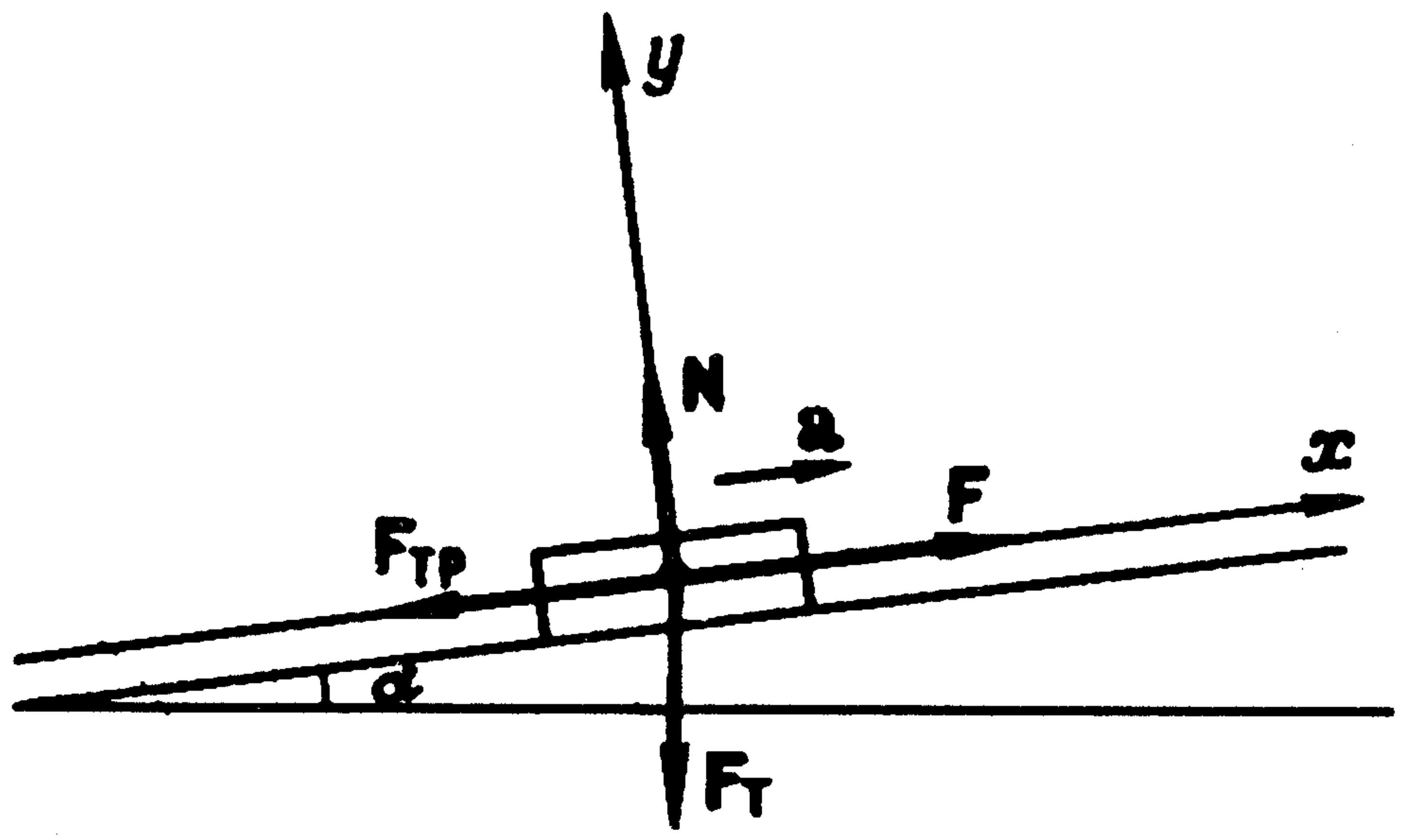


Рис. 4.10.

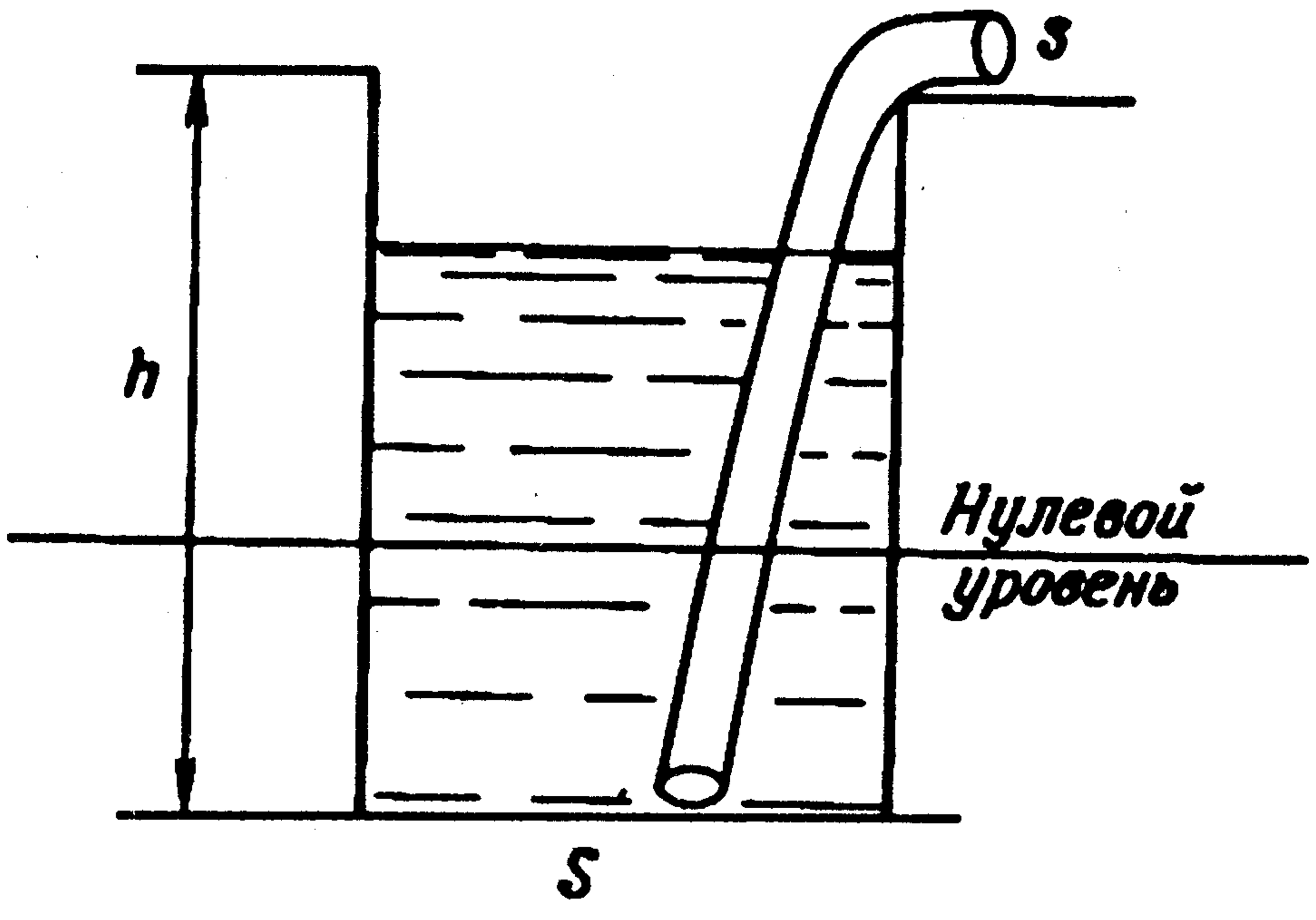


Рис. 4.11.

Изменение потенциальной энергии определяется изменением положения центра тяжести воды. В качестве нулевого уровня потенциальной энергии примем положение центра тяжести в начале, когда вода была неподвижна, т. е. на глубине $(3/8)h$ от дна колодца ($E_{\text{п}1} = 0$). При выкачивании вся вода выливается на поверхность земли и ее потенциальная энергия увеличивается: $E_{\text{п}2} = mg(5/8)h$, откуда

$$\Delta E_{\text{п}} = mg(5/8)h - 0 = \rho_{\text{в}} g(5/8)h(3/4)hS = \rho_{\text{в}} Sg\frac{15}{32}h^2.$$

Следовательно,

$$A = \rho_{\text{в}}\left[\left(\frac{3}{4}hS\right)^3\frac{1}{2t^2s^2} + Sg\frac{15}{32}h^2\right],$$

а искомая мощность

$$P = \frac{\rho_{\text{в}}}{t}\left[\left(\frac{3}{4}hS\right)^3\frac{1}{2t^2s^2} + Sg\frac{15}{32}h^2\right],$$

$$[P] = \frac{\text{кг}}{\text{м}^3\cdot\text{с}}\frac{\text{м}^5}{\text{с}^2} = \text{Вт},$$

$$P = 1088\,\text{Вт}.$$

Задача 6. *Абсолютно упругий удар* — взаимодействие, в результате которого механическая энергия сохраняется.

Найти скорости двух шаров u_1 и u_2 после прямого абсолютно упругого удара. Прямым ударом называется удар, при котором векторы скорости лежат на линии, соединяющей центры шаров. Массы шаров m_1 и m_2, скорости до удара $\mathbf{v}_1$ и $\mathbf{v}_2$ соответственно (рис. 4.12).

Дано: m_1, m_2, v_1, v_2, u_1 — ?u_2 — ?

Решение. Будем считать, что трение отсутствует, так как о силе трения ничего не говорится в условии задачи. Закон сохранения импульса выполняется (случай I):

$$m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2 = m_1\mathbf{u}_1 + m_2\mathbf{u}_2.$$

Запишем это уравнение в проекции на ось x, предположив, что после удара шары разлетаются в разные стороны

$$m_1v_1 - m_2v_2 = -m_1u_1 + m_2u_2. \tag{4.27}$$

Поскольку удар абсолютно упругий, запишем закон сохранения энергии

$$\frac{m_1v_1^2}{2} + \frac{m_2v_2^2}{2} = \frac{m_1u_1^2}{2} + \frac{m_2u_2^2}{2}. \tag{4.28}$$

Уравнения (4.27) и (4.28) образуют систему двух уравнений относительно двух неизвестных u_1 и u_2.

Для решения этой системы перенесем все члены, содержащие m_1, в левую, а m_2 в правую часть уравнений:

$$m_1(v_1 + u_1) = m_2(v_2 + u_2),$$
$$m_1(v_1^2 - u_1^2) = m_2(u_2^2 - v_2^2).$$

Разделив левые и правые части равенств друг на друга, получим

$$v_1 - u_1 = u_2 - v_2,$$

откуда

$$u_2 = v_1 + v_2 - u_1.$$

Подставив в (4.27), получим уравнение относительно u_1:

$$m_1v_1 - m_2v_2 = -m_1u_1 + m_2(v_1 + v_2) - m_2u_1,$$

откуда

$$u_1 = \frac{2m_2v_2 + v_1(m_2 - m_1)}{m_1 + m_2}.$$

Аналогично для u_2 имеем

$$u_2 = \frac{2m_1v_1 + v_2(m_1 - m_2)}{m_1 + m_2}.$$

Если массы шаров равны, то

$$u_1 = v_2, \quad u_2 = v_1,$$

т. е. после прямого абсолютно упругого удара тела обмениваются скоростями.

Задача 7. На нити длиной $l = 2$ м висит небольшой ящик с песком массой $m = 2$ кг. Пуля, летящая горизонтально, попадает в ящик и застревает в нем, при этом максимальное отклонение нити составляет 30°. Определить скорость пули v_0, если масса пули $m_0 = 10$ г. (Это устройство называется *баллистическим маятником* и используется для определения скорости пуль.) Размеры ящика существенно меньше длины нити.

Дано : $m = 2$ кг, $m_0 = 10$ г (0,01 кг), $\alpha = 30°$, $l = 2$ м; v_0 — ?

Решение. Взаимодействие пули и ящика абсолютно неупругое. Выберем направление оси x, как показано на рис. 4.13, и так как проекции внешних сил на ось x равны 0, то закон сохранения импульса для системы ящик — пуля в проекциях на ось x запишется в виде

$$m_0v_0 = (m_0 + m)v. \tag{4.29}$$

Из (4.29) можно определить v_0, если известно v.

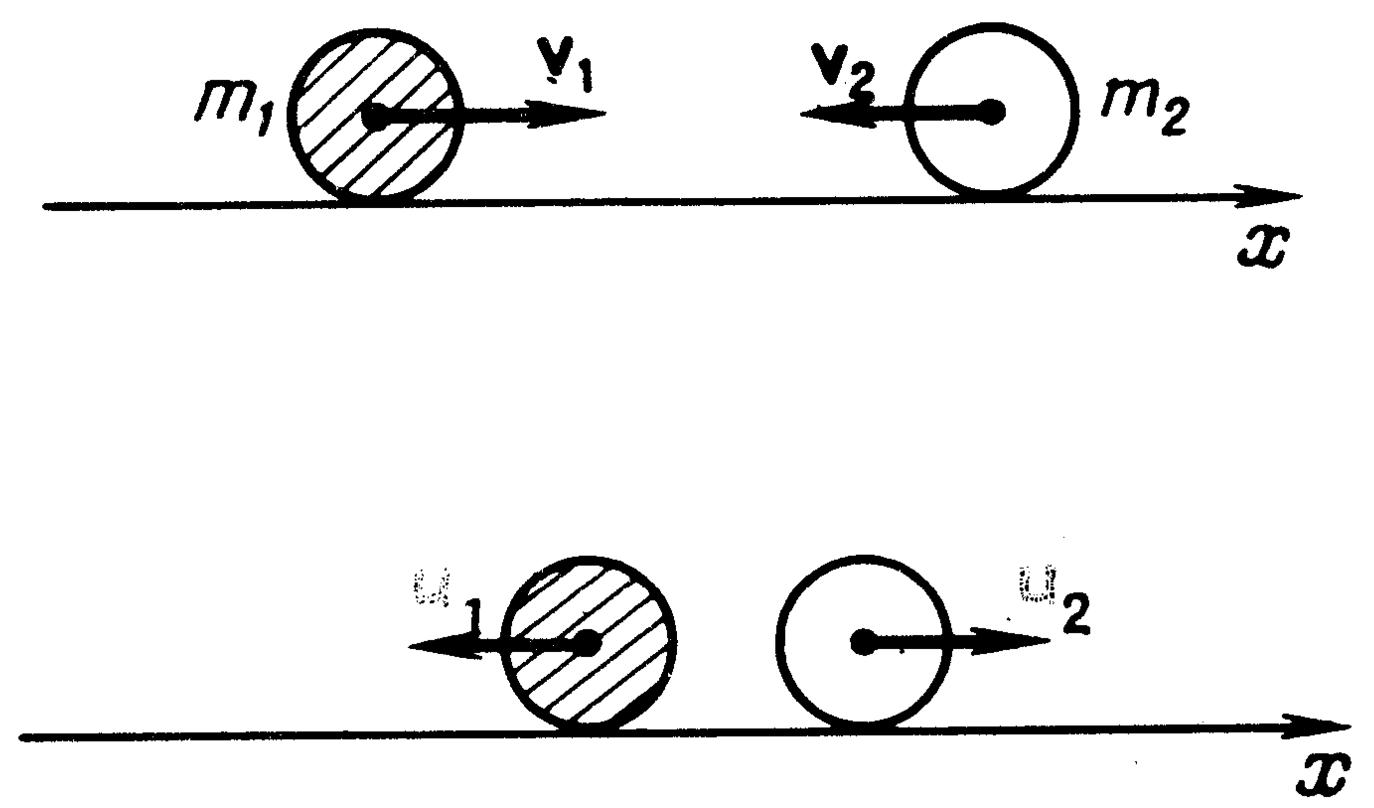


Рис. 4.12.

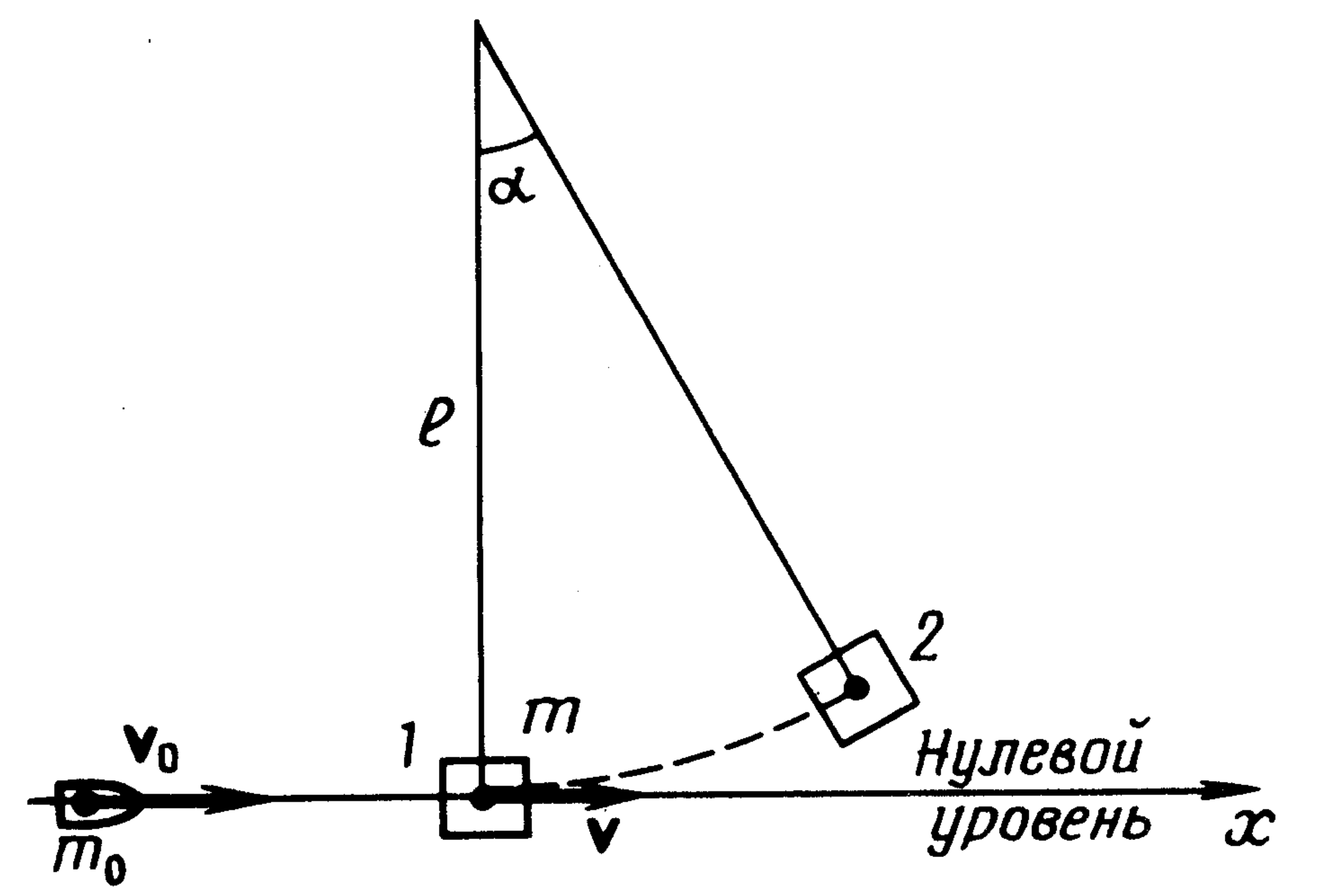


Рис. 4.13.

Воспользуемся законом сохранения механической энергии. Выберем нулевой уровень отсчета потенциальной энергии, совпадающий с осью x. Тогда в положении 1 ящик с застрявшей в нем пулей обладает только кинетической энергией, в положении 2 — только потенциальной энергией:

$$E_{\text{к}1} = (m + m_0)v^2/2, \quad E_{\text{п}2} = (m + m_0)gh.$$

Из рис. 4.13 следует, что $h = l - l\cos\alpha$. Тогда закон сохранения механической энергии имеет вид

$$(m + m_0)v^2/2 = (m + m_0)gl(1 - \cos\alpha),$$

откуда

$$v = \sqrt{gl(1 - \cos\alpha)}.$$

Следовательно,

$$v_0 = \frac{m_0 + m}{m_0}\sqrt{gl(1 - \cos\alpha)},$$

$$v_0 = 347\,\text{м/с}.$$

Задача 8. На гладком столе лежит канат длиной l, один из концов которого немного свисает. Определить скорость каната, когда он весь соскользнет со стола (рис. 4.14). Считать, что сила трения отсутствует.

Дано: l; v — ?

Решение. Поскольку сила трения отсутствует, воспользуемся законом сохранения механической энергии. Выберем за нулевой уровень потенциальной энергии центр тяжести каната в тот момент, когда он соскользнет со стола.

Тогда в положении 1 тело обладает только потенциальной энергией, в положении 2 — только кинетической:

$$E_{\text{п}1} = mgl/2, \quad E_{\text{к}2} = mv^2/2.$$

Приравнивая эти выражения и решая относительно v, получим

$$v = \sqrt{gl}.$$

Задача 9. Из пружинного пистолета стреляют шариком вертикально вверх. Шарик поднялся на высоту 1 м. Определить деформацию пружины перед нажатием курка, если $k_{\text{упр}} = 4 \cdot 10^2$ Н/м, масса шарика 10^{-2}кг.

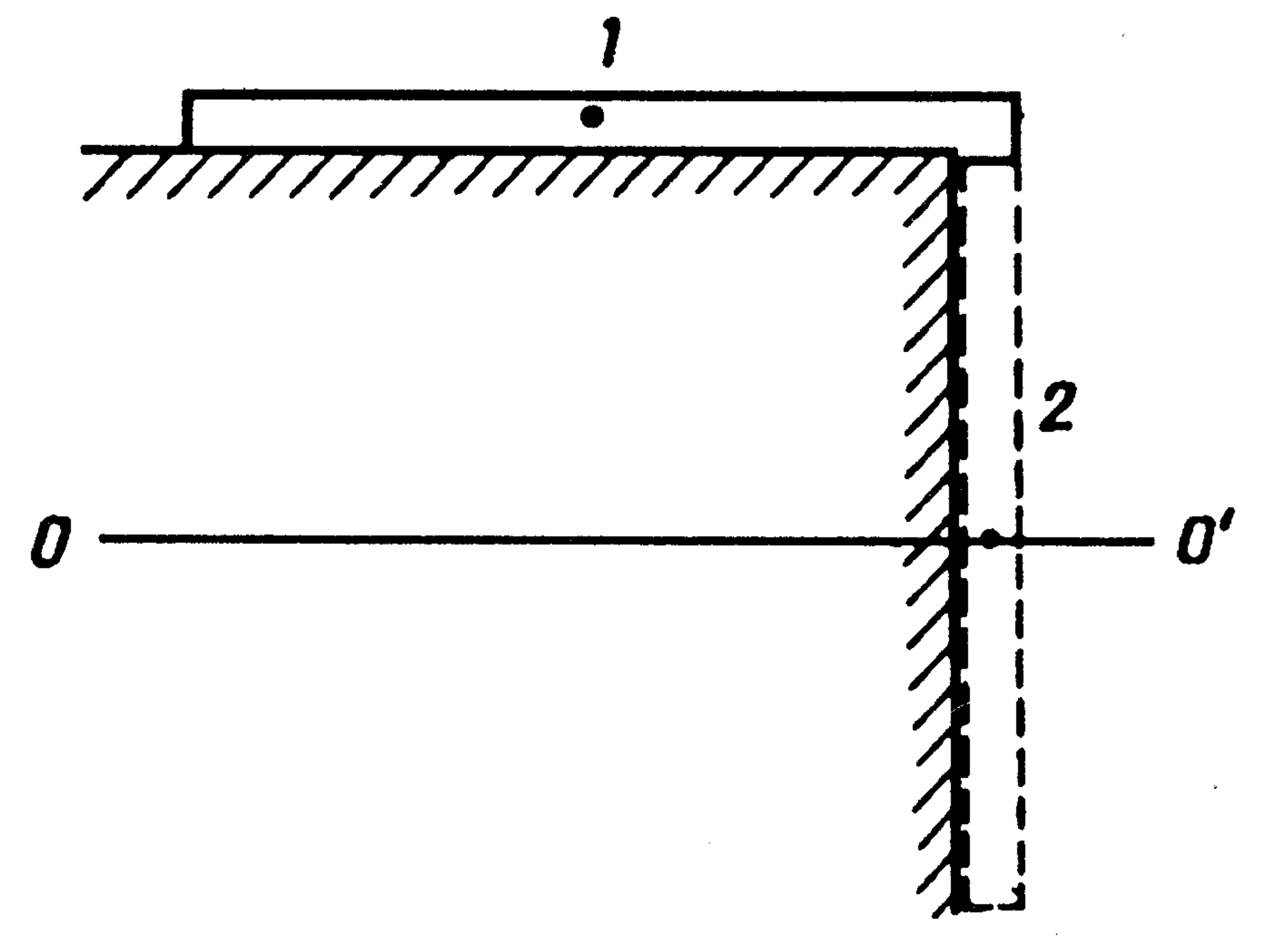


Рис. 4.14.

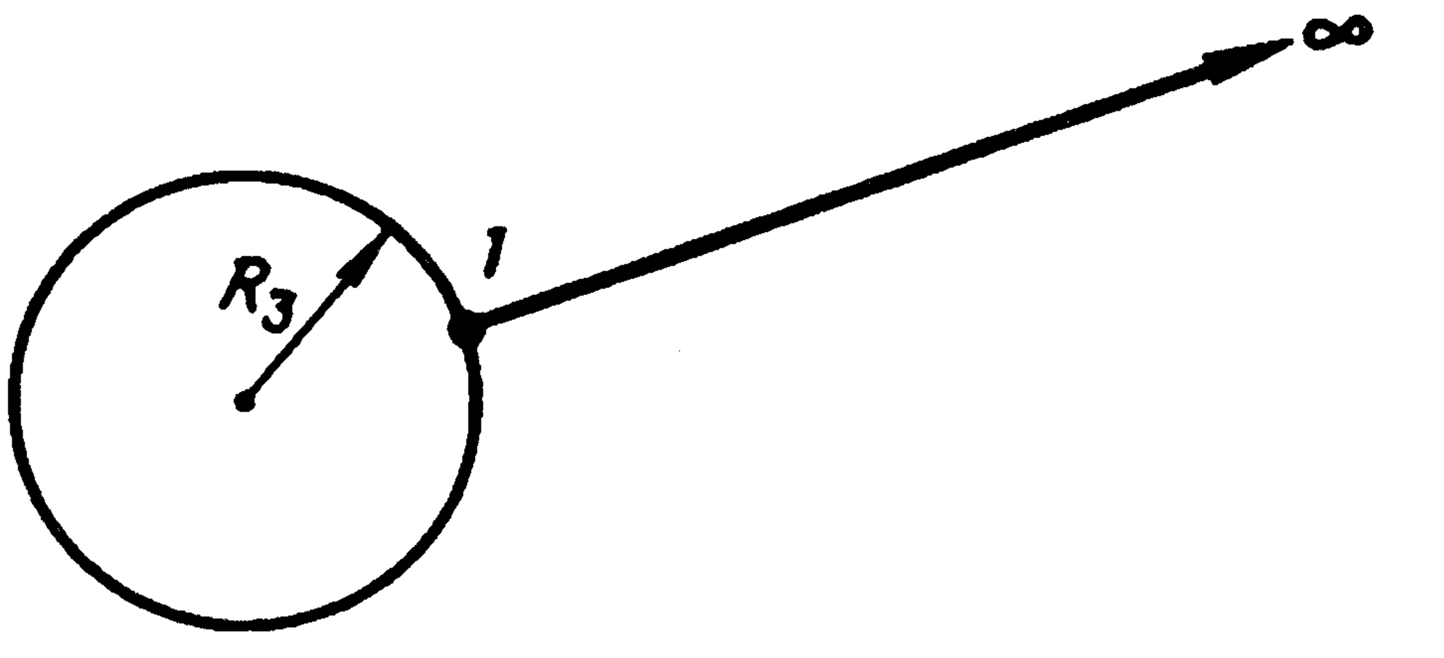


Рис. 4.15.

Дано: $m = 1 \cdot 10^{-2}$ кг, $k_{\text{упр}} = 4 \cdot 10^2$ Н/м, $h = 1$ м; x — ?

Решение. Воспользуемся законом сохранения механической энергии. Энергия сжатой пружины равна кинетической энергии шарика. Работа силы тяжести при перемещении шарика внутри ствола пистолета незначительна, поэтому ею можно пренебречь. Тогда

$$kx^2/2 = mv^2/2.$$

Кинетическая энергия шарика переходит в потенциальную энергию при полете вверх. Пусть потенциальная энергия равнялась нулю, когда скорость шарика равнялась v, т. е. в начальной точке свободного полета, следовательно,

$$mv^2/2 = mgh,$$

откуда

$$kx^2/2 = mgh,$$

$$x = \sqrt{2mgh/k},$$

$$[x] = \sqrt{\frac{\text{м}}{\text{с}^2} \cdot \text{м} \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{кг} \cdot (\text{м}/\text{с}^2)}} = \text{м},$$

$$x = \sqrt{\frac{2 \cdot 10^{-2} \cdot 10 \cdot 1}{4 \cdot 10^2}}\ \text{м} = 2,2\ \text{см}.$$

Задача 10. Какую скорость надо сообщить телу, находящемуся на поверхности Земли, чтобы оно вышло за пределы земного притяжения? (Эта скорость называется *второй космической скоростью.*)

Дано: $R_З = 6400$ км $(6,4 \cdot 10^6$ м$)$, $g = 10$ м/с^2; v_{II} — ?

Решение. В точке 1 полная механическая энергия равна сумме кинетической и потенциальной энергий. В бесконечно удаленной точке траектории потенциальную энергию считаем равной нулю (рис. 4.15). Тогда

$$E_{\text{мех}1} = mv_{\text{II}}^2/2 - GmM_З/R_З.$$

В бесконечно удаленной точке траектории $v_\infty = 0$ и $E_{\text{п}} = 0$, так что

$$E_{\text{мех}} = 0.$$

Закон сохранения энергии имеет вид

$$mv_{\text{II}}^2/2 - GmM_З/R_З = 0,$$

откуда

$$v_{\text{II}} = \sqrt{2GM_З/R_З}.$$

Так как в условии задачи $M_З$ не дано, то, воспользовавшись формулой

$$mg = GM_Зm/R_З^2,$$

получим

$$GM_З = gR_З^2, \quad v_{\text{II}} = \sqrt{2gR_З}.$$

Таким образом,

$$v_{\text{II}} = 1,1 \cdot 10^4 \text{м/с},$$

или

$$v_{\text{II}} = 11\,\text{км/с}.$$

Ниже (гл. 5) мы покажем, что 1-я космическая скорость равна $v_{\text{I}} = 8\,\text{км/с}$.

Задача 11. От удара груза массой $M = 50$ кг, падающего свободно с высоты 4 м, свая массой $m = 150$ кг погружается в грунт на 10 см. Определить силу сопротивления грунта, считая ее постоянной, а удар абсолютно неупругим.

Дано: $M = 50\,\text{кг}$, $m = 150\,\text{кг}$, $\Delta s = 10\,\text{см}\,(0,1\,\text{м})$, $h = 4\,\text{м}$; $F_{\text{сопр}}$ — ?

Решение. При падении груза на сваю его скорость $v_0 = \sqrt{2gh}$. При абсолютно неупругом взаимодействии после удара груз и свая движутся с одинаковой скоростью $\mathbf{v}$.

К системе груз — свая применим закон сохранения импульса, считая, что импульс результирующих внешних сил: силы тяжести и силы сопротивления — мал по сравнению с импульсом силы взаимодействия. Тогда в проекции на ось y (рис. 4.16) закон сохранения импульса имеет вид

$$Mv_0 = (m + M)v. \tag{4.30}$$

Кинетическая энергия системы свая — груз после удара равна

$$E_{\text{к}} = (m + M)v^2/2.$$

Изменение кинетической энергии равно сумме работ силы сопротивления и силы тяжести:

$$\Delta E_{\text{к}} = A_{\text{т}} + A_{\text{сопр}},$$

$$0 - (m + M)v^2/2 = (m + M)g\Delta s - F_{\text{сопр}}\Delta s,$$

откуда

$$F_{\text{сопр}} = (m + M)g + (M + m)v^2/2\Delta s.$$

Подставив v из (4.30), получим

$$F_{\text{сопр}} = (m + M)g + \frac{2ghM^2}{2\Delta s(m + M)},$$

$$F_{\text{сопр}} = 6890\,\text{Н}.$$

Задача 12. Бревно диаметром 60 см и длиной 2 м медленно ставят вертикально. Плотность древесины $\rho = 0,8 \cdot 10^3 \text{кг/м}^3$. Какая работа при этом совершена внешними силами?

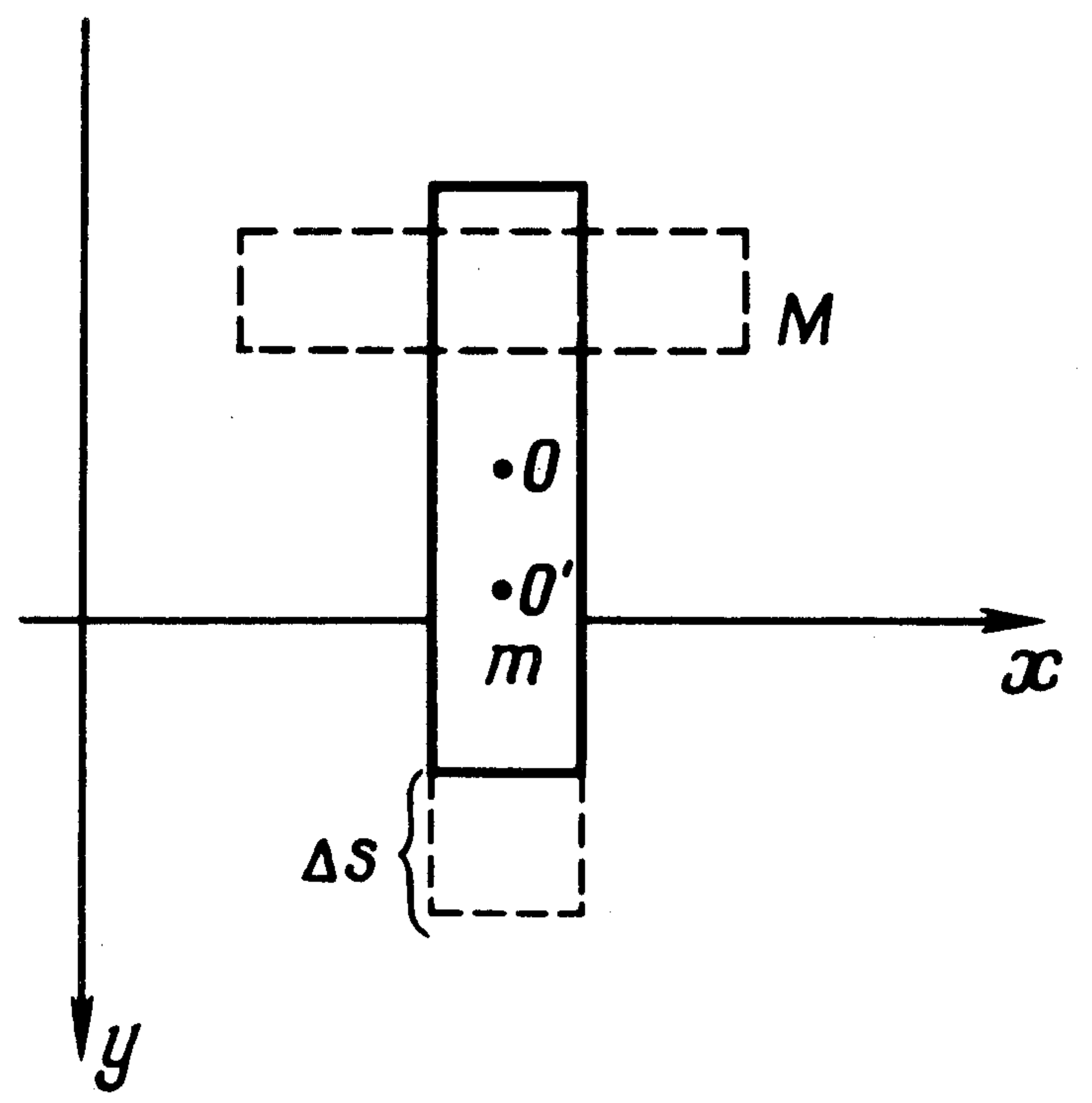


Рис. 4.16.

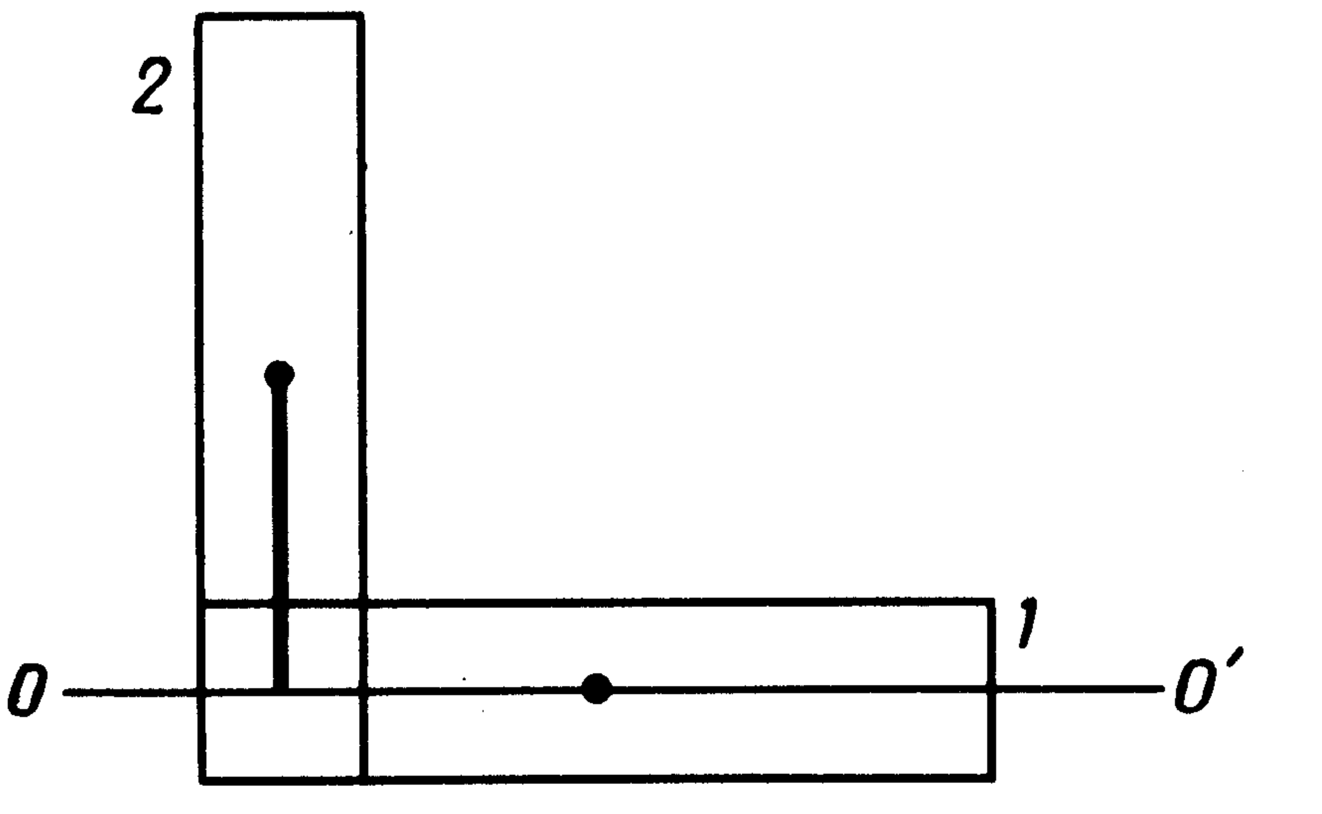


Рис. 4.17.

Дано: $d = 60\,\text{см}\,(0{,}6\,\text{м})$, $\rho = 0{,}8 \cdot 10^3\,\text{кг/м}^3$, $h = 2\,\text{м}$; A — ?

Решение. При подъеме бревна изменяется потенциальная энергия. За нулевой уровень потенциальной энергии OO' выберем уровень, совпадающий с положением центра тяжести бревна в исходном положении (рис. 4.17).

Тогда изменение потенциальной энергии есть

$$\Delta E_\text{п} = mg(h/2 - d/2).$$

Изменение потенциальной энергии равно работе внешних сил:

$$A = \Delta E_\text{п} = mg(h/2 - d/2).$$

Масса бревна равна $m = \rho\pi d^2 h/4$. Окончательно,

$$A = \rho\pi d^2 h(h - d)g/8,$$

$$[A] = (\text{кг/м}^3) \cdot \text{м}^2 \cdot \text{м}(\text{м} - \text{м})\text{м/с}^2 = \text{кг} \cdot \text{м}^2/\text{с}^2 = \text{Дж},$$

$$A = 316\,\text{Дж}.$$

Задача 13. Шарик массой m, летящий со скоростью v, ударяет в призму массой M, находящуюся на гладком столе, и после удара движется вертикально вверх (рис. 4.18). Считая удар абсолютно упругим, найти скорость шарика и призмы после удара. Трением пренебречь.

Дано: m, M, v; u_1 — ? u_2 — ?

Решение. Рассмотрим движение шарика и призмы относительно поверхности стола. Оси координат выберем, как показано на рис. 4.18. Проекция импульса системы на ось x сохраняется (случай 2)

$$p_{x\text{I}} = p_{x\text{II}}, \quad \text{или} \quad mv = Mu_1, \tag{4.31}$$

откуда

$$u_1 = mv/M, \tag{4.32}$$

где u_1 — скорость призмы после удара. Так как трением пренебрегаем по условию задачи, для системы призма — шарик можно использовать закон сохранения механической энергии:

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{Mu_1^2}{2} + \frac{mu_2^2}{2}, \tag{4.33}$$

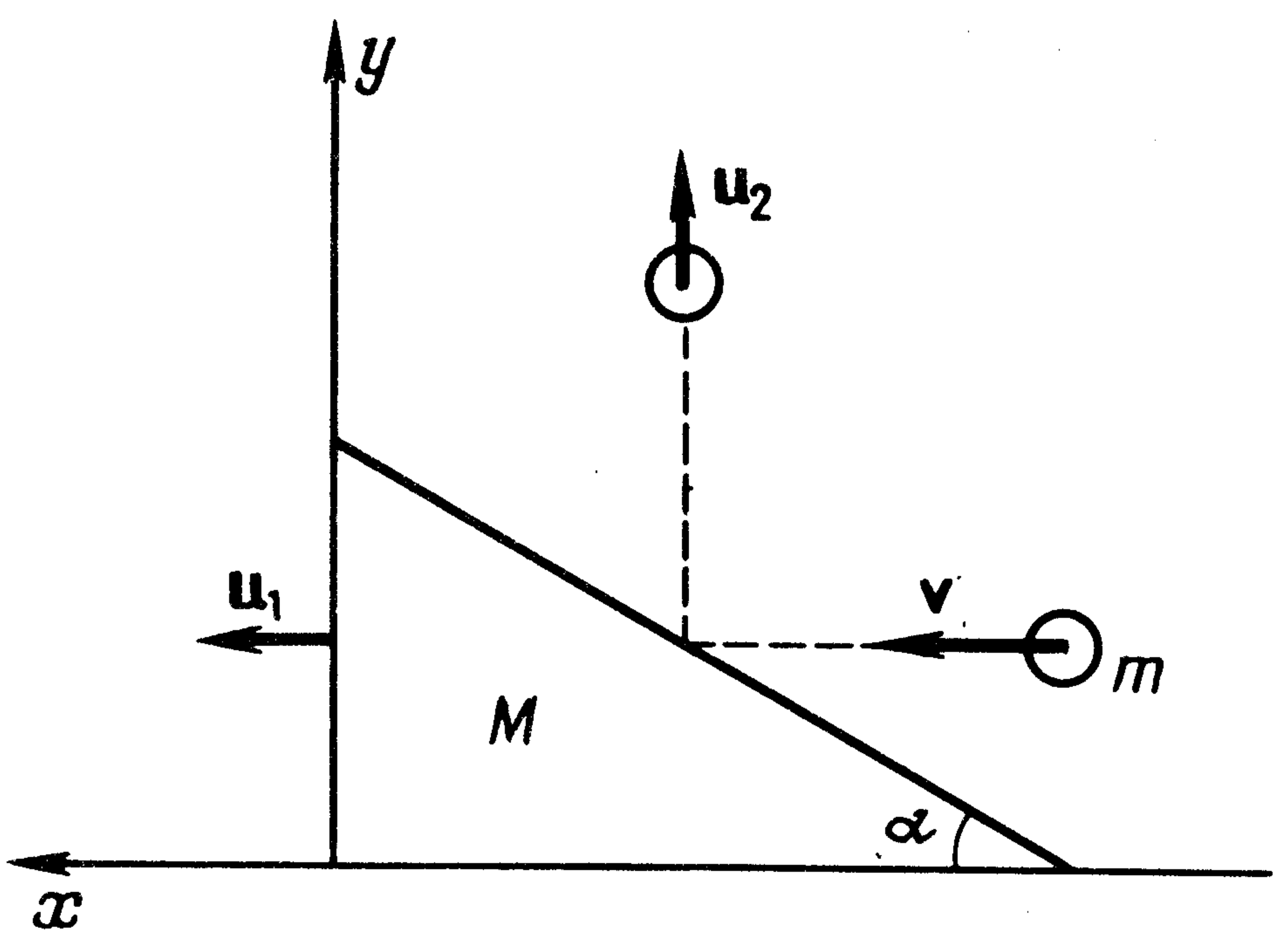


Рис. 4.18.

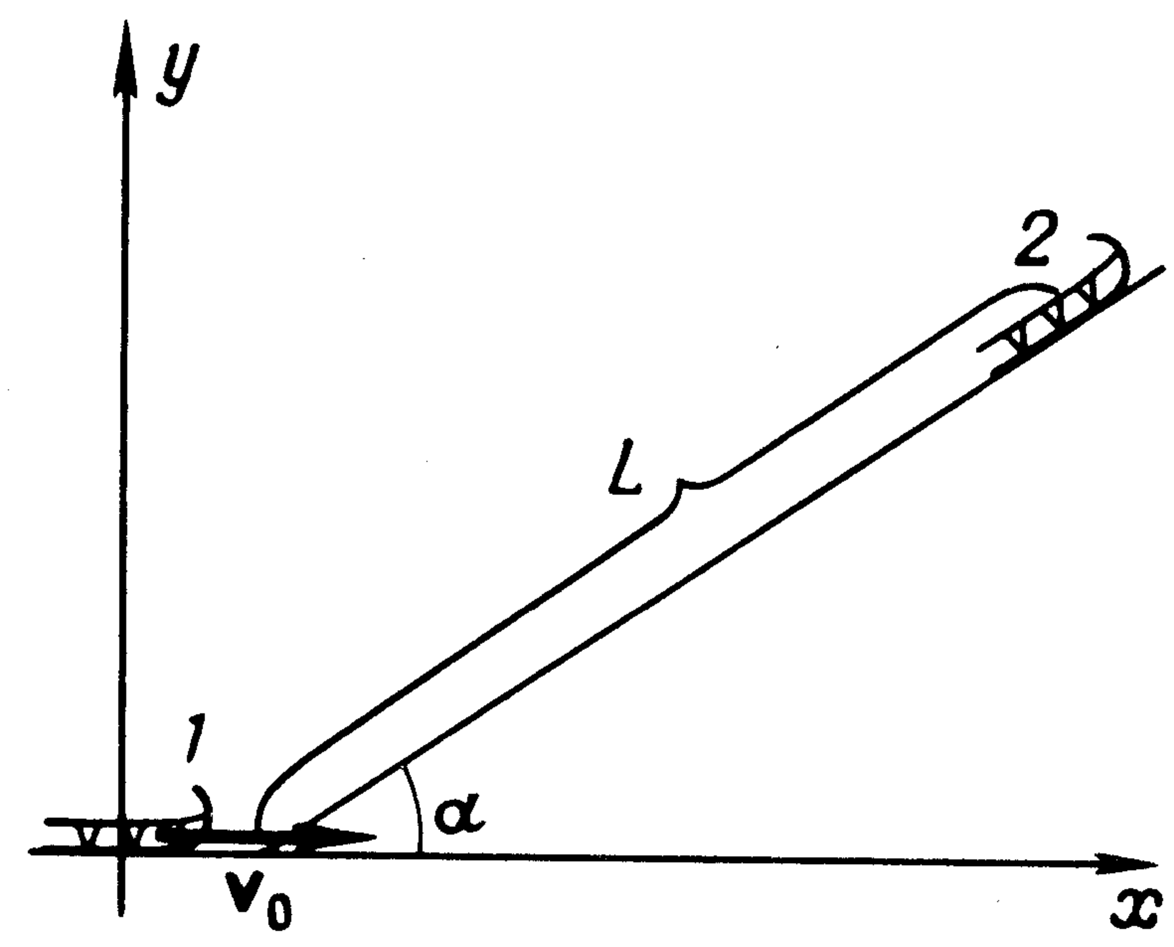


Рис. 4.19.

где u_2 — скорость шарика после удара. Из (4.32) получим

$$u_2 = v\sqrt{1 - m/M}.$$

Абсолютно упругий удар предполагает отсутствие трения, следовательно, проекция импульса шарика на наклонную плоскость не может измениться в результате удара. В проекции на наклонную плоскость

$$v\cos\alpha = u_2\sin\alpha, \quad \mathrm{tg}\alpha = 1/\sqrt{1 - m/M}.$$

Следовательно, такой удар, после которого шарик летит вертикально вверх, возможен только при полученном значении α. Если призма неподвижна, т. е. $M \to \infty$, то $\mathrm{tg}\alpha \to 1$, $\alpha = 45°$.

Задача 14. Санки массой m, движущиеся со скоростью v_0, поднимаются в гору с углом наклона α. Какой путь L пройдут санки до полной остановки, если известно, что на горизонтальном участке с тем же коэффициентом трения санки, имеющие начальную скорость v_0, проходят путь l (рис. 4.19)?

Дано: v_0, l, α; L — ?

Решение. В положении 1 санки обладают только кинетической энергией (нулевой уровень отсчета потенциальной энергии совпадает с осью x):

$$E_1 = E_к = mv_0^2/2.$$

При подъеме на высоту h санки останавливаются и их механическая энергия определяется только их потенциальной энергией:

$$E_2 = E_п = mgh.$$

Изменение механической энергии тела равно работе силы трения (4.14):

$$E_2 - E_1 = A_{тр}, \quad mgh - mv_0^2/2 = -F_{тр}L,$$

$$F_{тр} = kmg\cos\alpha, \quad h = L\sin\alpha,$$

откуда

$$L = \frac{v_0^2}{2g(\sin\alpha + k\cos\alpha)}. \tag{4.34}$$

Для определения L необходимо знать k. Коэффициент k найдем из условия, что, двигаясь по горизонтальной поверхности, санки до остановки проходят путь l.

В этом случае на санки в горизонтальном направлении действует только сила трения $F_{\text{тр}} = kN = kmg$. В начальном положении кинетическая энергия саней равна $E'_{\text{к}1} = mv_0^2/2$, в конечном $E'_{\text{к}2} = 0$. Потенциальная энергия, очевидно, не изменяется. Изменение кинетической энергии равно работе силы трения:

$$0 - mv_0^2/2 = -kmgl,$$

откуда

$$k = v_0^2/2gl. \tag{4.35}$$

Подставив (4.35) в (4.34), окончательно получим

$$L = \frac{v_0^2}{2g[\sin\alpha + (v_0^2/2gl)\cos\alpha]} = \frac{v_0^2 l}{2gl\sin\alpha + v_0^2\cos\alpha}.$$

Задача 15. Мощность двигателя подъемного крана P = 4,4 кВт. Какой груз можно поднять при помощи этого крана на высоту 12 м в течение 0,5 мин, если подъем груза совершается равноускоренно? КПД двигателя η = 80% (рис. 4.20).

Дано: $P = 4,4 \cdot 10^3$ Вт, $h = 12$ м, $t = 0,5$ мин (30 с), $\eta = 80\%$; m — ?

Решение. Коэффициент полезного действия двигателей и механизмов определяется отношением полезной работы $A_{\text{пол}}$ к затраченной работе $A_{\text{затр}}$

$$\eta = (A_{\text{пол}}/A_{\text{затр}})100\%. \tag{4.36}$$

Поскольку мощность определяется формулой $P = A/t$, то можно для кпд записать выражение через мощность:

$$\eta = (P_{\text{пол}}/P_{\text{затр}})100\%. \tag{4.37}$$

Полезная работа в данном случае определяется механической работой силы натяжения T по подъему груза на высоту h (см. задачу 2):

$$A_{\text{пол}} = Th = m(g + a)h.$$

Затраченная работа определяется мощностью двигателя, т. е.

$$A_{\text{затр}} = P_{\text{затр}}t.$$

Ускорение a находим из выражения

$$h = at^2/2,$$

т. е. $a = 2h/t^2$. Следовательно, $A_{\text{пол}} = m(g + 2h/t^2)h$,

$$\eta = \frac{m(g + 2h/t^2)h}{Pt}100\%. \tag{4.38}$$

Из (4.38) найдем m:

$$m = \frac{Pt}{(g + 2h/t^2)h}\frac{\eta}{100\%},$$

$$[m] = \frac{(\text{кг}\cdot\text{м}^2/\text{с}^3)\cdot\text{с}}{(\text{м}/\text{с}^2)\cdot\text{м}} = \text{кг},$$

$$m = 875\,\text{кг}.$$

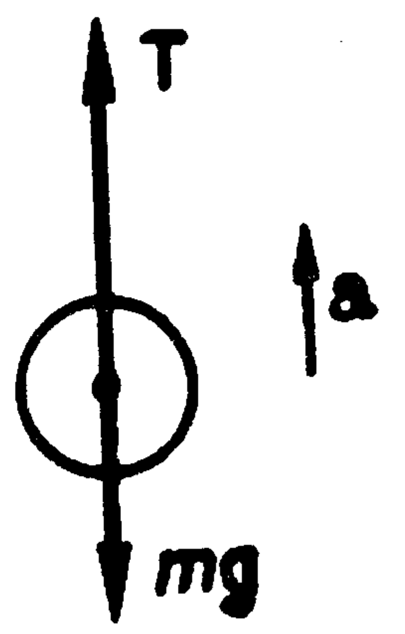


Рис. 4.20.

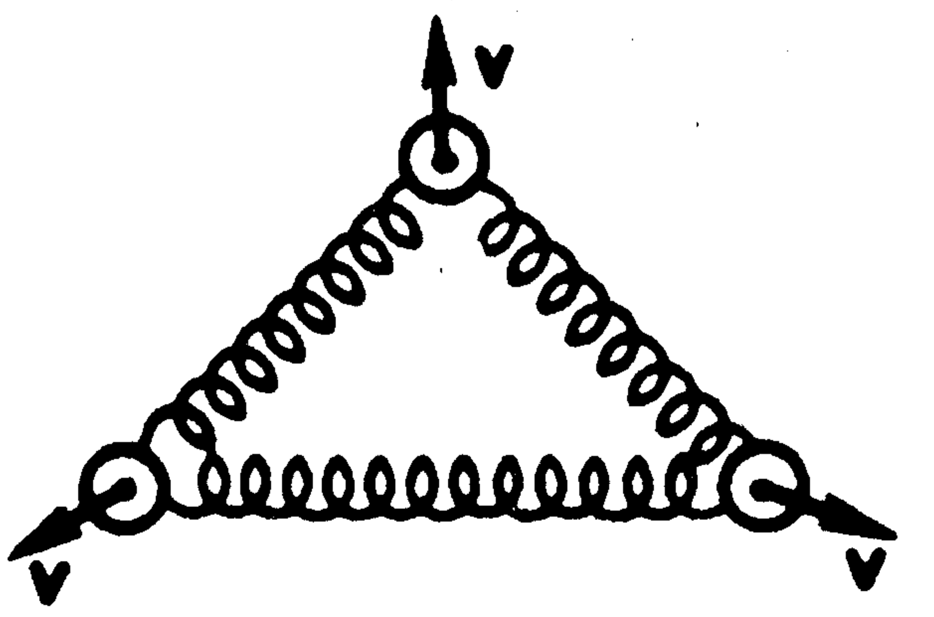


Рис. 4.21.

Задачи для самостоятельного решения

Задача 1. На неподвижный шар налетает со скоростью v_0 шар, масса которого в k раз больше массы неподвижного шара. Найдите отношение скоростей шаров после абсолютно упругого удара к скорости v_0.

Ответ:

$$\frac{v_1}{v_0} = \frac{k-1}{k+1}; \quad \frac{v_2}{v_0} = \frac{2k}{k+1}.$$

Задача 2. Три шарика массы m каждый соединены друг с другом одинаковыми пружинами жесткости k (коэффициент упругости). Одновременно всем шарам сообщили скорость v, направленную от центра системы. На какое наибольшее расстояние сместятся шары в этом направлении (рис. 4.21)?

Ответ: $x = v\sqrt{m/k}$.

Задача 3. Однородная веревка длиной l переброшена через блок так, что в начале она находится в равновесии. Ее немного смещают и она начинает соскальзывать с блока. Найти скорость веревки в тот момент, когда она полностью соскользнет с блока. Трение не учитывать.

Ответ: $v = \sqrt{gl/2}$.

Задача 4. Пуля попадает в ящик с песком и застревает в нем (рис. 4.22). На сколько сожмется пружина жесткостью k, удерживающая ящик, если пуля имеет массу m и движется со скоростью v, а масса ящика с песком равна M?

Ответ: $mv/\sqrt{(m+M)k}$.

Задача 5. Льдинка скользит по инерции вверх по наклонной плоскости. Определите, на какую высоту поднимается льдинка, если коэффициент трения $k = 0,2$, угол наклонной плоскости $\alpha = 45°$ и скорость льдинки в начале подъема $v = 6$ м/с.

Ответ: 1,54 м.

Задача 6. Пуля массой 10 г, летевшая горизонтально со скоростью 600 м/с, ударилась в свободно подвешенный деревянный брусок массой 5 кг и застряла в нем, углубившись на 10 см. Найти силу сопротивления дерева движению пули.

Ответ: 18 кН.

Задача 7. Тело, масса которого 3 кг, подвешено на невесомой и нерастяжимой штанге длиной 1 м. Штанга отклонена в горизонтальное положение и отпущена. При прохождении телом положения равновесия в него попала пуля массой 10 г, летящая со скоростью 1000 м/с навстречу двигавшемуся телу. Определить высоту, на которую поднимается тело вместе с застрявшей в нем пулей.

Ответ: 0,06 м.

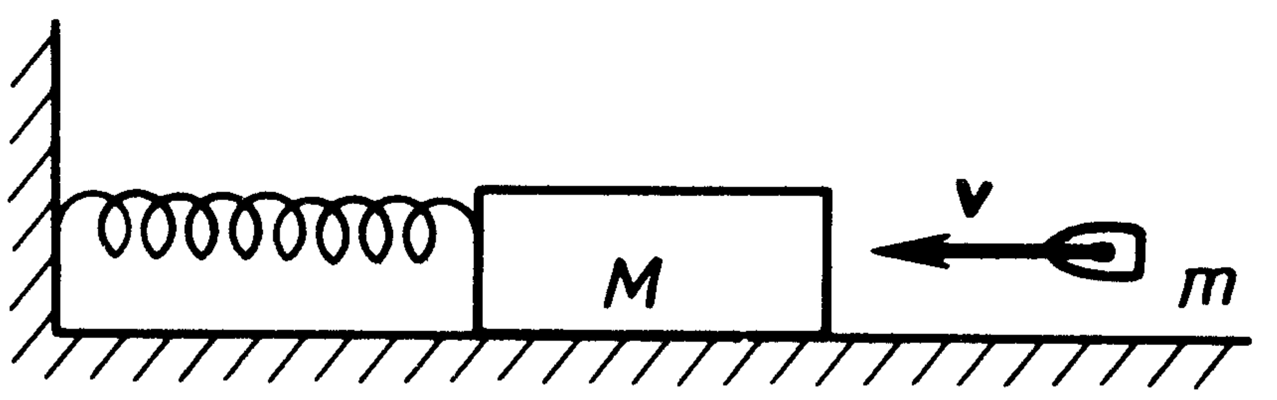


Рис. 4.22.

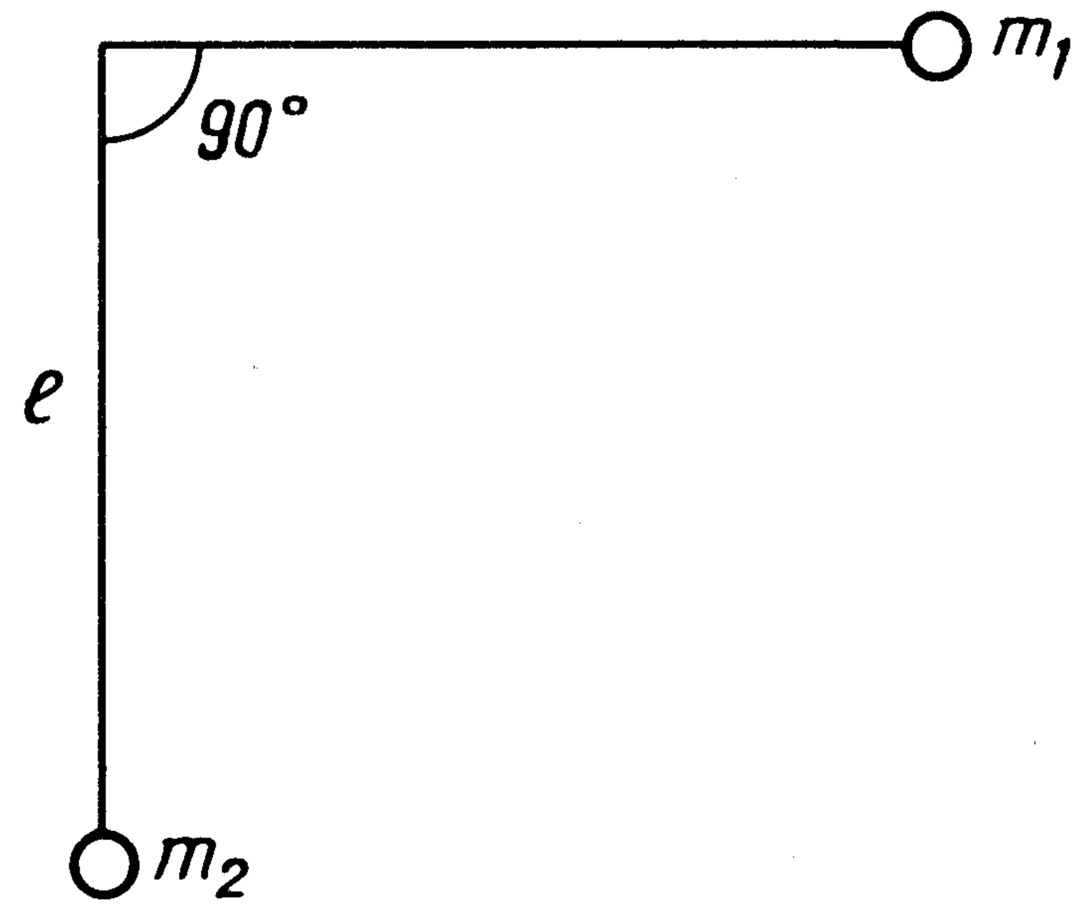


Рис. 4.23.

Задача 8. Два тела массами 1 и 3 кг соответственно расположены на горизонтальной плоскости. Между ними находится сжатая пружина. После освобождения пружины первое тело прошло путь 1 м до полной остановки. Найти скорость, с которой начало двигаться второе тело, если коэффициент трения при движении тел равен 0,1. Массой пружины и силой трения в момент действия пружины пренебречь.

Ответ: 0,48 м/с.

Задача 9. Два упругих шарика одинаковой массы налетают друг на друга со скоростями v_1 и v_2 под углом α и разлетаются после абсолютно упругого удара со скоростями u_1 и u_2. Найти угол разлета β.

Ответ: $\cos\beta = v_1 v_2 \cos\alpha / u_1 u_2$.

Задача 10. Какую работу надо совершить для равномерного переноса тела массы m, с поверхности Земли на поверхность Луны, не учитывая их вращения и сопротивления атмосферы Земли? Массы и радиусы Земли и Луны считать известными.

Ответ: $A = Gm(M_З/R_З - M_Л/R_Л)$.

Задача 11. Для забивки сваи используется груз массой 200 кг, который поднимают с постоянной скоростью $v = 5$ м/с, а затем отпускают на высоте $H = 10$ м, после чего он падает свободно до удара о сваю. Масса сваи $M = 300$ кг, сила сопротивления грунта движению сваи постоянна и равна $F_{сопр} = 2 \cdot 10^4$ Н. Какова энергия груза в момент удара о сваю? На какую глубину h опускается свая после каждого удара? С какой максимальной частотой n можно производить удары?

Ответ: $E = 2,25 \cdot 10^4$ Дж, $h = 0,6$ м, $n = 13$.

Задача 12. На аэросанях установлен двигатель, развивающий одинаковую мощность при равномерном движении по склону вверх, вниз и по горизонтальному пути. Скорость при движении вверх $v_1 = 20$ м/с, вниз $v_2 = 30$ м/с. Уклон горы составляет $\alpha = 10°$. Определить скорость v_3 установившегося движения по горизонтальному пути.

Ответ:

$$v_3 = \frac{2v_1 v_2}{v_1 + v_2}\cos\alpha = 23,6\,\text{м/с}.$$

Задача 13. С высоты $h = 5$ м бросают вертикально вниз тело массой $m = 0,2$ кг с начальной скоростью $v = 2$ м/с. Тело углубляется в грунт на $l = 0,05$ м. Найти среднюю силу сопротивления грунта движению камня.

Ответ: 0,21 кН.

Задача 14. Один из шаров, подвешенных на длинных нитях, отклоняют на угол 90°, а затем отпускают (рис. 4.23). Определить максимальные углы отклонения нитей шаров после абсолютно упругого удара.

Ответ:

$$\cos\alpha_1 = 1 - \left(\frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}\right)^2, \quad \cos\alpha_2 = 1 - 4\left(\frac{m_1}{m_1 + m_2}\right)^2.$$

Задача 15. По горизонтальной поверхности катится без проскальзывания обруч массы m со скоростью v. Чему равна его кинетическая энергия?

Ответ: mv^2.

Задача 16. Доказать, что кпд наклонной плоскости с углом α при коэффициенте трения k выражается формулой $\eta = 1/(1 + k\mathrm{ctg}\,\alpha)$. Как изменяется кпд наклонной плоскости при увеличении угла наклона?

Глава 5
Динамика материальной точки, движущейся по окружности

Если материальная точка движется по окружности, то ее нормальное ускорение отлично от нуля. Нормальное, или центростремительное, ускорение a_n или $a_ц$ характеризует изменение скорости по направлению (см. гл. 1):

$$a_n = v^2/r. \tag{5.1}$$

Нормальное ускорение можно также представить в виде

$$a_n = \omega^2 r = (4\pi^2/T^2)r = 4\pi^2 2n^2 r, \tag{5.2}$$

где r — радиус окружности, ω — угловая скорость, с которой движется материальная точка по окружности, T — перод вращения, n — число оборотов в единицу времени. С точки зрения динамики наличие нормального ускорения означает, что на тело действуют силы, алгебраическая сумма проекций которых на радиус, соединяющий материальную точку с центром окружности, не равна нулю. При рассмотрении такого движения основной закон динамики записывается, как правило, в проекциях на касательную к окружности в данной точке и на две нормали к ней, одна из которых совпадает с нормальным ускорением (рис. 5.1). Таким образом, если на тело действует несколько сил, например $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2$ и $\mathbf{F}_3$, то 2-й закон Ньютона имеет вид

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3.$$

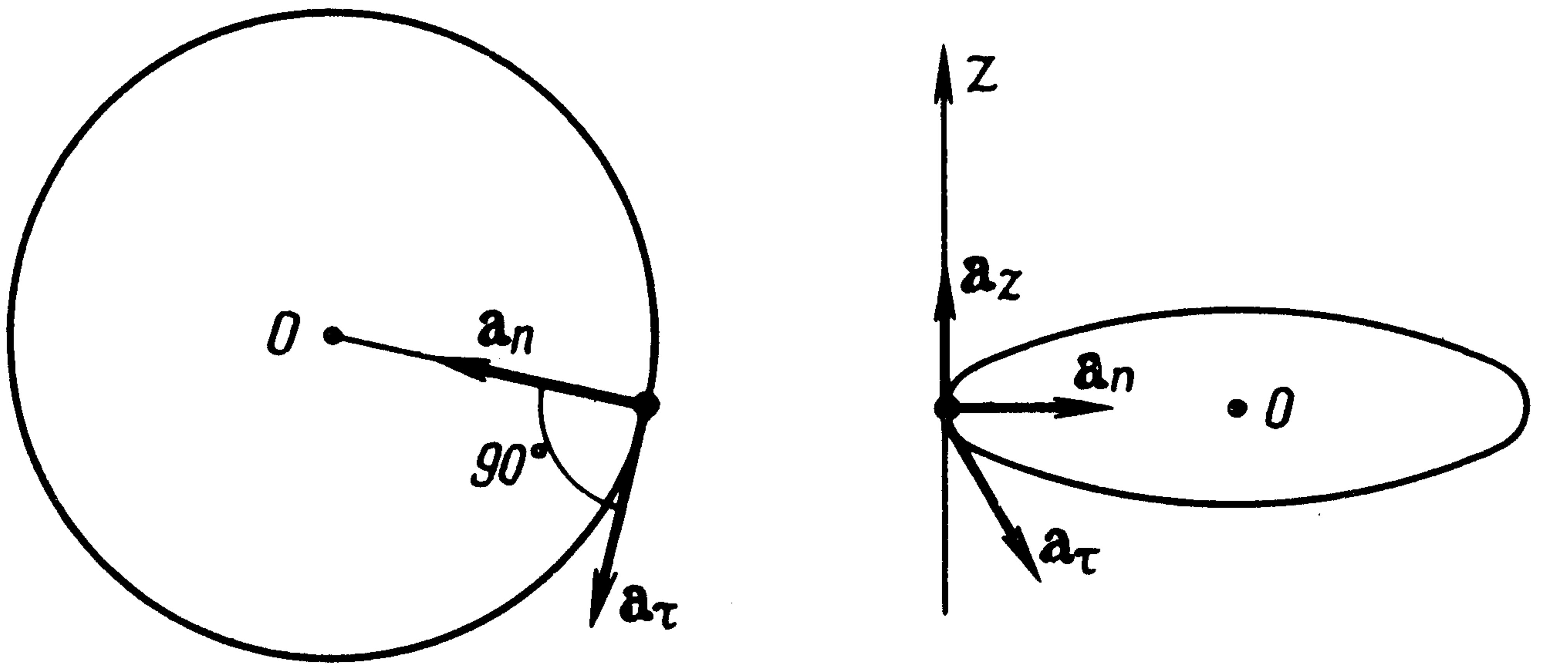


Рис. 5.1.

В проекциях на указанные направления имеем:

$$\text{на касательное}\quad ma_\tau = F_{1\tau} + F_{2\tau} + F_{3\tau},$$
$$\text{на нормальное}\quad ma_n = F_{1n} + F_{2n} + F_{3n},$$
$$ma_z = F_{1z} + F_{2z} + f_{3z}.$$

Еще раз подчеркнем, что движение тела по окружности совершается не в результате действия на тело каких-то специальных сил, а в результате реального взаимодействия тела с другими телами (с нитью, с Землей и т. д.). Главное, чтобы их результирующая имела проекцию на радиус, соединяющий тело и центр окружности, отличную от нуля.

Как правило, в задачах, которые мы будем рассматривать, достаточно спроектировать силы на радиус, соединяющий материальную точку с центром окружности, по которой она движется, и записать основной закон динамики в проекциях на это направление. Предварительно надо выяснить, по какой траектории будет двигаться материальная точка, и определить центр окружности.

Движение спутников вокруг Земли — типичный пример движения тел по круговой орбите со скоростью, постоянной по величине, т. е. полное ускорение тела равно нормальному ускорению. Спутники движутся под действием одной единственной силы — силы тяготения. Основной закон динамики в этом случае имеет вид

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F}_\text{т},$$

или в скалярном виде

$$mv^2/r = GmM_3/r^2, \text{ или } m(4\pi^2/T^2)r = GmM_3/r^2,$$

где r — расстояние спутника от центра Земли, а T — период обращения спутника вокруг Земли. Часто бывает удобно заменить произведение $GM = gR^2$ (см. формулу (2.6)).

Примеры решения задач

Задача 1. Автомобиль массой m движется по мосту радиуса R со скоростью v. С какой силой $F_\text{д}$ автомобиль давит на середину моста, если 1) мост выпуклый; 2) мост вогнутый; 3) для выпуклого моста определить силу давления в точке C, указанной на рис. 5.4.

Дано: v, m, R, α; $F_\text{д}$ — ?.

Решение. 1) В точке A автомобиль движется с нормальным ускорением $a_n = v^2/R$, направленным к центру кривизны моста в точке O. На рис. 5.2 изображены силы, обеспечивающие движение автомобиля с ускорением a_n: сила тяжести $\mathbf{F}_\text{т}$ и сила нормальной реакции $\mathbf{N}_1$. В проекции на направление AO основной закон динамики запишется в виде

$$mv^2/R = mg - N_1,$$

откуда $N_1 = m(g - v^2/R)$. По 3-му закону Ньютона

$$\mathbf{F}_{\text{д}1} = -\mathbf{N}_1, \text{ или } F_{\text{д}1} = m(g - v^2/R).$$

2) В точке B автомобиль также движется с нормальным ускорением, направленным к точке O (рис. 5.3). В этом случае основной закон динамики в проекции на OB имеет вид

$$mv^2/R = N_2 - mg,$$

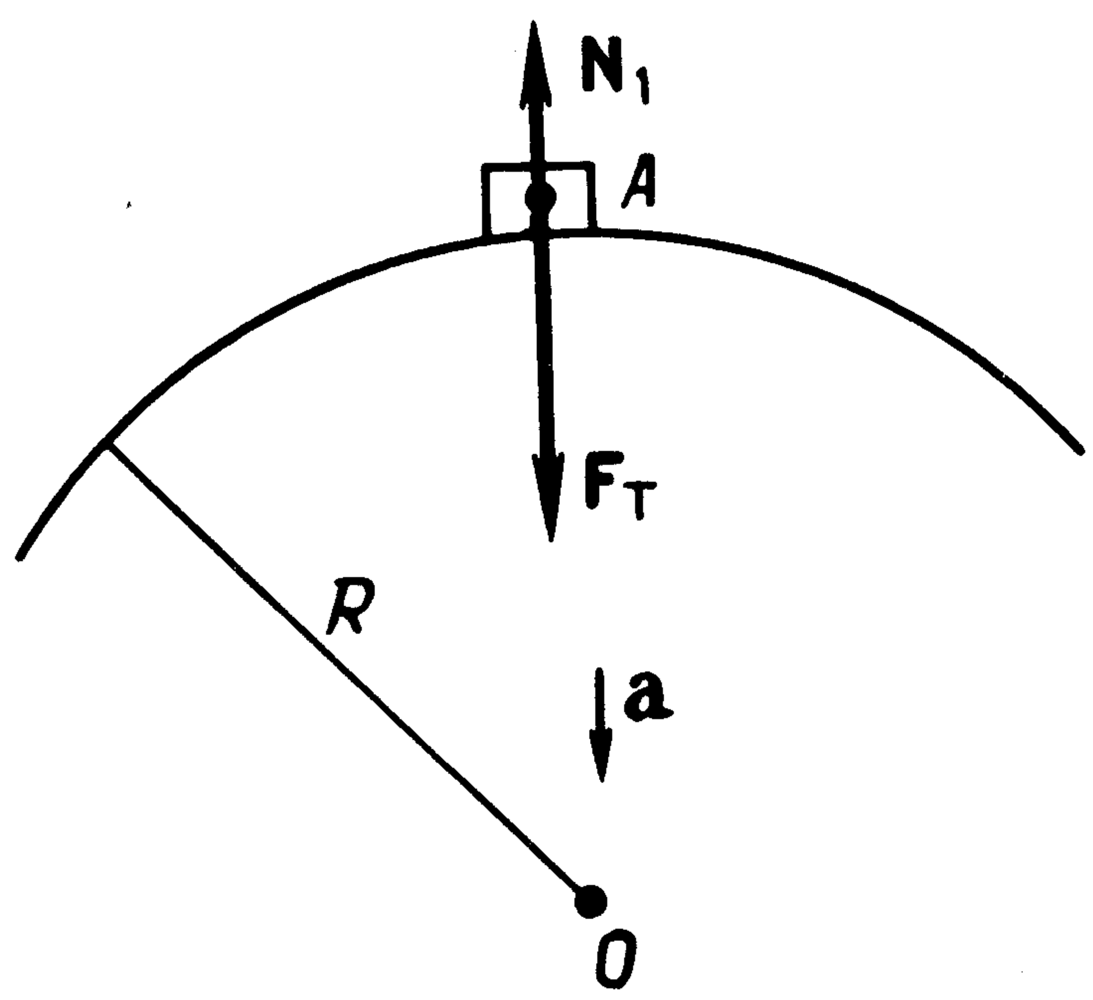


Рис. 5.2.

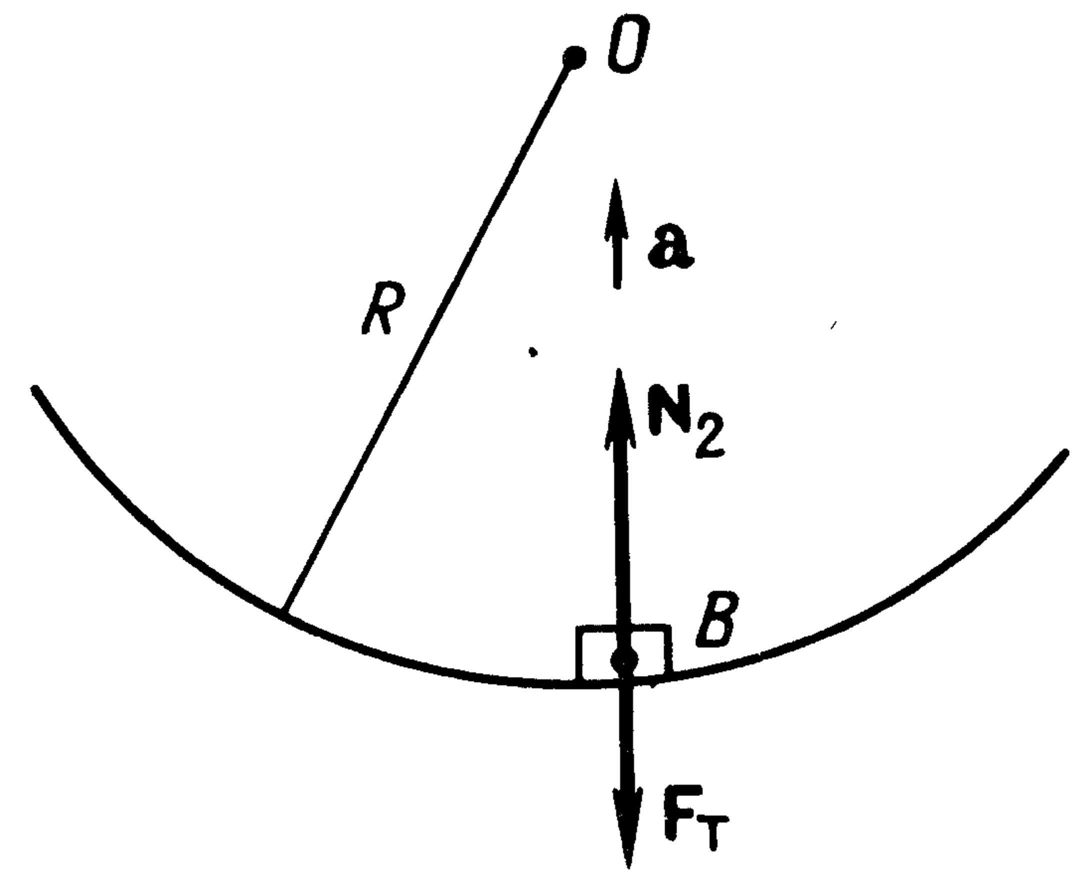


Рис. 5.3.

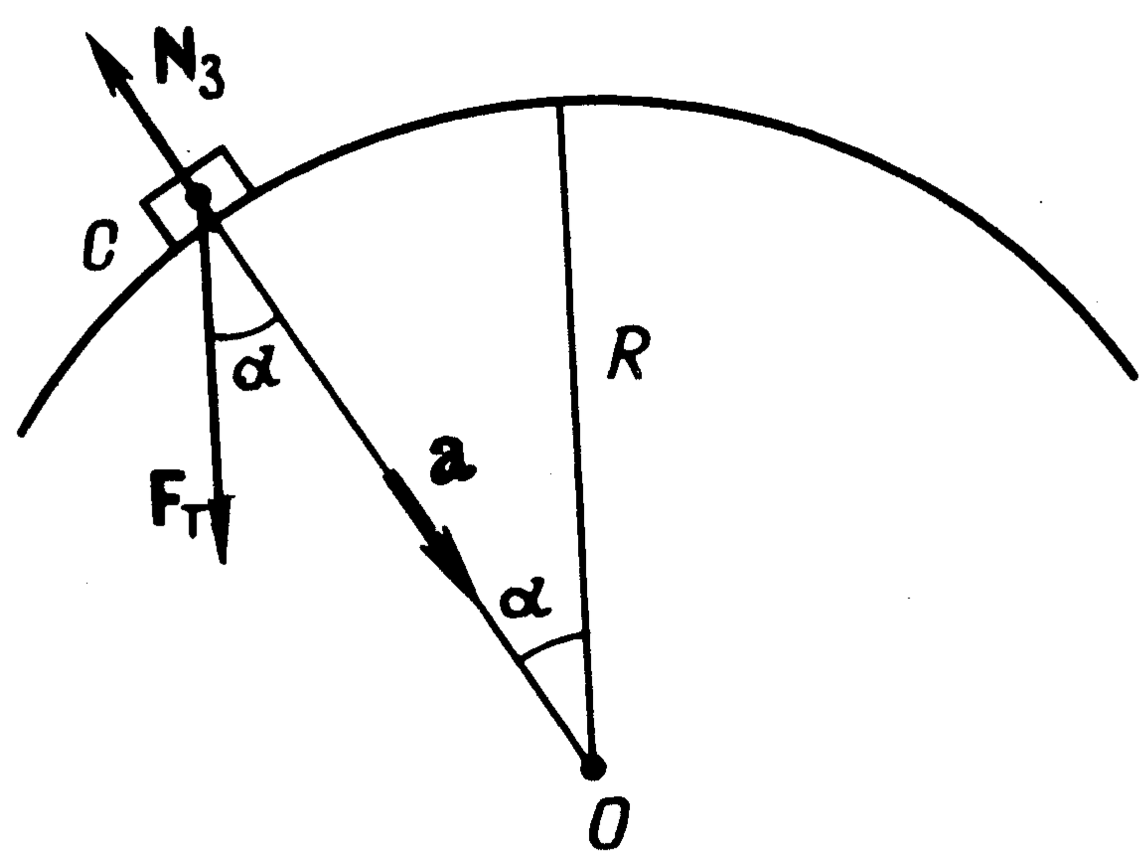


Рис. 5.4.

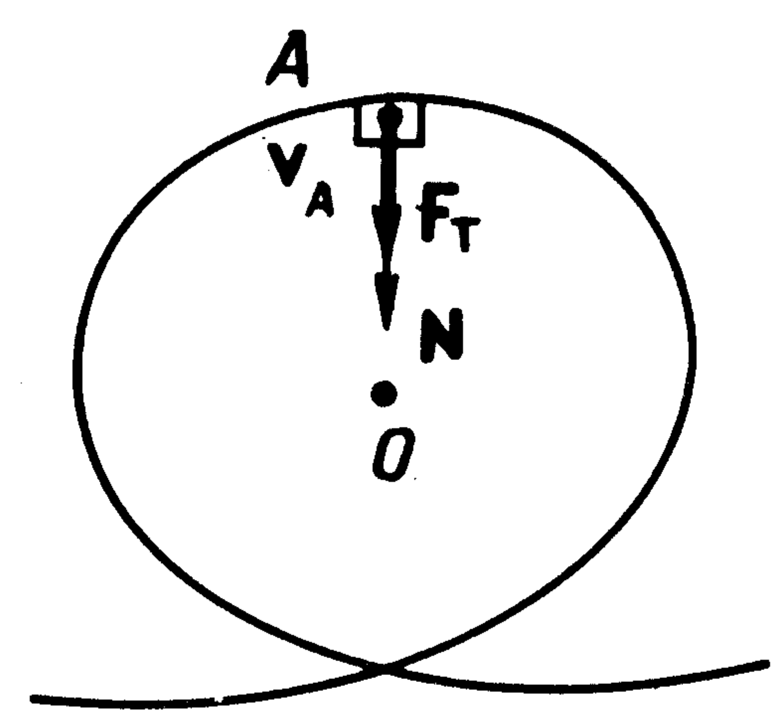


Рис. 5.5.

откуда

$$N_2 = m(g + v^2/R),$$

следовательно,

$$F_{д2} = m(g + v^2/R).$$

3) В этом случае нормальное ускорение обеспечивают проекция силы тяжести на направление CO и сила нормальной реакции $\mathbf{N}_3$. Тогда основной закон динамики в проекции на направление CO имеет вид (рис. 5.4)

$$mv^2/R = mg\cos\alpha - N_3,$$

откуда

$$N_3 = m(g\cos\alpha - v^2/R),$$

следовательно,

$$F_{д3} = m(g\cos\alpha - v^2/R).$$

Задача 2. Какую минимальную скорость $v_{\min}$ должен иметь самолет, делающий петлю Нестерова, в верхней точке траектории, радиус кривизны которой R, чтобы летчик не повис на ремнях, которыми он пристегнут к пилотскому креслу (рис. 5.5)?

Дано: R; $v_{\min}$ — ?

Решение. На летчика действуют сила тяжести $\mathbf{F}_т$ и сила нормальной реакции кресла $\mathbf{N}$. При движении самолета по круговой орбите сила нормальной

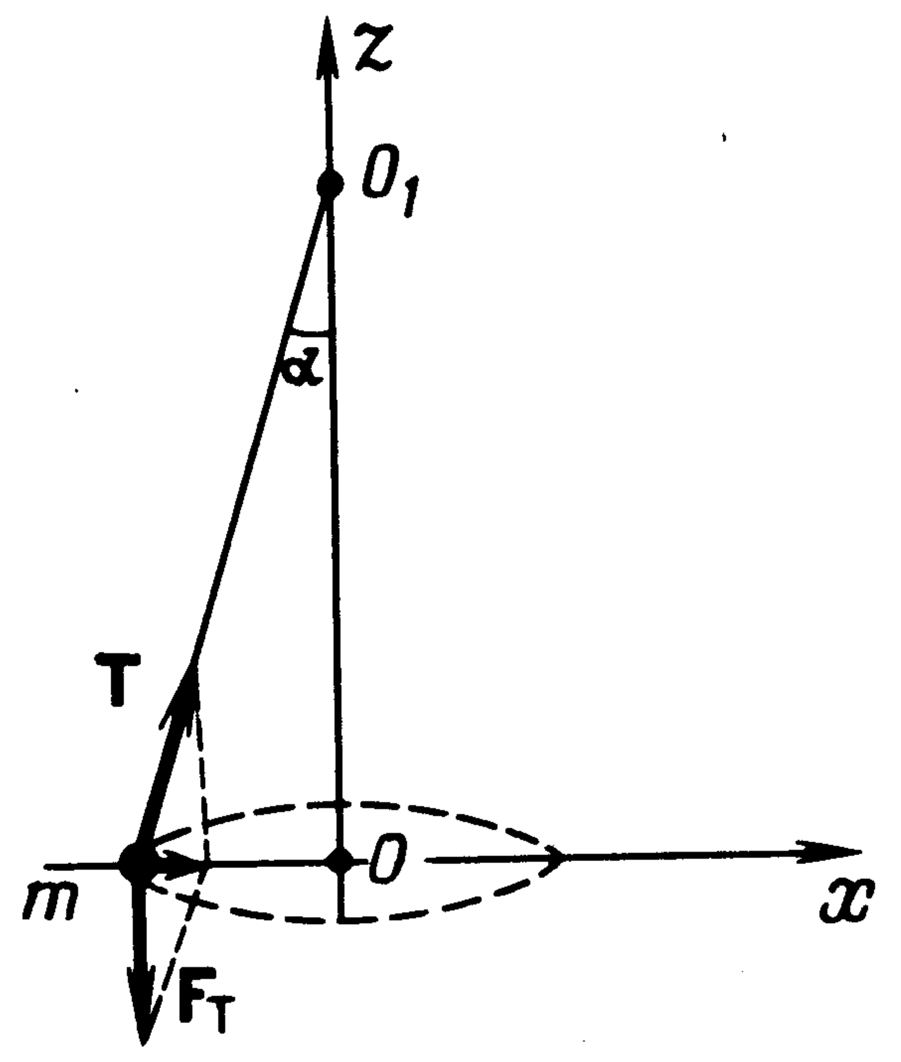


Рис. 5.6а.

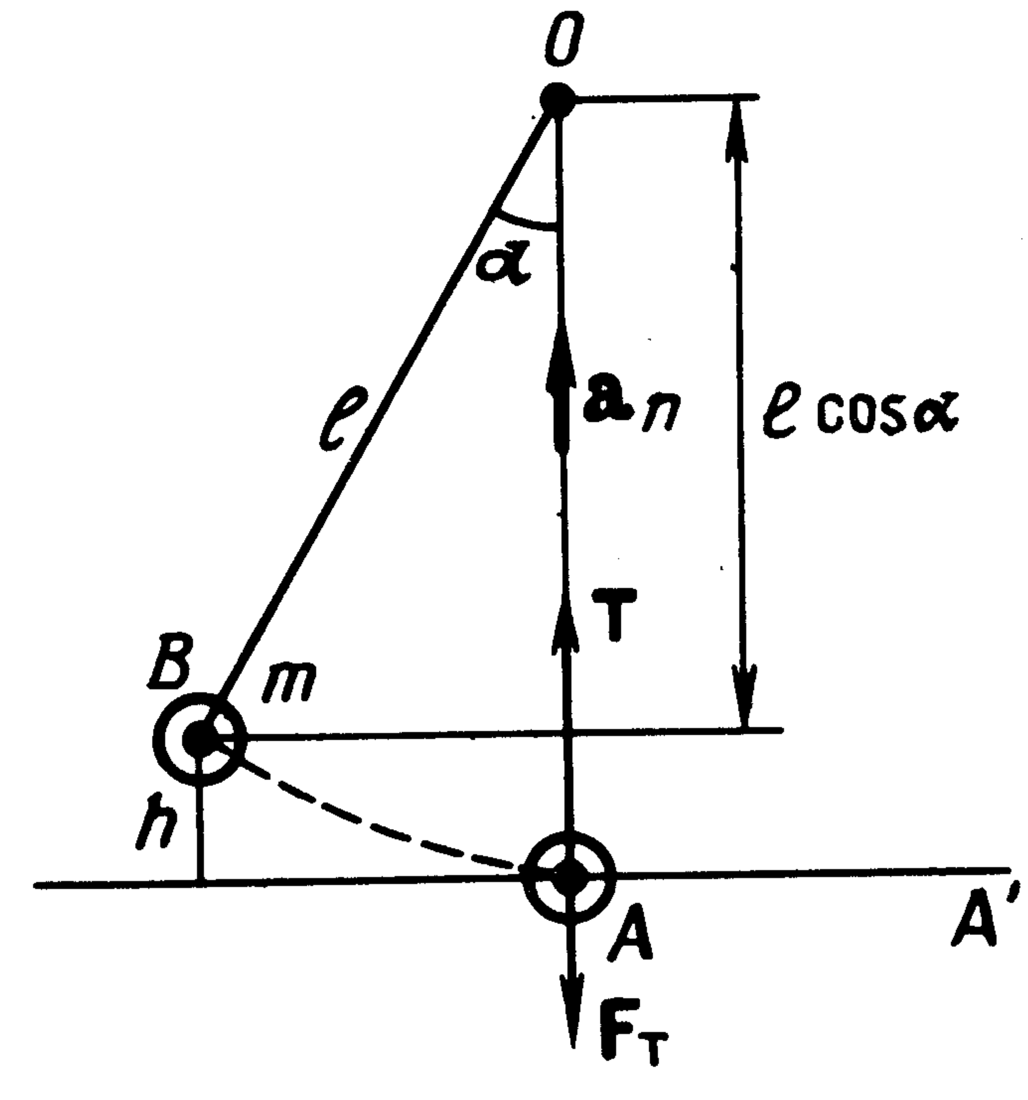


Рис. 5.6б.

реакции, действующая на летчика, должна быть отлична от нуля. Единственная точка, где сила нормальной реакции может стать равной нулю, — это наивысшая точка траектории. Если в этой точке сила **N** станет равна нулю, в следующий момент она станет отлична от нуля, так как всякое тело стремится сохранить состояние прямолинейного движения, и, следовательно, летчика прижмет к креслу.

Итак, в точке A в проекции на направление AO основной закон динамики запишется в виде

$$mv_A^2/R = F_т + N_A.$$

Требуется определить минимальную скорость, следовательно, $N = 0$, откуда

$$mv_A^2/R = mg,$$

окончательно $v = \sqrt{gR}$.

Задача 3. Определить угол между вертикальной осью конического маятника и нитью, если тело движется с постоянной угловой скоростью ω (рис. 5.6а).

Дано: ω; α — ?

Решение. Движение материальной точки происходит в горизонтальной плоскости, перпендикулярной вертикальной оси.

На тело действуют две силы: сила натяжения нити **T** и сила тяжести $\mathbf{F}_т = m\mathbf{g}$. Основной закон динамики имеет вид

$$m\mathbf{a} = \mathbf{T} + \mathbf{F}_т.$$

Скорость тела постоянна $a_\tau = 0$, тело движется только с нормальным ускорением $a = a_n = v^2/r = \omega^2 r$. Равнодействующая силы тяжести и силы натяжения должна быть направлена к центру окружности, по которой движется материальная точка. Уравнения в проекциях на оси z и x соответственно (см. рис. 5.6а):

$$T\cos\alpha - mg = 0,$$
$$ma_n = T\sin\alpha,$$
$$a_n = \omega^2 l\sin\alpha,$$

откуда

$$m\omega^2 l\sin\alpha = T\sin\alpha.$$

Поскольку $T = mg/\cos\alpha$, имеем

$$m\omega^2 l = mg/\cos\alpha,$$

$$\cos\alpha = g/\omega^2 l, \quad \alpha = \arccos g/\omega^2 l.$$

Задача 4. На веревке длиной $l = 1\,\text{м}$ висит груз массой $m = 5$ кг. Максимальное натяжение, которое может выдержать веревка, $F_{\max} = 60\,\text{Н}$. Оборвется ли веревка, если ее отклонить на угол $\alpha = 30°$? На какой максимальный угол можно отклонить веревку, чтобы она не разорвалась?

Дано: $l = 1\,\text{м}$, $m = 5\,\text{кг}$, $F_{\max} = 80\,\text{Н}$, $\alpha = 30°$; $\alpha_{\max}$ — ?

Решение. На груз действуют две силы: сила тяжести $\mathbf{F}_\text{т} = m\mathbf{g}$ и сила натяжения $\mathbf{T}$ (рис. 5.6б). Основной закон динамики имеет вид $m\mathbf{a} = m\mathbf{g} + \mathbf{T}$. Максимальное натяжение веревка испытывает в точке A, так как в этой точке нормальное ускорение имеет максимальное значение $a_n = v_A^2/l$ и силы натяжения и тяжести направлены вдоль одной прямой и в противоположные стороны. Следовательно,

$$mv_A^2/l = T_A - mg, \quad T_A = m(g + v_A^2/l). \tag{5.3}$$

Скорость в точке A можно определить из закона сохранения механической энергии (гл. 4). В точке B полная механическая энергия $E_B = mgh$, где $h = l(1 - \cos\alpha)$. В точке A механическая энергия равна кинетической (нулевой уровень потенциальной энергии ось AA'):

$$E_A = mv_A^2/2; \quad v_A^2 = 2gl(1 - \cos\alpha).$$

Подставим в (5.3) максимальное значение силы $F_{\max}$ и определим $\alpha_{\max}$:

$$m2g(1 - \cos\alpha) = F_{\max} - mg,$$

$$\cos\alpha = 1 - (F_{\max} - mg)/2mg = 0,7,$$

откуда

$$\alpha_{\max} \doteq 45°.$$

Следовательно, если веревку отклонить на 30°, то она не оборвется.

Задача 5. Тело скатывается с вершины гладкой сферической поверхности радиуса R. Найти, на какой высоте, считая от вершины, тело оторвется от поверхности. Считать, что трение отсутствует (рис. 5.7).

Дано: R; h — ?

Решение. В точке B на тело действуют две силы: сила тяжести и сила нормальной реакции. Сумма проекций этих сил на OB равна

$$mv^2/R = mg\cos\beta - N_B.$$

Пусть тело оторвется от поверхности в точке A. Это означает, что сила нормальной реакции в A точке равна нулю. В точке A нормальное ускорение $a_n = v_A^2/R$ обусловлено только составляющей силы тяжести $F_r = mg\cos\alpha$. Тогда

$$mv_A^2/R = mg\cos\alpha. \tag{5.4}$$

Скорость в точке A можно определить также из закона сохранения энергии, выбрав за нулевой уровень отсчета потенциальной энергии уровень AA'. Закон сохранения механической энергии запишется в виде

$$mgh = mv_A^2/2, \quad v_A^2 = 2gh.$$

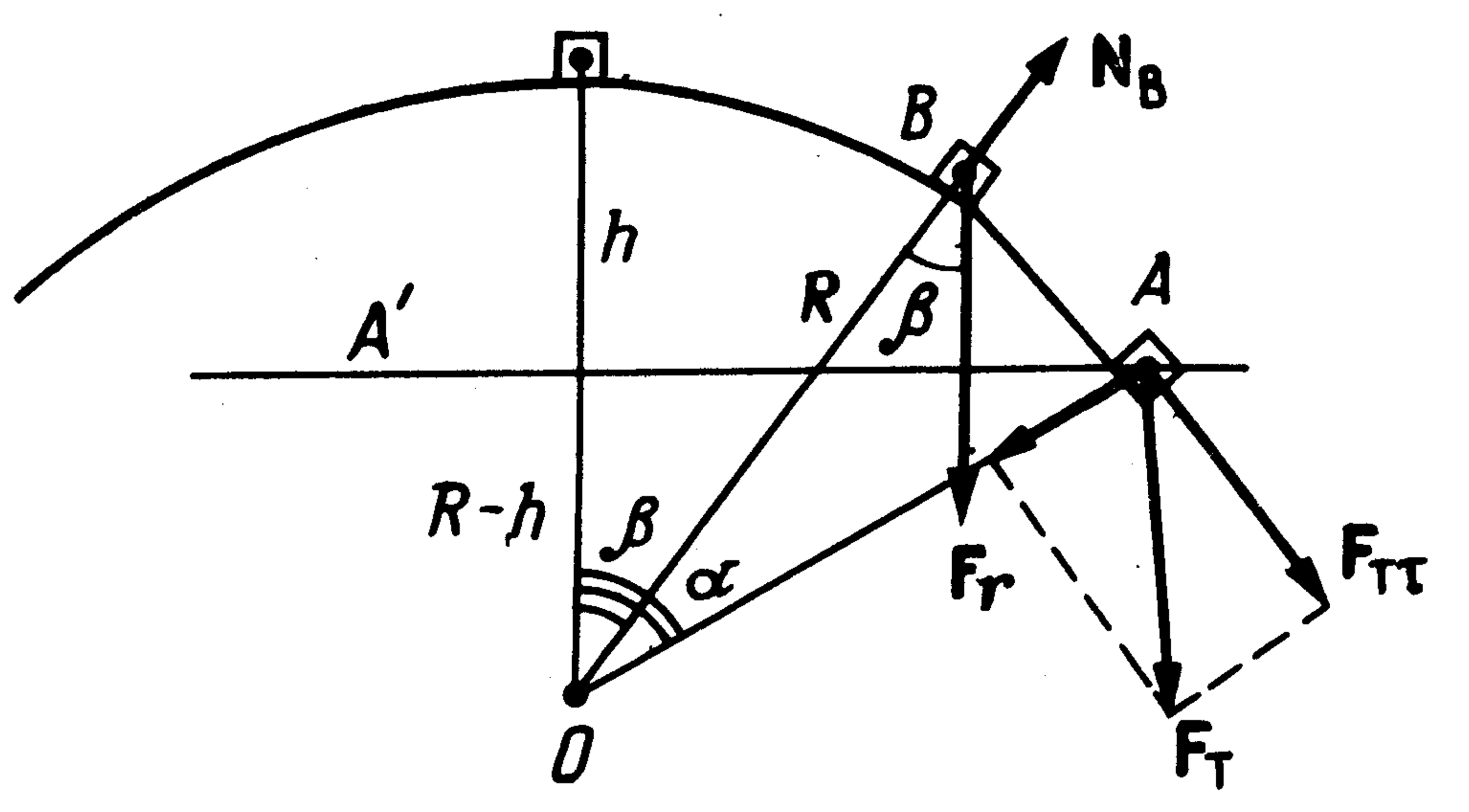


Рис. 5.7.

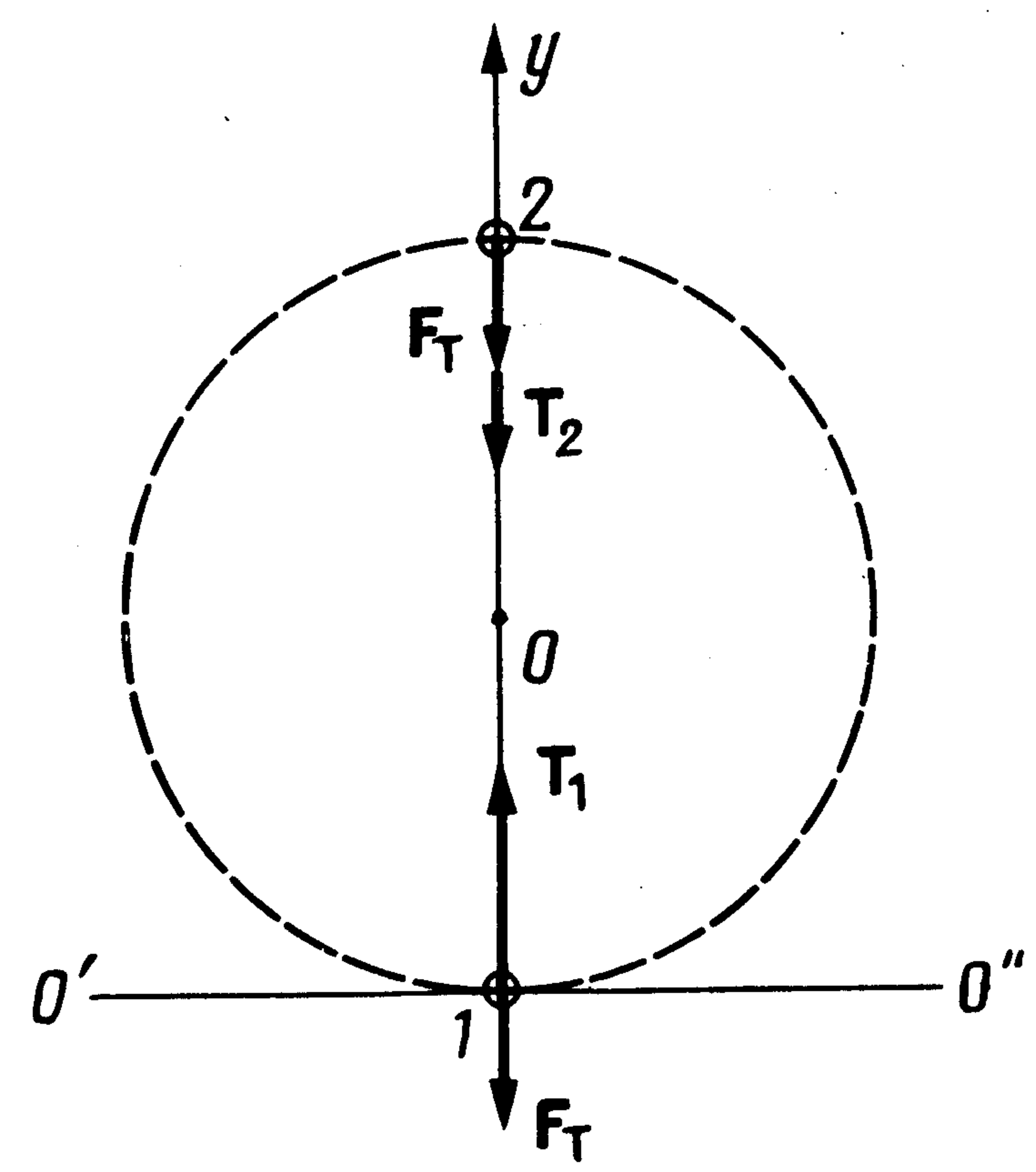


Рис. 5.8.

Из (5.4) следует:

$$v_A^2 = gR\cos\alpha.$$

Приравнивая выражения для v_A^2, получим

$$2h = R\cos\alpha.$$

Из рис. 5.7 очевидно

$$\cos\alpha = 1 - h/R, \quad 2h = R(1 - h/R),$$

окончательно, $h = R/3$.

Задача 6. Найти максимальную разность между силами натяжения нити при вращении в вертикальной плоскости шарика массой m на невесомой нити.

Дано: m, g; $(T_1 - T_2)_{\max}$ — ?

Решение. На шарик действуют две силы: сила натяжения и сила тяжести. Максимальная разность между силами натяжения определяется разностью максимальной и минимальной сил натяжения, возникающих при вращении шарика. Очевидно, что натяжение нити максимально в точке 1 и минимально в точке 2 (рис. 5.8).

Для точки 1 второй закон Ньютона в проекциях на ось y запишется в виде

$$mv_1^2/l = T_1 - mg, \quad a_{n1} = v_1^2/l,$$

где v_1 — скорость шарика в точке 1, l — длина нити. Аналогично, в точке 2 имеем

$$mv_2^2/l = T_2 + mg,$$

откуда

$$T_1 - T_2 = (m/l)(v_1^2 - v_2^2)) + 2mg.$$

Разность $v_1^2 - v_2^2$ определим из закона сохранения энергии, выбрав за нулевой уровень отсчета потенциальной энергии уровень $O'O''$:

$$mv_1^2/2 = mv_2^2/2 + mg2l,$$

следовательно,

$$v_1^2 - v_2^2 = 4gl$$

и окончательно

$$(T_1 - T_2)_{\max} = 6mg.$$

Задача 7. На нить длиной l подвесили груз. Какую минимальную горизонтальную скорость надо ему сообщить, чтобы он сделал полный оборот? Ответить на тот же вопрос в случае, если шарик закреплен на невесомом стержне (рис. 5.9).

Дано: l; v — ?

Решение. Для того, чтобы шарик сделал полный оборот, сила натяжения нити должна быть отлична от нуля во всех точках траектории. В предельном случае она может стать равной нулю только в наивысшей точке траектории: $T_A = 0$. Тогда основной закон динамики в проекции на направление OA запишется как

$$ma_n = mg + T_A,$$

или с учетом вышесказанного

$$mv_A^2/l = mg,$$

откуда

$$v_A = \sqrt{gl}. \tag{5.5}$$

Для определения скорости в точке B воспользуемся законом сохранения механической энергии. Выберем за нулевой уровень отсчета уровень $O'O''$. В точке B шарик обладает только кинетической энергией

$$E_{\text{кин}} = mv_B^2/2,$$

в точке A и кинетической энергией $E_{\text{кин}} = mv_A^2/2$ и потенциальной $E_{\text{пот}} = mg2l$. Запишем закон сохранения механической энергии:

$$mv_B^2/2 = mv_A^2/2 + mg2l. \tag{5.6}$$

Подставив в (5.6) выражение для v_A (5.5), получим

$$v_B = \sqrt{5gl}.$$

Пусть теперь шарик закреплен на невесомом стержне. В этом случае для того, чтобы шарик сделал полный оборот, достаточно, чтобы он имел в точке A сколь ко угодно малую скорость, так как стержень не позволит "сойти" с круговой траектории. Поэтому в точке A шарик обладает только потенциальной энергией $E_{\text{пот}} = 2mgl$. Воспользовавшись законом сохранения механической энергии, запишем

$$mv_B^2/2 = 2mgl,$$

откуда

$$v_B = 2\sqrt{gl}.$$

Задача 8. Велосипедист едет по горизонтальной плоскости, описывая дугу радиуса $r = 90$ м (рис. 5.10). На какой угол α отклоняется велосипедист при максимальной скорости $v = 5$ м/с?

Дано: $v = 5$ м/с, $r = 90$ м; α — ?

Решение. Мы не можем считать велосипедиста материальной точкой, так как размеры велосипедиста не малы по сравнению с рассматриваемыми расстояниями. Постановка задачи об угле наклона, если бы мы считали велосипедиста материальной точкой, потеряла бы смысл.

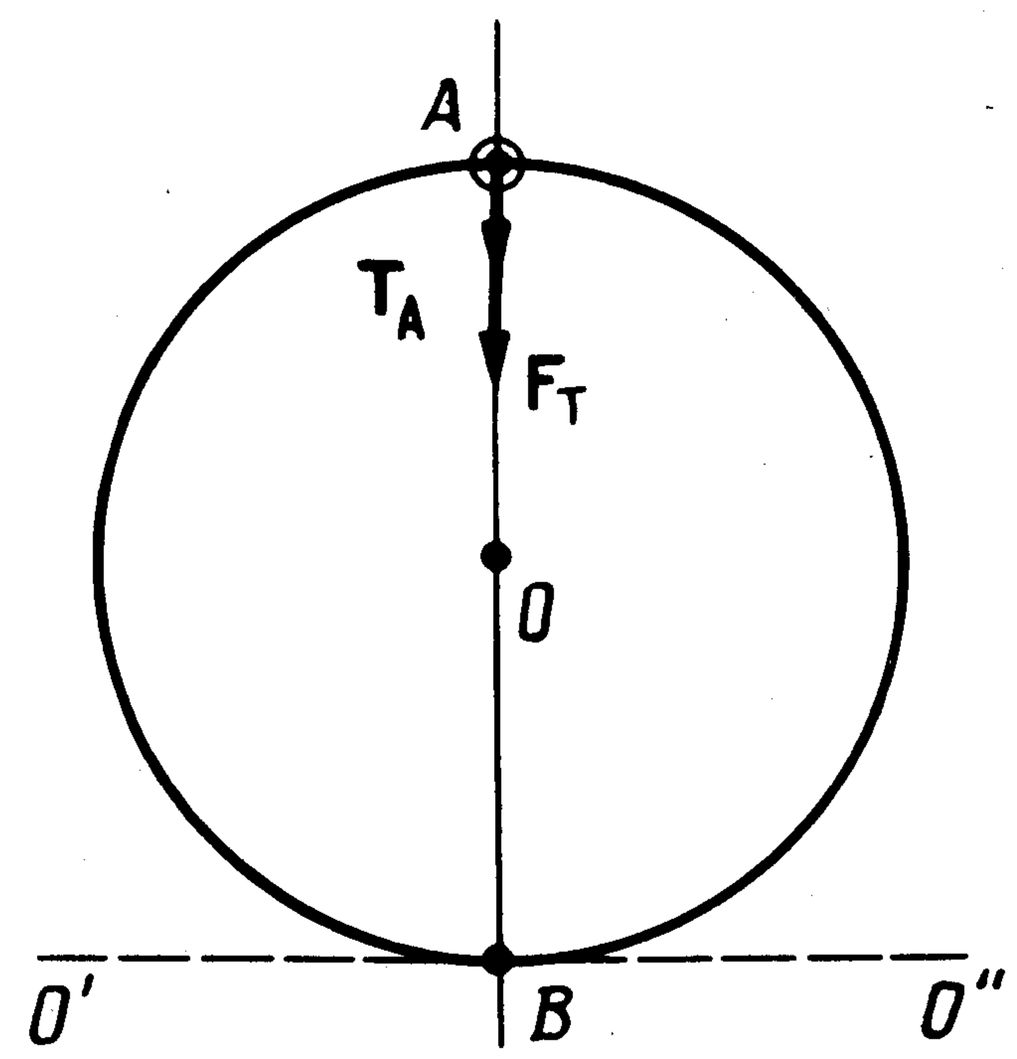


Рис. 5.9.

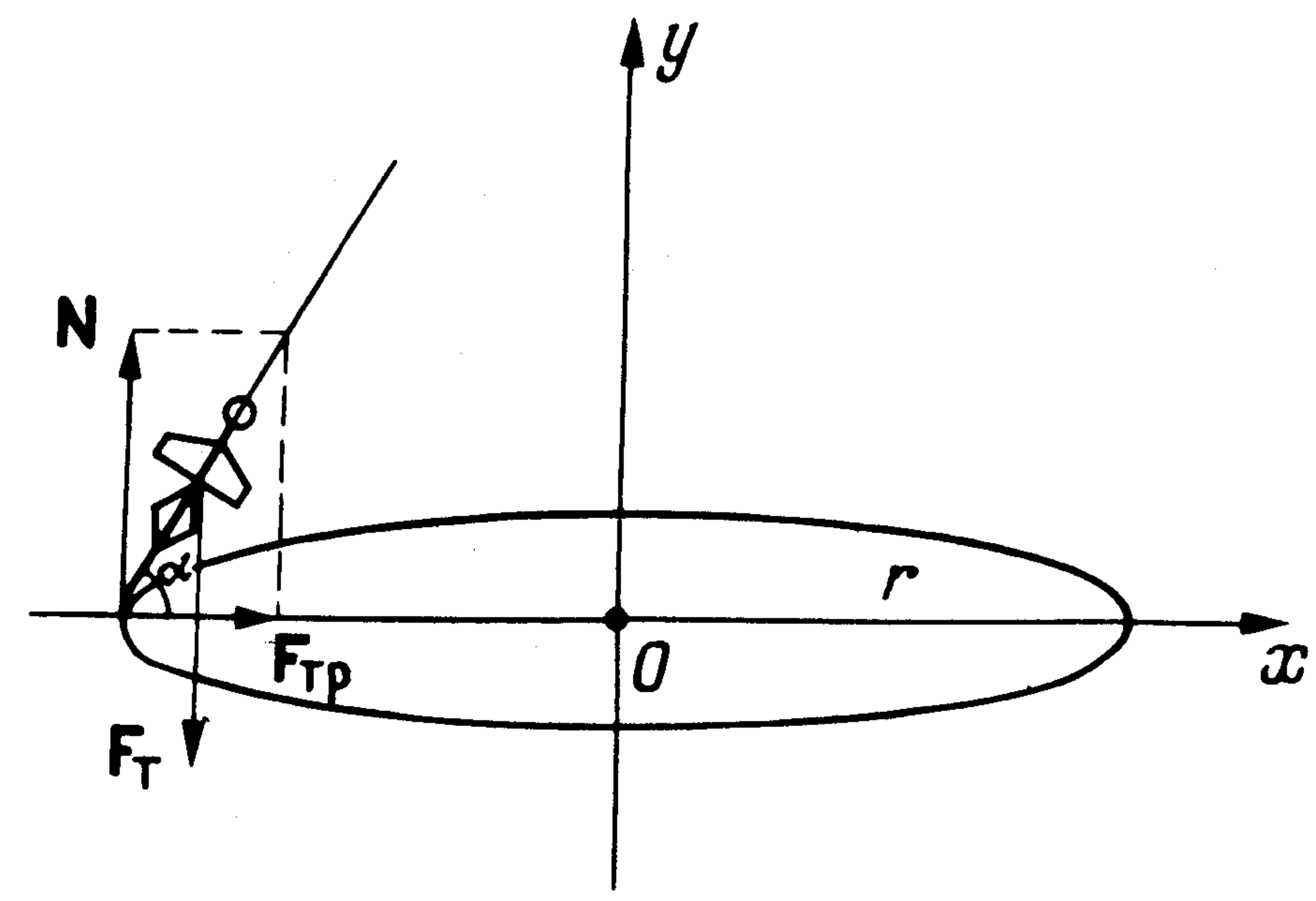


Рис. 5.10.

Рассмотрим силы, действующие на велосипедиста в плоскости чертежа: сила тяжести $\mathbf{F}_т$, сила нормальной реакции $\mathbf{N}$ и сила, которая может обеспечить движение велосипедиста по окружности, — сила трения $\mathbf{F}_{тр}$. Сумма проекций сил на касательное направление равна нулю, так как скорость велосипедиста по условию задачи не изменяется по величине, и об этих силах говорить не будем.

Согласно законам статики (см. ниже), для того, чтобы велосипедист не потерял равновесия, необходимо, чтобы равнодействующая сил $\mathbf{N}$ и $\mathbf{F}_{тр}$ была направлена по прямой, проходящей через центр тяжести. Тогда

$$\mathrm{tg}\alpha = N/F_{тр} = 1/k.$$

Напишем основной закон динамики

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F}_т + \mathbf{N} + \mathbf{F}_{тр}$$

и в проекциях на оси x и y имеем

$$ma_n = F_{тр},$$
$$0 = N - mg,$$
$$F_{тр} = kN = kmg,$$

откуда

$$v^2/R = kg. \tag{5.7}$$

Но в написанные соотношения не входит угол α.

Сила тяжести, сила нормальной реакции и сила трения приложены в разных точках и могут вызвать вращение велосипедиста относительно центра тяжести. Выразив k из (5.7), получим

$$\mathrm{tg}\alpha = gR/v^2.$$

Задача 9. Мотоциклист движется по наклонному треку со скоростью v. Чему должен быть равен радиус окружности, по которой движется мотоциклист, если мотоцикл перпендикулярен треку? α — угол наклона трека (рис. 5.11).

Дано: α, v; R — ?

Решение. На мотоциклиста действуют две силы, которые обеспечивают нормальное ускорение, — $\mathbf{N}$ и $\mathbf{F}_т$. Второй закон Ньютона имеет вид:

$$m\mathbf{a}_n = \mathbf{N} + \mathbf{F}_т.$$

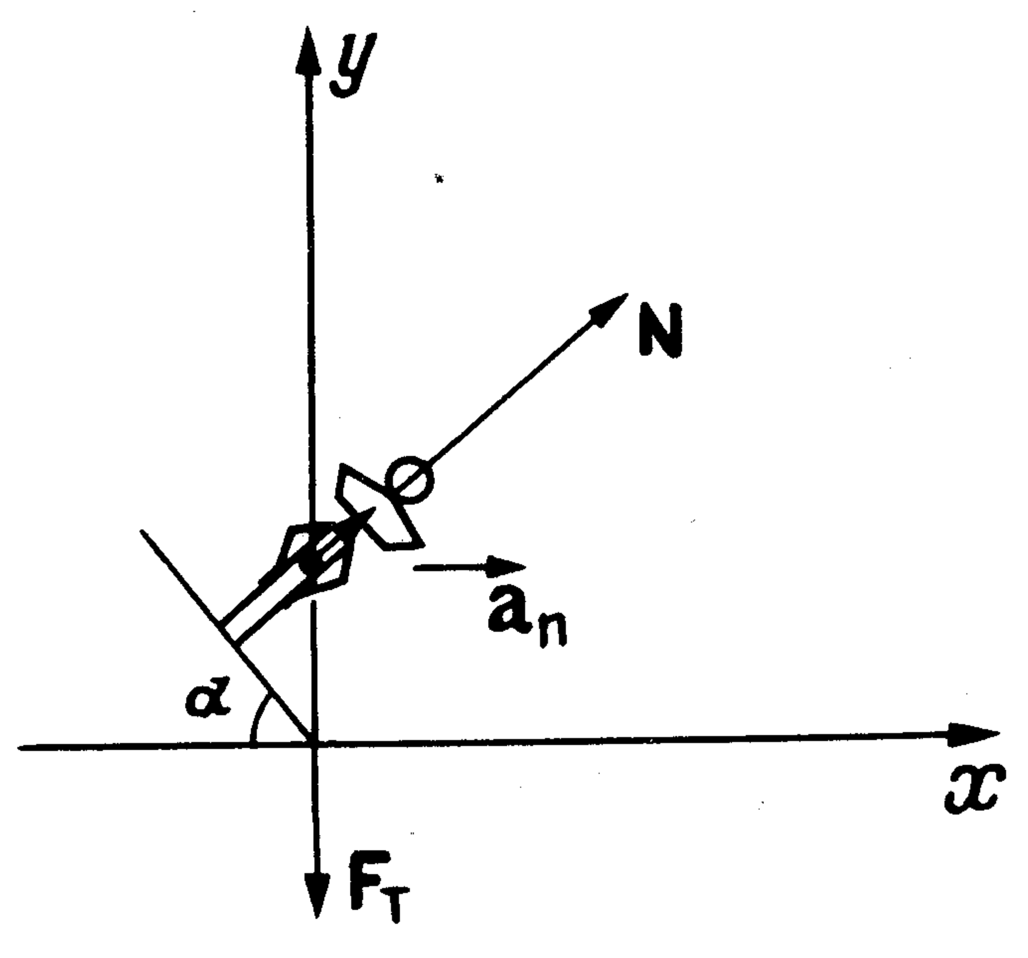


Рис. 5.11.

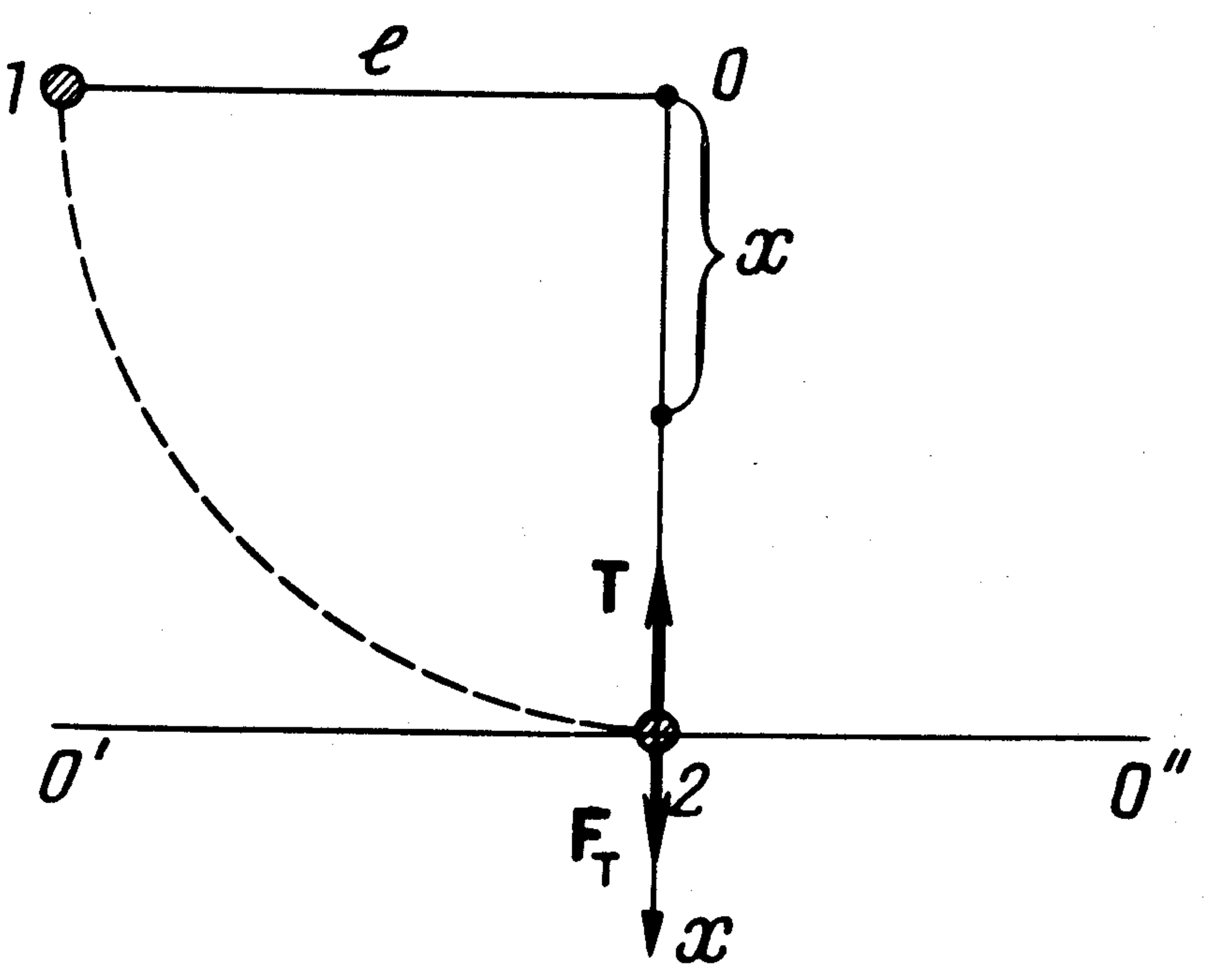


Рис. 5.12.

В проекциях на оси x и y (рис. 5.11) имеем

$$mv^2/R = N\sin\alpha, \quad 0 = N\cos\alpha - mg,$$

откуда

$$v^2/gR = \mathrm{tg}\alpha,$$

и окончательно

$$R = v^2/g\mathrm{tg}\alpha.$$

Задача 10. Нить длины l с привязанным к ней шариком массы m отклонили на 90° от вертикали и отпустили. На каком наименьшем расстоянии под точкой подвеса x нужно подставить гвоздь, чтобы нить, налетев на него, порвалась? Нить выдерживает силу натяжения T (рис. 5.12).

Дано: m, $\alpha = 90°$, T; x — ?

Решение. Сначала шарик движется по окружности радиуса l, налетев на гвоздь, шарик будет двигаться по окружности радиуса $l - x$.

Максимальную силу натяжения нить испытывает в положении 2 (см. задачу 4). Основной закон динамики для шарика есть

$$m\mathbf{a} = \mathbf{T} + \mathbf{F}_т. \tag{5.8}$$

В проекции на ось x уравнение (5.8) имеет вид:

$$-ma_n = mg - T,$$

или

$$mv^2/(l - x) = T - mg,$$

где T — максимальная сила натяжения.

Для определения x необходимо знать скорость тела v в положении 2. Воспользуемся законом сохранения механической энергии. В положении 1 тело обладает только потенциальной энергией

$$E_1 = E_{пот} = mgl$$

(за нулевой — уровень потенциальной энергии, принимается линия $O'O''$). В положении 2 тело обладает только кинетической энергией:

$$E_2 = E_{кин} = mv^2/2,$$

откуда

$$v^2 = 2gl$$

и окончательно

$$x = l - \frac{2mgl}{T - mg} = \frac{T - 3mg}{T - mg} l.$$

Задача 11. Внутри сферы радиуса R, вращающейся вокруг своего вертикального диаметра с угловой скоростью ω, покоится небольшое тело массы m. Радиус-вектор, соединяющий его с центром сферы, составляет угол φ с вертикалью (см. рис. 5.13). Найти силу трения $F_{\text{тр}}$ между телом и сферой.

Дано: m, ω, φ; $F_{\text{тр}}$ — ?

Решение. На тело действуют три силы: сила тяжести $\mathbf{F}_{\text{т}} = m\mathbf{g}$, сила реакции опоры $\mathbf{N}$, направленная по радиусу к центру сферы, и сила трения $\mathbf{F}_{\text{тр}}$, направленная по касательной к поверхности сферы и препятствующая соскальзыванию тела. Под действием этих сил тело равномерно движется по окружности с центром O, лежащей в горизонтальной плоскости. Запишем основной закон динамики для этого тела:

$$m\mathbf{a} = \mathbf{N} + \mathbf{F}_{\text{т}} + \mathbf{F}_{\text{тр}}. \tag{5.9}$$

Уравнение (5.9) в проекции на оси координат имеет вид

$$\begin{aligned} &\text{на ось } x \qquad ma = N\sin\varphi - F_{\text{тр}}\cos\varphi, \\ &\text{на ось } y \qquad 0 = N\cos\varphi + F_{\text{тр}}\sin\varphi - mg. \end{aligned} \tag{5.10}$$

Подставив в систему уравнений (5.10) выражение для линейного ускорения

$$a = \omega^2 r = \omega^2 R\sin\varphi,$$

где r — радиус окружности, по которой движется тело, и решив ее, получим для силы трения

$$F_{\text{тр}} = mg\sin\varphi - (1/2)m\omega^2 R\sin 2\varphi.$$

Задача 12. На нити длиной l подвешен шарик массой m. Нить отведена на угол 90° от вертикали и отпущена (рис. 5.14). На расстоянии R от точки O вбит гвоздь A. На какой высоте тело сойдет с круговой траектории? На какую максимальную высоту поднимется шарик?

Дано: $l = 2R$, $\alpha_0 = 90°$; h_1 — ? h_2 — ?

Решение. Шарик сначала движется по окружности радиуса $2R$, затем, зацепившись за гвоздь, шарик начинает двигаться по окружности радиуса R, в некоторой точке траектории сила натяжения становится равной нулю и шарик летит свободно лишь под действием силы тяжести.

При движении тела по окружности на него действуют две силы: сила тяжести $F_{\text{т}} = mg$ и сила натяжения нити T, вызывающие ускорение, имеющее тангенциальную и нормальную составляющие. Запишем второй закон Ньютона для тела:

$$m\mathbf{a} = \mathbf{T} + m\mathbf{g}. \tag{5.11}$$

Это уравнение в проекции на отрезок AB, вдоль которого направлено нормальное ускорение, запишется в виде

$$ma_n = T + mg\cos\alpha.$$

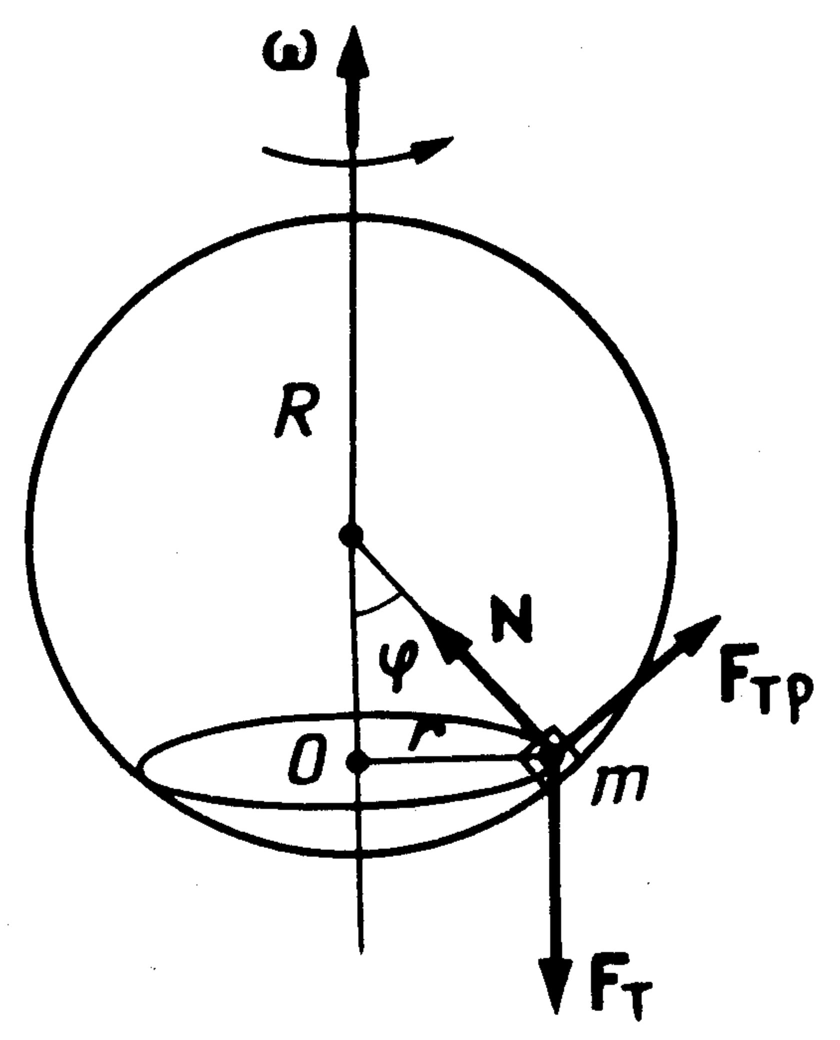


Рис. 5.13.

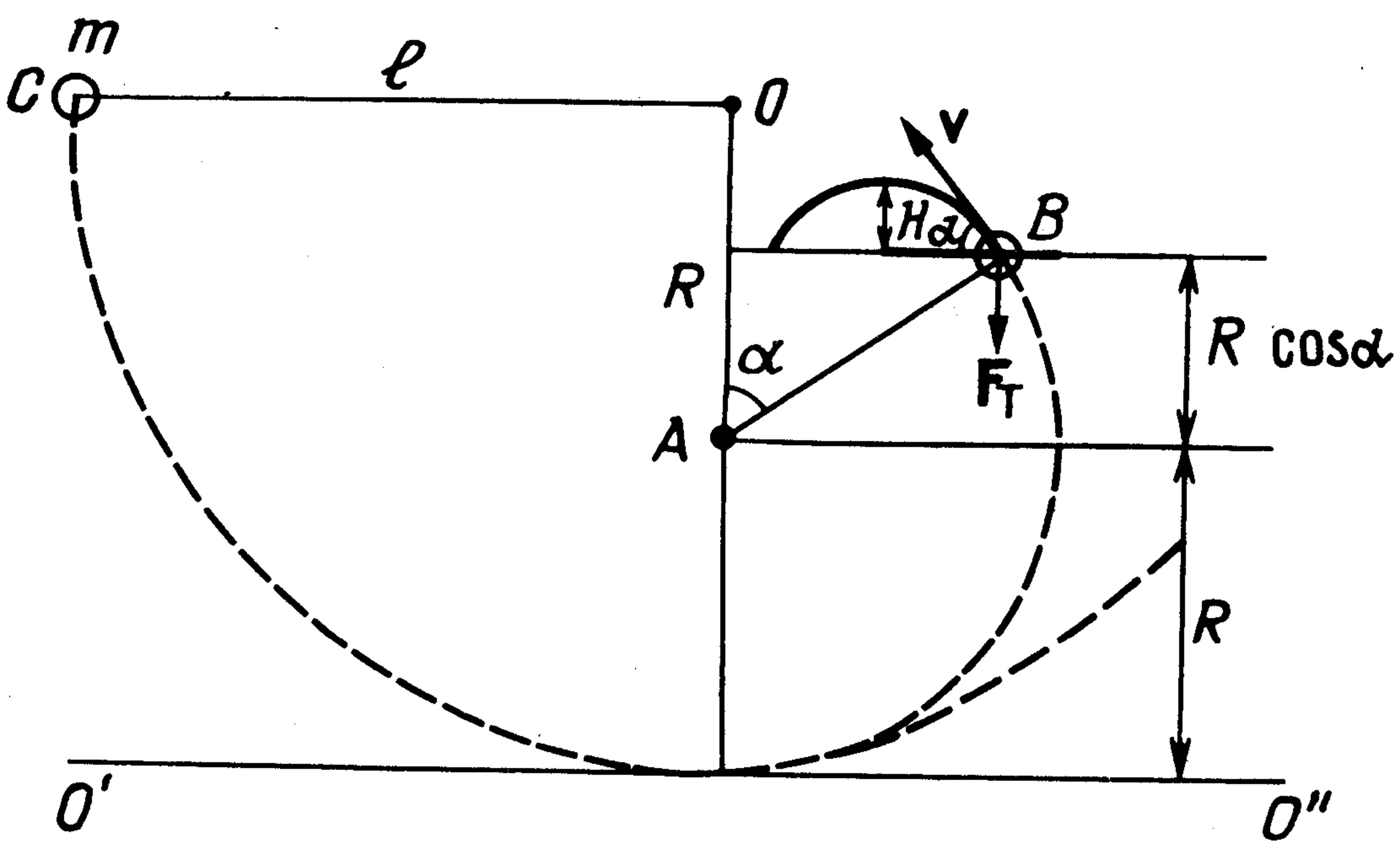


Рис. 5.14.

Пусть в точке B тело сойдет с круговой траектории, т. е. $T = 0$, откуда

$$g\cos\alpha = a_n, \text{ или } g\cos\alpha = v^2/R. \tag{5.12}$$

В этом уравнении два неизвестных — α и v.

Полная механическая энергия тела в начальный момент времени равна только потенциальной энергии ($O'O''$ — нулевой уровень отсчета потенциальной энергии): $E_c = E_п = mg2R$. По закону сохранения эта энергия равна полной механической энергии тела в точке B:

$$E_B = (mgR + mgR\cos\alpha) + mv^2/2 =$$
$$= mgR(1 + \cos\alpha) + mv^2/2.$$

Решив систему уравнений

$$g\cos\alpha = v^2/R,$$
$$mg2R = mgR(1 + \cos\alpha) + mv^2/2,$$

получим $\alpha = \arccos\frac{2}{3}$ и, следовательно, высота h_1, на которой тело сойдет с круговой траектории, есть

$$h_1 = R + R\cos\alpha = (5/3)R = (5/6)l.$$

После точки B шарик будет двигаться по параболе как тело, брошенное со скоростью v под углом α к горизонту. Подставив в (5.12) значение угла $\alpha = \arccos 2/3$, получим скорость v: $v = \sqrt{(2/3)gR}$. Максимальная высота H подъема тела, брошенного под углом к горизонту α (см. рис. 5.14), равна:

$$H = \frac{v^2\sin^2\alpha}{2g} = \frac{2}{3}\frac{gR(1 - 4/9)}{2g} = \frac{5}{27}R,$$

Следовательно,

$$h_2 = h_1 + H = (5/3)R + (5/27)R = (50/27)R.$$

Задача 13. Тело массой $m = 0,1$ кг соскальзывает без трения по наклонной плоскости, переходящей в цилиндрическую поверхность радиусом R. Определить силы давления тела на поверхность цилиндра F_A и F_B в точках A и B в случае, когда тело соскальзывает с высоты $H = 3R$ (рис. 5.15).

Дано: $m = 0,1$ кг, $H = 3R$; F_A — ? F_B — ?

Решение. В точке B на тело действует две силы: сила тяжести $\mathbf{F}_т = m\mathbf{g}$ и сила реакции опоры $\mathbf{N}_1$, численно равная силе давления тела на поверхность $\mathbf{F}_B$. В точке A на тело также действует $\mathbf{F}_т$ и сила реакции опоры $\mathbf{N}_2$. Запишем основной закон динамики для тела в точках A и B:

$$m\mathbf{a}_1 = m\mathbf{g} + \mathbf{N}_1 \quad \text{и} \quad m\mathbf{a}_2 = m\mathbf{g} + \mathbf{N}_2.$$

Эти уравнения в проекции на ось y имеют вид

$$-ma_1 = -mg - N_1 \text{ и } ma_2 = -mg + N_2, \tag{5.13}$$

где $a_1 = v_1^2/R$ и $a_2 = v_2^2/R$. Кинетическая энергия тела в точке A: $E_{кA} = mv_2^2/2$. По закону сохранения энергии $E_{кA} = E_{пC} = mg3R$ (нулевой уровень отсчета потенциальной энергии $O'O''$), т. е. $v_2^2 = 6gR$. В точке B тело обладает кинетической и потенциальной энергией:

$$E_B = E_{кB} + E_{пB} = mv_1^2/2 + 2mgR.$$

Вследствие сохранения механической энергии

$$E_{кB} = mv_1^2/2 = 3mgR - 2mgR = mgR,$$

откуда

$$v_1^2 = 2gR.$$

Выразив из (5.13) N_1 и N_2 и подставив v_1^2 и v_2^2, получим

$$N_1 = mg(v_1^2/gR - 1) = mg,$$
$$N_2 = mg(v_2^2/gR + 1) = 7mg.$$

По третьему закону Ньютона $\mathbf{F}_A = -\mathbf{N}_2$, $\mathbf{F}_B = -\mathbf{N}_1$, т. е.

$$F_A = N_2 = 7mg = 6{,}8\,\text{Н},$$
$$F_B = N_1 = mg = 0{,}98\,\text{Н},$$

Задача 14. Найти первую космическую скорость v_I. Первая космическая скорость — скорость, которую надо сообщить телу, чтобы оно стало спутником Земли.

Дано: $R_З = 6400\,\text{км}\,(6{,}4 \cdot 10^6\,\text{м})$, $g = 10\,\text{м/с}^2$; v_I — ?

Решение. На тело, движущееся по круговой орбите вокруг Земли, действует единственная сила — сила тяготения. Эта сила и определяет нормальное ускорение спутника (рис. 5.16). Итак,

$$\frac{mv_I^2}{R_З + h} = G\frac{mM_З}{(R_З + h)^2},$$

где h — высота спутника над поверхностью Земли. Считаем, что $h \ll R_З$. Тогда

$$v_I = \sqrt{GM_З/R_З}.$$

Для удобства расчета воспользуемся формулой

$$g = GM_З/R_З^2,$$

откуда

$$GM_З = gR_З^2.$$

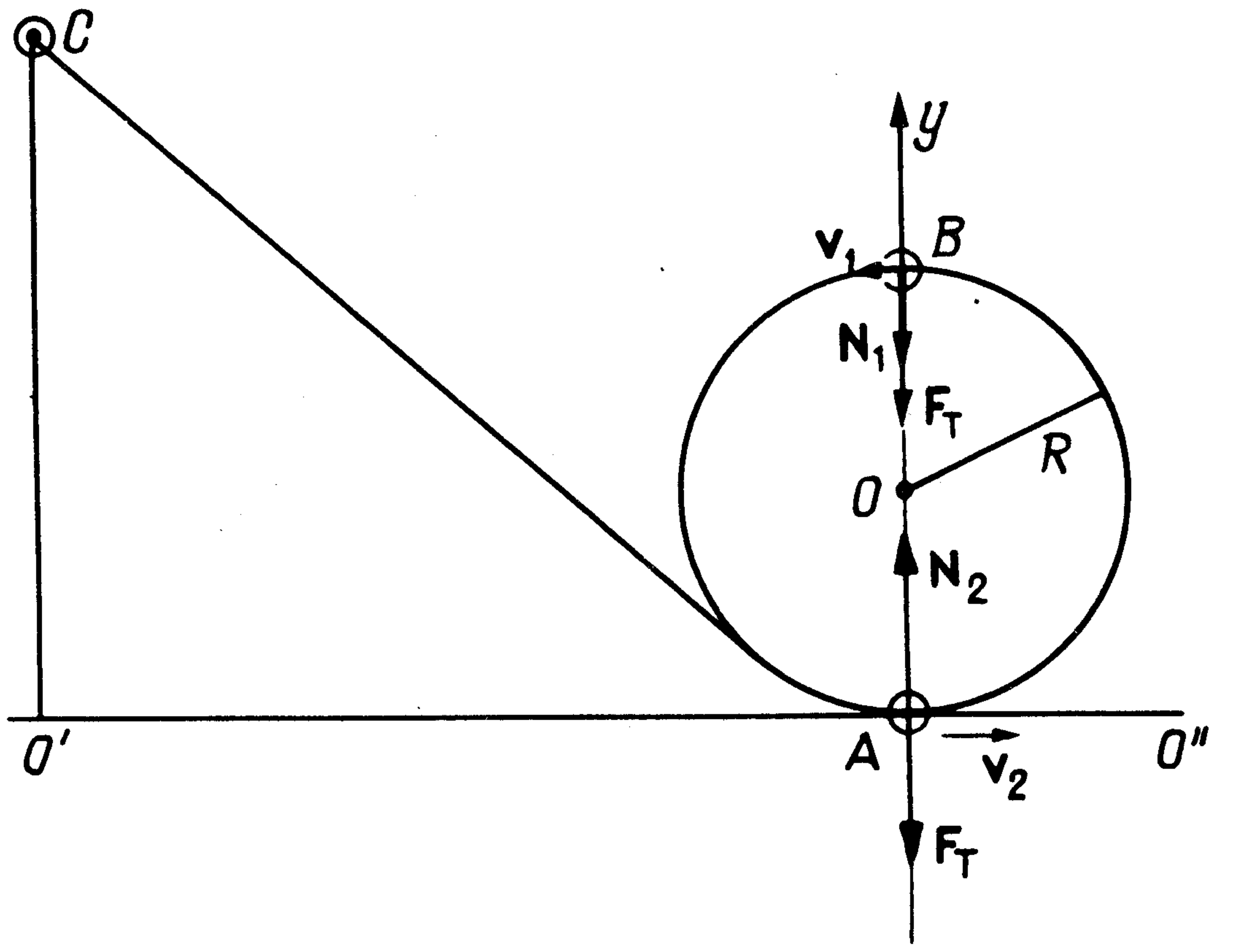


Рис. 5.15.

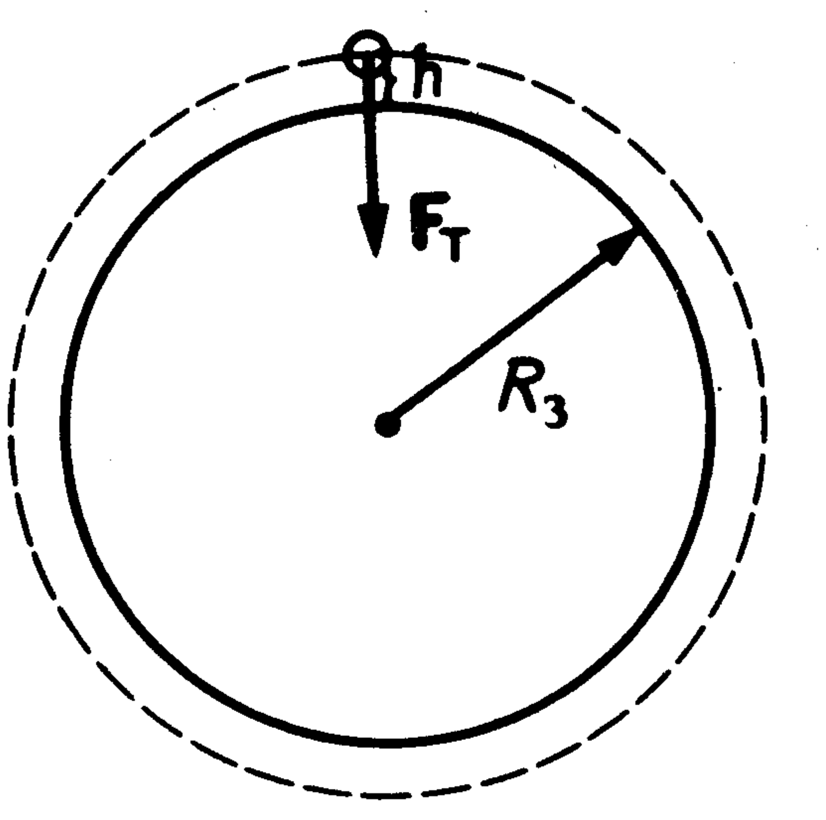


Рис. 5.16.

Следовательно,

$$v_I = \sqrt{gR_З}, \quad [v] = \sqrt{(м/с^2)м} = м/с, \quad v_I \approx 8 км/с.$$

Заметим, что все тела внутри спутника будут находиться в состоянии невесомости, так как они движутся с одинаковым ускорением, которое создается только силой тяготения. Сила нормальной реакции $N = 0$, следовательно, равен нулю и вес тела.

Задача 15. Вычислить линейную скорость искусственного спутника Земли на высоте 1700 км, если его орбиту можно приблизительно считать круговой. Принять $R_З = 6400$ км, $g = 10 м/с^2$ (рис. 5.17).

Дано: $R_З = 6400 км\,(6,4 \cdot 10^6 м)$, $H = 1700 км\,(1,7 \cdot 10^6 м)$; v — ?

Решение. На спутник действует одна сила — сила тяготения $F_т$. Запишем для спутника второй закон Ньютона:

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F}_т. \tag{5.14}$$

Проекция уравнения (5.14) на направление радиуса вращения

$$\frac{mv^2}{R_З + H} = GmM_З/(R_З + H)^2. \tag{5.15}$$

Так как $g = GM_З/R_З^2$, удобно представить $GM_З = gR_З^2$. Подставив это выражение в (5.15), получим

$$gR_З^2/(R_З + H) = v^2.$$

Вычислим

$$v = \sqrt{\frac{gR_З^2}{R_З + H}},$$

$$v = \sqrt{\frac{10(6,4 \cdot 10^6)^2}{6,4 \cdot 10^6 + 1,7 \cdot 10^6}\frac{м}{с}} = 7,1 \cdot 10^3 м/с.$$

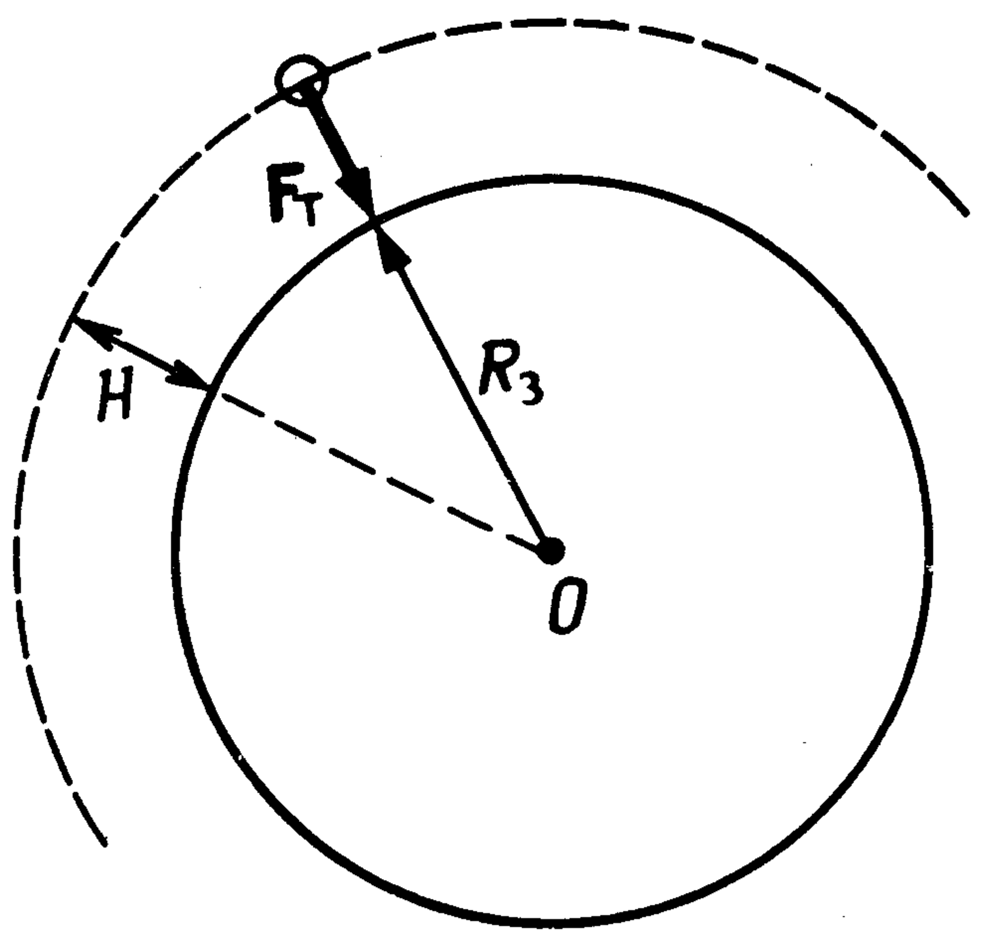


Рис. 5.17.

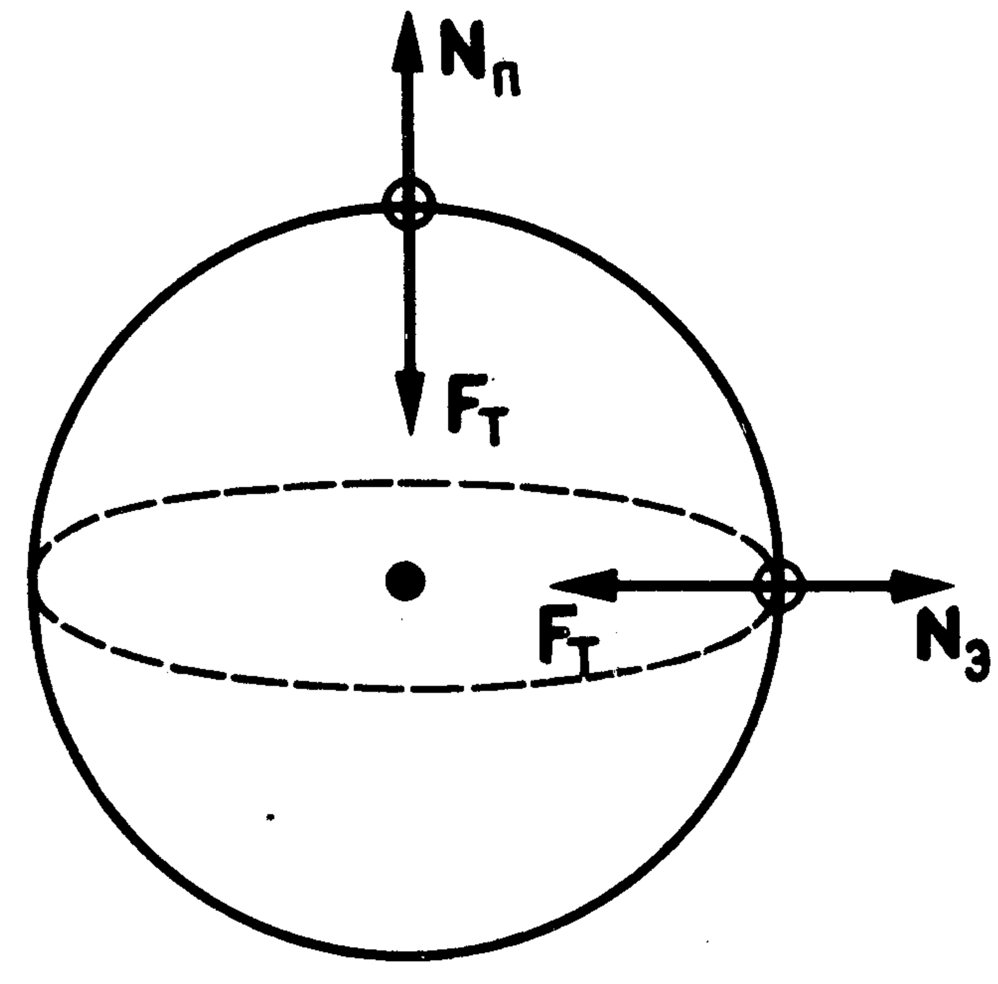


Рис. 5.18.

Задача 16. На экваторе воображаемой планеты тела весят вдвое меньше, чем на полюсе. Определите среднюю плотность вещества планеты, если период ее вращения вокруг оси $T = 1$ ч $27,5$ мин.

Дано: $T = 1$ ч $27,5$ мин $(5250$ с$)$; ρ — ?

Решение. На полюсе на тело действуют две силы: сила тяготения и сила нормальной реакции. Сумма сил равна нулю, так как тело неподвижно. Вес тела равен по величине силе нормальной реакции (рис. 5.18)

$$P_п = N, \quad N = GmM/r^2,$$

где m — масса тела, M — масса планеты, r — ее радиус, откуда

$$P_п = GmM/r^2.$$

На экваторе эти же силы должны обеспечить движение тела с угловой скоростью, равной угловой скорости вращения планеты:

$$m\omega^2 r = F_т - N.$$

Вес тела на экваторе

$$P_э = N = F_т - m\omega^2 r,$$

$$P_э = G\frac{mM}{r^2} - \frac{m4\pi^2 r}{T^2}.$$

По условию задачи

$$\frac{P_п}{P_э} = 2 = \frac{1}{1 - (4\pi^2 r^3/GMT^2)}.$$

Плотность планеты

$$\rho = \frac{M}{(4/3)\pi r^3},$$

таким образом,

$$2 = 1/\left(1 - \frac{3\pi}{GT^2\rho}\right),$$

откуда

$$\rho = \frac{6\pi}{GT^2},$$
$$[\rho] = \frac{\text{кг} \cdot \text{с}^2}{\text{м}^3 \cdot \text{с}^2} = \frac{\text{кг}}{\text{м}^3},$$
$$\rho = \frac{6 \cdot 3,14}{6,67 \cdot 10^{-11}(5,25 \cdot 10^3)^2} \frac{\text{кг}}{\text{м}^3} = 1,03 \cdot 10^4 (\text{кг}/\text{м}^3).$$

Задача 17. Два одинаковых поезда массы 1000 т каждый движутся по экватору навстречу друг другу со скоростями 30 м/с. Насколько отличаются силы, с которыми они давят на рельсы?

Дано: $m = 1000$ т (10^6 кг), $v = 30$ м/с; $(P_1 - P_2)$ — ?

Решение. Рассмотрим движение поездов относительно системы отсчета, связанной с Солнцем. Скорость поезда, движущегося в направлении вращения Земли:

$$v_1 = v_З + v.$$

Скорость поезда, движущегося в противоположную сторону:

$$v_2 = v_З - v.$$

На каждый из поездов действуют две силы: сила тяготения и сила нормальной реакции. Основной закон динамики для поездов запишется в виде

$$mv_1^2/R_З = F_т - N_1,$$
$$mv_2^2/R_З = F_т - N_2.$$

Вычитая из первого уравнения второе, получим

$$(m/R_З)(v_1^2 - v_2^2) = N_2 - N_1.$$

Так как $N_1 = P_1$, $N_2 = P_2$, разность сил давления равна

$$P_2 - P_1 = (m/R_З)(v_1^2 - v_2^2) = 4vv_Зm/R_З.$$

Окончательно,

$$P_2 - P_1 = \frac{8 \cdot 3,14 \cdot 30 \cdot 10^6}{24 \cdot 3600} \text{Н} = 8,72 \cdot 10^3\,\text{Н}.$$

Задачи для самостоятельного решения

Задача 1. Определить, на каком расстоянии от поверхности Земли должен находиться спутник, если он вращается в плоскости экватора с периодом, равным периоду вращения Земли вокруг оси.

Ответ: $36,1 \cdot 10^3$ км.

Задача 2. Какова должна быть продолжительность суток на Земле, чтобы тела, находящиеся на экваторе, были невесомы.

Ответ: 1,41 часа.

Задача 3. Тело массой 1 кг, закрепленное на конце невесомого стержня длиной 0,5 м, вращается в вертикальной плоскости в поле силы тяжести с постоянной

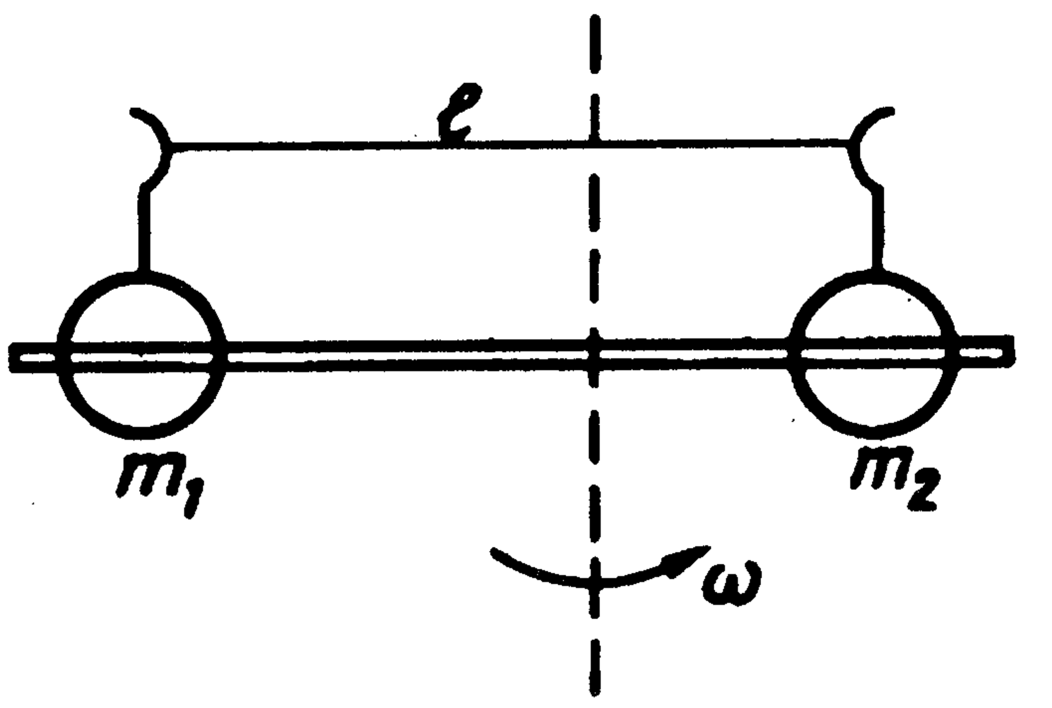


Рис. 5.19.

частотой $0,2\,c^{-1}$. Вычислить разность сил, действующих на стрежень в нижней и верхней точках траектории движения.

Ответ: 1,6 Н.

Задача 4. Камень массой 0,5 кг, привязанный к веревке длиной 50 см, вращается в вертикальной плоскости. Сила натяжения веревки в нижней точке окружности равна 44 Н. На какую высоту поднимется камень, если веревка отрывается в тот момент, когда его скорость направлена вертикально вверх?

Ответ: 2 м.

Задача 5. Определить плотность планеты, если тела на ее экваторе невесомы. Период обращения планеты вокруг оси $T = 20$ ч.

Ответ: $\rho = 27,25$кг/м^3.

Задача 6. Определить максимальную силу натяжения, которую выдерживает нить, к концу которой привязан шарик массой $m = 500$ г, если она отрывается, когда ее отклоняют на угол, больший $60°$.

Ответ: $T = 9,8$ Н.

Задача 7. На горизонтально вращающемся диске на расстоянии 1 м от вертикальной оси вращения лежит груз. При каком числе n оборотов в секунду груз начнет скользить, если коэффициент трения между грузом и диском 0,01?

Ответ: $n = 0,05$ об/с.

Задача 8. Маленький шарик массы m, подвешенный на невесомой нити, отклоняют от положения равновесия на угол $\alpha = 60°$ и отпускают. Определить натяжение нити в начальный момент движения.

Ответ: $T = mg/2$.

Задача 9. В конусе лежит шарик. Конус начинают вращать с угловой скоростью ω. На каком расстоянии от вершины конуса шарик будет находиться в состоянии равновесия? Плоский угол при вершине конуса 2α.

Ответ:

$$l = \frac{g \operatorname{ctg} \alpha}{\omega^2 \sin \alpha}.$$

Задача 11. Два тела массами m_1 и m_2 находятся на стержне, по которому они могут свободно двигаться (рис. 5.19). Тела соединены нитью длиной l. Стержень вращается с угловой скоростью ω относительно вертикальной оси вращения. Определить, на каком расстоянии от оси вращения установятся тела?

Ответ:

$$x_1 = \frac{m_1 l}{m_1 + m_2}, \quad x_2 = \frac{m_2 l}{m_1 + m_2}.$$

Задача 12. Радиус планеты Марс составляет 0,53 радиуса Земли, а плотность — 0,74 плотности Земли. Найти ускорение свободного падения на Марсе.

Ответ: $3,86\,\text{м/с}^2$.

Задача 13. Найти линейную скорость и период обращения искусственного спутника Земли по круговой орбите на расстоянии $H = R$ от поверхности Земли, где $R = 6400$ км — радиус Земли. Ускорение силы тяжести на поверхности Земли принять равным $9,8\,\text{м/с}^2$.

Ответ: $v = 5,6$ км/с; $T = 4$ ч.

Задача 14. Пуля попадает в шар массой M, висящий на нити длиной l, и застревает в нем. С какой максимальной скоростью может лететь пуля, чтобы нить не оборвалась? Максимальная сила натяжения, которую выдерживает нить $F_{\text{н}}$, масса пули m_0.

Ответ:
$$v_0 = (1/m_0)\sqrt{F_{\text{н}}(M + m_0)R - (M + m_0)^2 gR}\,.$$

Задача 15. Определить угловую скорость ω вращения двойной звездной системы. Массы звезд M_1 и M_2, расстояние между их центрами R. Найти также ускорения, с которыми движутся звезды.

Ответ:
$$\omega = \sqrt{G(M_1 + M_2)/R^3}; \quad a_1 = GM_2/R^2; \quad a_2 = GM_1/R^2.$$

Задача 16. Найти первую космическую скорость планеты, масса которой в 3 раза, а радиус в 2 раза больше, чем у Земли. Принять первую космическую скорость Земли равной $8 \cdot 10^3\text{м/с}$.

Ответ: $9,8 \cdot 10^3\text{м/с}$.

Глава 6

Статика

Статика излучает условия равновесия тела или системы тел. Состояние механической системы называется ***равновесным***, если все точки системы покоятся по отношению к выбранной системе отсчета. Если система покоится относительно инерциальной системы отсчета, то такое равновесие называется абсолютным, если система покоится относительно неинерциальной системы отсчета, то равновесие считается относительным. В дальнейшем мы будем рассматривать только абсолютное равновесие.

Для равновесия материальной точки необходимо и достаточно, чтобы сумма действующих на нее сил равнялась нулю, т. е.

$$\sum_i \mathbf{F}_i = 0. \tag{6.1}$$

Для равновесия твердого тела условие (6.1) является необходимым, но недостаточным. Например, пусть на тело действуют две равные, но противоположно направленные силы, приложенные в разных его точках (рис. 6.1). Под действием этих сил тело придет во вращательное движение.

Пусть тело имеет неподвижную ось вращения O (рис. 6.2). Движение, вызванное силой $\mathbf{F}$, зависит не только от величины и направления этой силы, но также и от точки ее приложения.

Момент силы — произведение силы на плечо. *Плечо* силы — это кратчайшее расстояние от оси вращения до линии действия силы (отрезок d на рис. 6.2). Считаем моменты сил, стремящихся вызвать вращение тела по часовой стрелке,

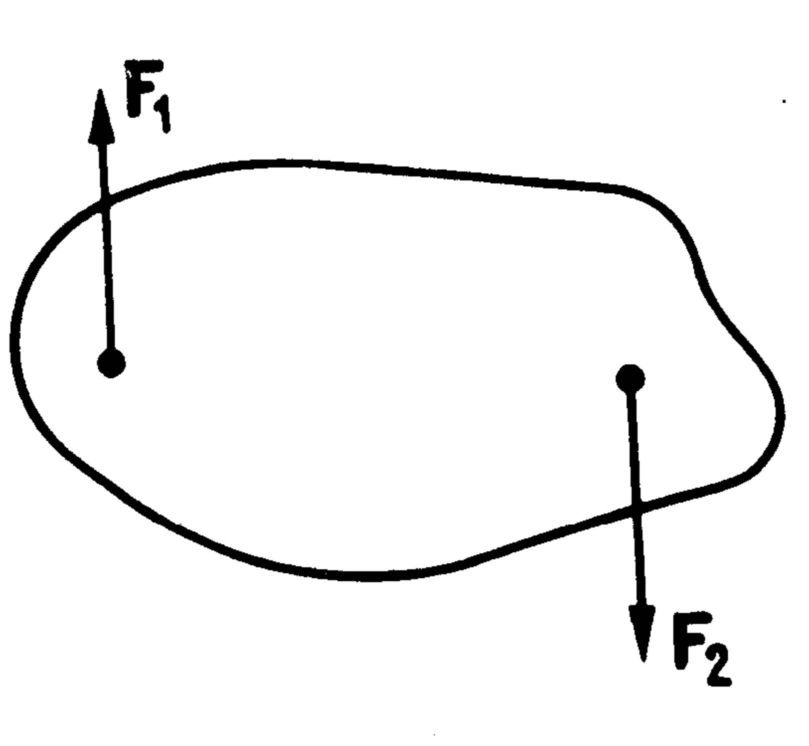


Рис. 6.1.

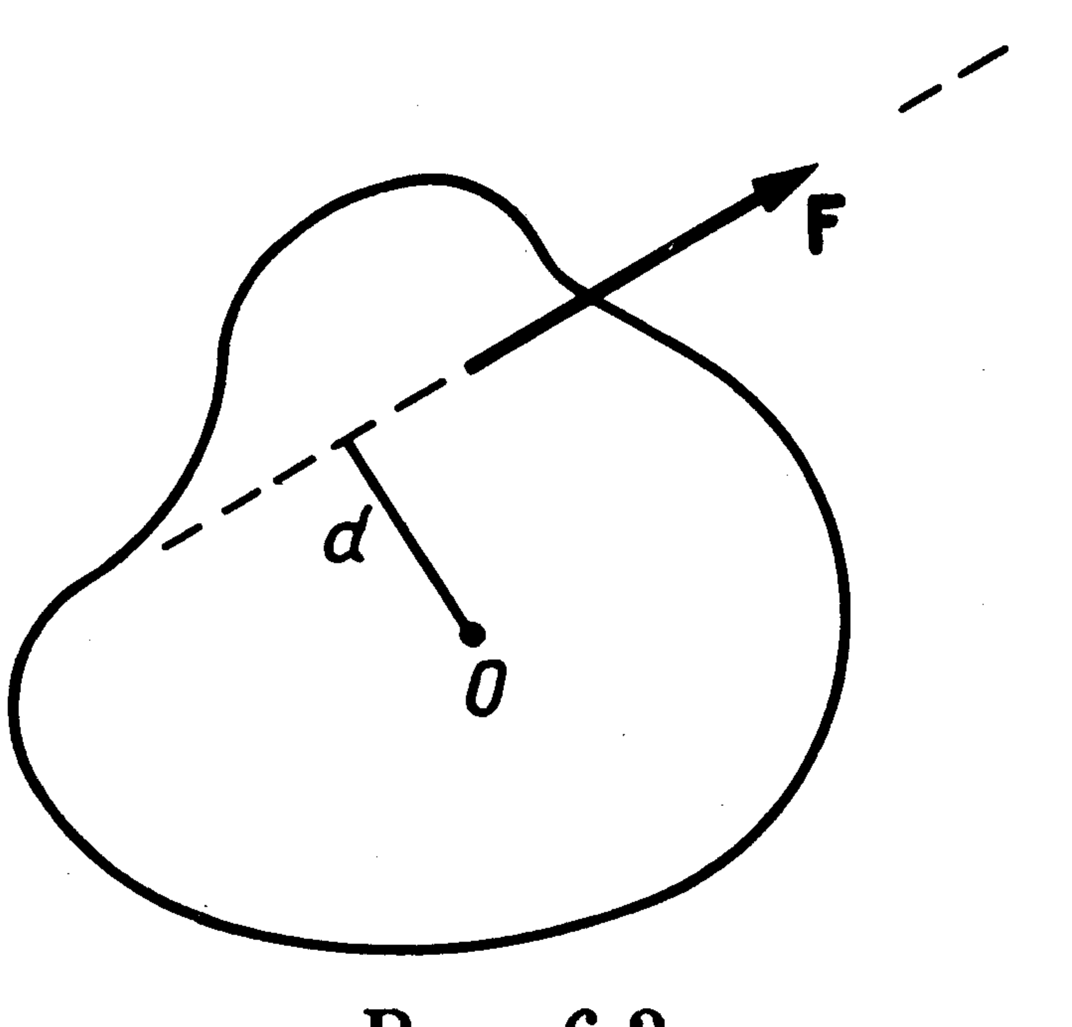


Рис. 6.2.

положительными, а моменты сил, стремящихся вызвать движение в обратном направлении, отрицательными. Следовательно, для равновесия тела, имеющего неподвижную ось вращения, необходимо, чтобы алгебраическая сумма моментов сил, действующих на тело, относительно этой оси была равна нулю:

$$\sum_i M_i = 0. \tag{6.2}$$

Если у тела нет закрепленной оси вращения, для равновесия твердого тела необходимо и достаточно выполнение условий (6.1) и (6.2) относительно любой оси. Помимо изучения условий равновесия одним из вопросов статики является определение положения центра тяжести тела или системы тел. *Центр тяжести* — это точка приложения равнодействующей всех сил тяжести, действующих на тело при любом его положении в пространстве. Точка центра тяжести может быть вне самого тела, например, центр тяжести кольца. Сумма моментов всех элементарных сил тяжести относительно любой оси, проходящей через центр тяжести, равна нулю. Из определения центра тяжести следует, что его положение у однородного тела будет находиться на оси симметрии или на пересечении осей симметрии. Так, центр тяжести пластинки в форме прямоугольника находится в точке пересечения его диагоналей. Более общим понятием является центр масс. *Центр масс* — это точка твердого тела или системы тел, которая движется так же, как и материальная точка, на которую действует та же результирующая сила, что и на тело (систему тел):

$$m_{\text{сист}} \mathbf{v}_{\text{цм}} = \sum_i m_i \mathbf{v}_i,$$

где $m_{\text{сист}}$ — масса всей системы, $\mathbf{v}_{\text{цм}}$ — скорость ее центра масс, m_i — масса i-материальной точки, $\mathbf{v}_i$ — ее скорость. Если линейные размеры тела малы по сравнению с радиусом Земли, то центр масс совпадает с центром тяжести. Если известно положение всех материальных точек, составляющих систему, то положение центра масс всей системы или всего тела можно определить по формулам:

$$\begin{aligned} x_{\text{цм}} &= \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + \ldots}{m_1 + m_2 + \ldots} = \frac{\sum_i m_i x_i}{m}, \\ y_{\text{цм}} &= \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2 + \ldots}{m_1 + m_2 + \ldots} = \frac{\sum_i m_i y_i}{m}, \\ z_{\text{цм}} &= \frac{m_1 z_1 + m_2 z_2 + \ldots}{m_1 + m_2 + \ldots} = \frac{\sum_i m_i z_i}{m}, \end{aligned} \tag{6.3}$$

где x_i, y_i, z_i — координаты материальных точек, составляющих систему. Если ось вращения твердого тела проходит через центр тяжести (центр масс), то тело будет находиться в состоянии *безразличного равновесия*, если никаких сил, кроме силы тяжести, на тело не действует. Это означает, что тело будет сохранять равновесие при любом повороте относительно этой оси.

Равновесие бывает безразличное, устойчивое и неустойчивое. Примером состояния безразличного равновесия является тело, лежащее на горизонтальной плоскости. Различают также *устойчивое* и *неустойчивое* положения равновесия. Устойчивым положением равновесия тела называется положение, при малом отклонении от которого на тело действуют силы, стремящиеся вернуть его к положению равновесия. Например, в устойчивом равновесии находится шарик

Рис. 6.3.

на дне сферической чаши (рис. 6.3,*а*). При устойчивом положении равновесия потенциальная энергия системы минимальна. (Неустойчивое положение равновесия показано на рис. 6.3,*б*.)

Примеры решения задач

Задача 1. По середине натянутого каната привязан груз массой $m = 10$ кг. Канат провис на $\Delta h = 10$ см. Длина каната $l = 1$ м. Определить, чему равняется сила натяжения каната $F_н$.

Дано: $m = 10\,кг$, $\Delta h = 10\,см\,(0,1\,м)$, $l = 1\,м$; $F_н$ — ?

Решение. Силы, действующие на тело, изображены на рис. 6.4: сила тяжести $\mathbf{F}_т$ и две силы натяжения $\mathbf{F}'_н$ и $\mathbf{F}''_н$. Для тела необходимо выполнение условия (6.1) — условия равновесия материальной точки:

$$\sum_i \mathbf{F}_i = 0, \quad \text{т. е.} \quad \mathbf{F}_т + \mathbf{F}'_н + \mathbf{F}''_н = 0,$$

или

$$F''_{нx} + F'_{нx} = 0,$$
$$F'_{нy} + F''_{нy} - mg = 0.$$

В силу симметрии $F'_н = F''_н = F_н$ и

$$F_{нy} = F_н \sin\alpha,$$

откуда

$$2F_н \sin\alpha = mg, \qquad F_н = mg/2\sin\alpha.$$

Зная Δh и l, определим $\sin\alpha$:

$$\sin\alpha = \Delta h/\sqrt{\Delta h^2 + l^2/4}.$$

Окончательно,

$$F_н = \frac{mg\sqrt{\Delta h^2 + l^2/4}}{2\Delta h}, \tag{6.4}$$

$$[F] = \frac{кг\cdot(м/с^2)\sqrt{м^2}}{м} = Н,$$

$$F_н = 250\,Н.$$

Из формулы (6.4) очевидно, что, чем больше провисание, тем меньше сила натяжения каната.

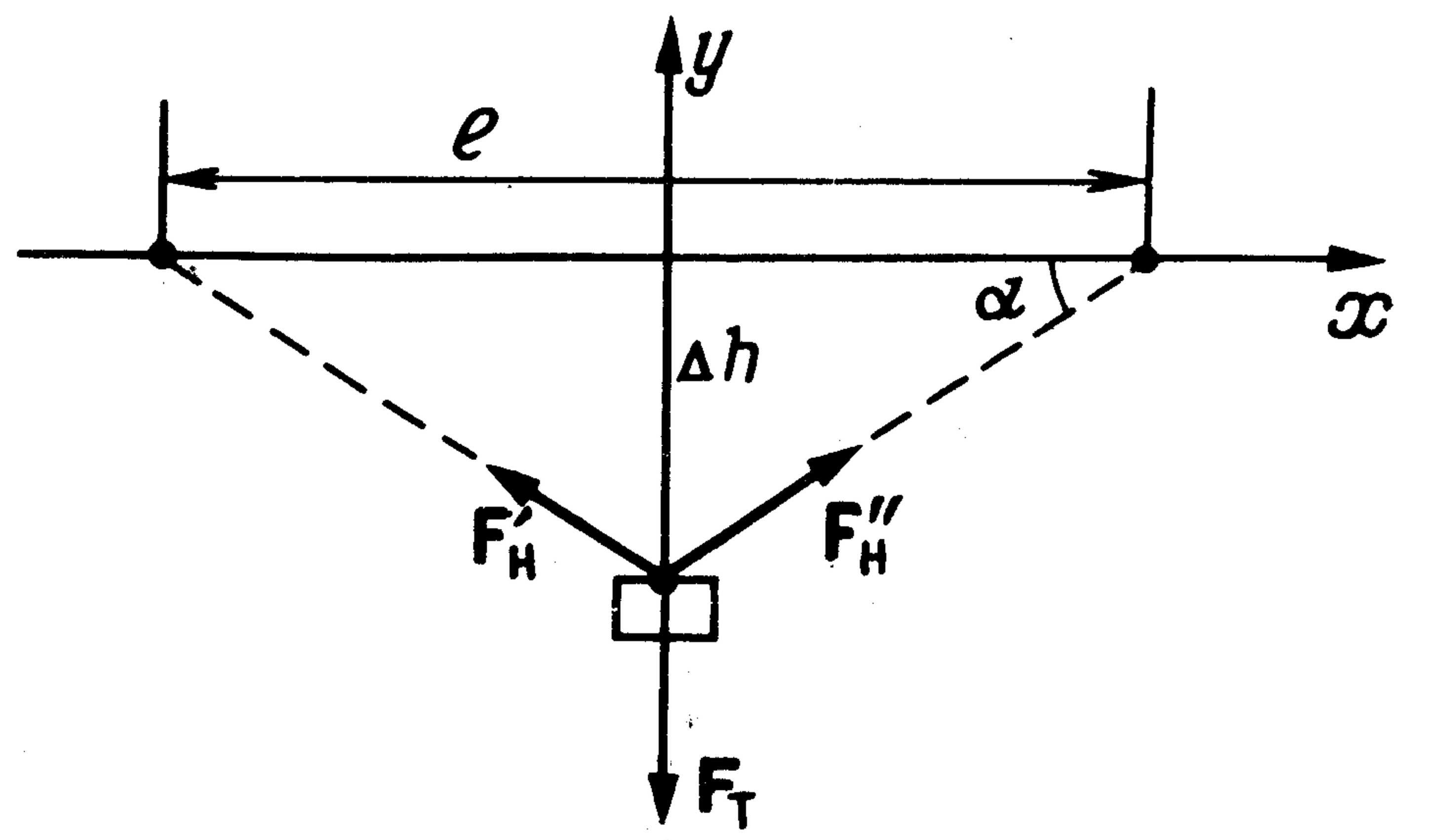


Рис. 6.4.

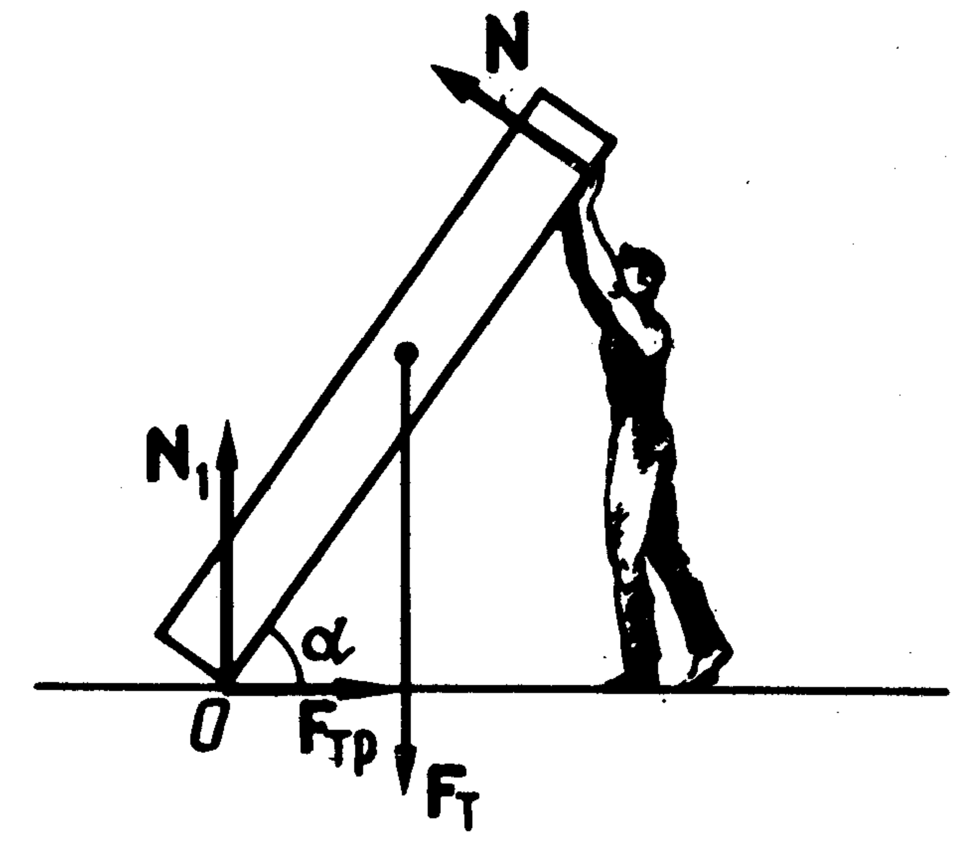


Рис. 6.5.

Задача 2. Рабочий медленно поднимает за один конец бревно массой m и ставит его вертикально (рис. 6.5), при этом второй конец бревна остается неподвижным. Точка O неподвижна. Определить зависимость силы давления бревна, $F_д$, действующей на рабочего, и силы трения $F_{тр}$ от угла α.

Дано: m; $F_д(\alpha)$ — ? $F_{тр}(\alpha)$ — ?

Решение. На бревно действуют четыре силы: сила тяжести $\mathbf{F}_т$, сила нормальной реакции со стороны опоры $\mathbf{N}_1$, сила трения, $\mathbf{F}_{тр}$ и сила, с которой рабочий толкает бревно $\mathbf{N}$.

По 3-му закону Ньютона $\mathbf{N} = -\mathbf{E}_д$, $N = F_д$. Так как по условию бревно медленно вращается относительно оси, проходящей через точку O, запишем условие (6.2):

$$mg(l/2)\cos\alpha - Nl = 0,$$

откуда $N = (1/2)mg\cos\alpha$, следовательно,

$$F_д = (1/2)mg\cos\alpha.$$

Сумма проекций сил на оси x и y, действующих на тело, должна быть равна нулю, так как точка O неподвижна, поэтому

$$F_{тр} - N\sin\alpha = 0, \quad F_{тр} = N\sin\alpha = (1/4)mg\sin 2\alpha.$$

Задача 3. Балка длиной 2 м закреплена в стене, как показано на рис. 6.6, $AB = 0,5$ м. На конце балки подвешен груз $m = 100$ кг, масса балки 50 кг. Найти силы, действующие на балку в точках A и B.

Дано: $A'D' = 2\,м$, $AB = 0,5\,м$, $m = 100\,кг$, $M = 50\,кг$; F_A — ? F_B — ?

Решение. Балка давит на стену в точке A вверх, а в точке B вниз. На балку со стороны стены действуют силы в противоположных направлениях.

На балку действуют четыре силы: сила тяжести $\mathbf{F}_т = M\mathbf{g}$, сила натяжения каната $\mathbf{T}$, силы реакции опоры $\mathbf{F}_A$ и $\mathbf{F}_B$. Так как груз находится в покое, то $T = T' = mg$. Запишем условия равновесия балки:

условие (6.1) $\qquad \mathbf{F}_т + \mathbf{F}_A + \mathbf{F}_B + \mathbf{T}' = 0,$

в проекциях на ось y $\qquad Mg + mg + F_A - F_B = 0. \qquad (6.5)$

Условие (6.2) запишем относительно оси вращения, проходящей через точку B и перпендикулярной плоскости чертежа:

$$mgBD' + MgBC' - F_AA'B = 0,$$

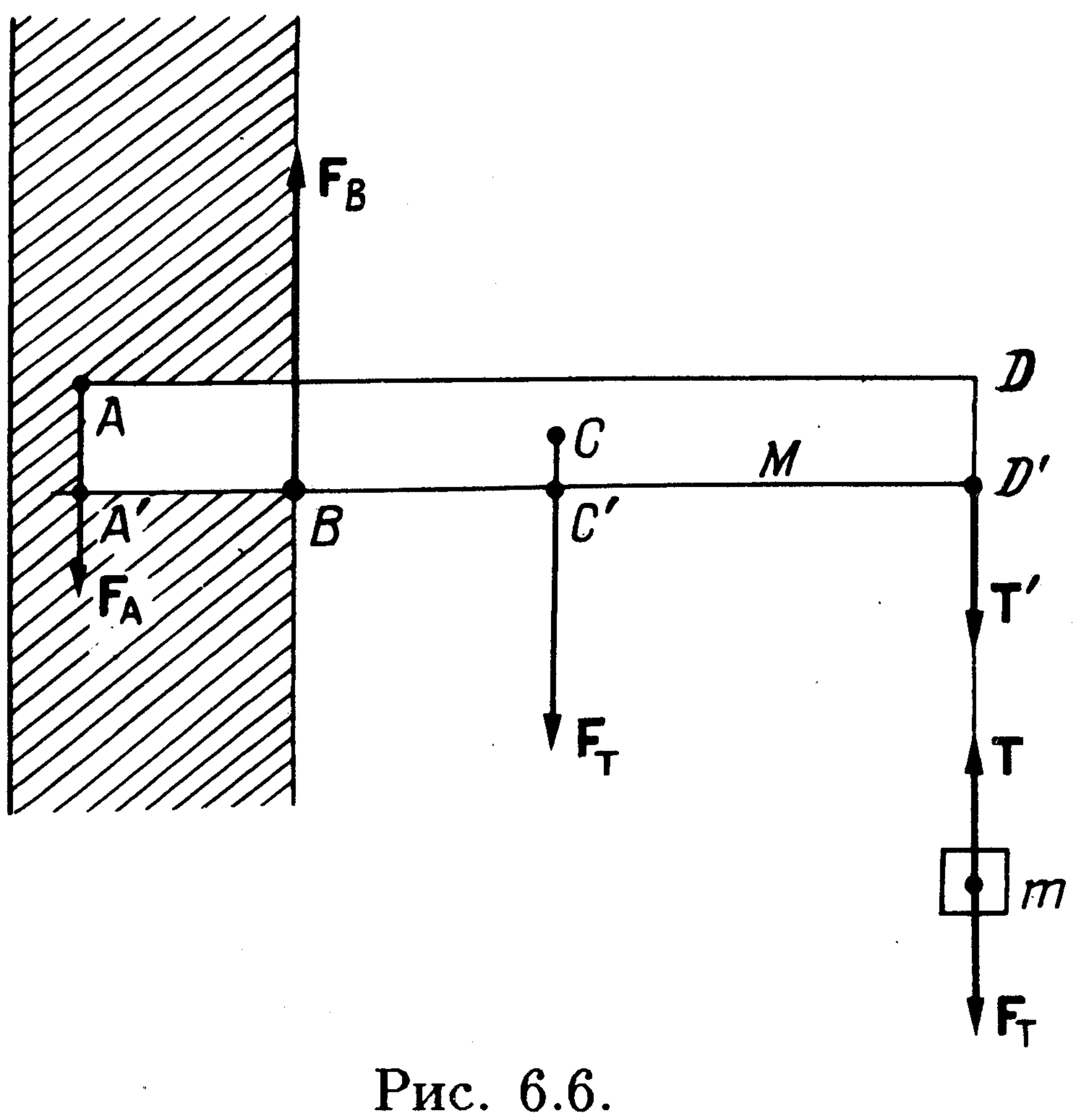


Рис. 6.6.

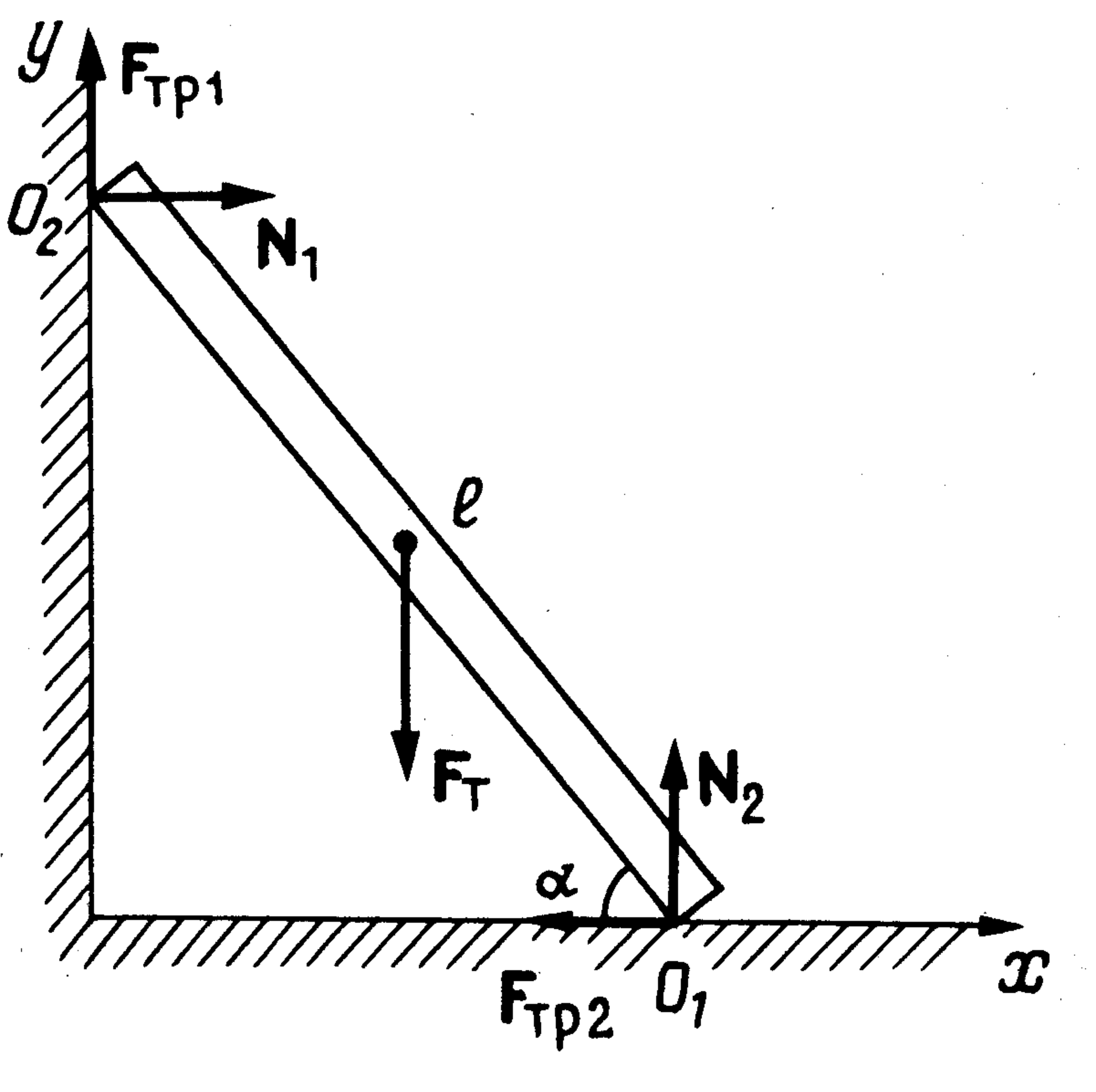


Рис. 6.7.

где BD', BC' и $A'B$ — плечи сил натяжения, тяжести и силы реакции опоры. Отсюда определим

$$F_A = \frac{mBD' + MBC'}{A'B} g,$$

$$F_A = \frac{100 \cdot 1{,}5 + 50 \cdot 1}{0{,}5} \cdot 10\,\text{Н} = 4000\,\text{Н}.$$

Из (6.5) находим F_B:

$$F_B = (m + M)g + F_A,$$

$$F_B = [(50 + 100) \cdot 10 + 4000\,\text{Н} = 5500\,\text{Н}.$$

Задача 4. Лестница прислонена к стенке. При каком минимальном угле наклона к полу она не будет падать? Коэффициент трения между лестницей и стеной k_1, между лестницей и полом k_2.

Дано: k_1, k_2; $\alpha_{\min}$ — ?

Решение. На лестницу (рис. 6.7) действуют сила тяжести $\mathbf{F}_{\text{т}}$, силы нормального давления $\mathbf{N}_1$ и $\mathbf{N}_2$, силы трения $\mathbf{F}_{\text{тр}1}$ и $\mathbf{F}_{\text{тр}2}$. В задаче ставится вопрос об определении минимального угла, поэтому берутся максимальные значения сил трения покоя, которые удерживают лестницу в покое:

$$F_{\text{тр}1} = k_1 N_1 \quad \text{и} \quad F_{\text{тр}2} = k_2 N_2.$$

Для равновесия лестницы должны выполняться условия (6.1) и (6.2). Условие (6.1):

$$\mathbf{F}_{\text{т}} + \mathbf{N}_1 + \mathbf{F}_{\text{тр}1} + \mathbf{N}_2 + \mathbf{F}_{\text{тр}2} = 0. \tag{6.6}$$

Для записи условия (6.2) мы должны выбрать ось вращения, относительно которой будем рассматривать моменты сил. Всегда выбираем ось так, чтобы как можно большее число моментов неизвестных сил относительно этой оси было равно нулю. Это может быть точка O_1 или O_2 (моменты двух сил относительно оси, проходящей через эти точки, будут равны нулю).

Запишем условие (6.2) относительно оси, проходящей через точку O_1:

$$N_1 l \sin\alpha_{\min} + F_{\text{тр}1} l \cos\alpha_{\min} - mg(l/2)\cos\alpha_{\min} = 0,$$

$$\text{tg}\alpha_{\min} = (-F_{\text{тр}1} + mg/2)/N_1.$$

Выразим $F_{\text{тр}1}$ и N_1 через силу тяжести mg. Для этого уравнение (6.6) запишем в проекциях на оси координат:

$$\text{на ось } x \qquad N_1 - F_{\text{тр}2} = 0,$$

$$\text{на ось } y \qquad F_{\text{тр}1} - mg + N_2 = 0,$$

или

$$N_1 = k_2 N_2,$$

$$k_1 N_1 - mg + N_2 = 0,$$

откуда

$$N_1 = \frac{k_2 mg}{1 + k_1 k_2}.$$

Окончательно

$$\text{tg}\alpha_{\min} = \frac{(mg/2) - k_1 k_2 mg/(1 + k_1 k_2)}{k_2 mg}(1 + k_1 k_2) = \frac{1 - k_1 k_2}{2k_2},$$

$$\alpha_{\min} = \text{arctg}(1 - k_1 k_2)/2k_2.$$

Очевидно, что при всех $\alpha > \alpha_{\min}$ лестница также не будет падать.

Задача 5. К вертикальной гладкой стене в точке A на веревке длиной l подвешен шар массой m. Какова сила натяжения веревки $\mathbf{T}$ и сила давления шара на стену $\mathbf{F}_\text{д}$, если его радиус равен R? Трением о стенку пренебречь.

Дано: l, m, R; T — ? $F_\text{д}$ — ?

Решение. На шар (рис. 6.8) действуют следующие силы: сила тяжести $\mathbf{F}_\text{т}$, сила нормальной реакции $\mathbf{N}$, сила натяжения $\mathbf{T}$. По условию (6.1)

$$\mathbf{F}_\text{т} + \mathbf{N} + \mathbf{T} = 0. \tag{6.7}$$

В проекциях на оси координат уравнение (6.7) имеет вид

$$\text{на ось } x \qquad N - T\sin\alpha = 0,$$

$$\text{на ось } y \qquad T\cos\alpha - mg = 0.$$

Моменты сил тяжести и нормальной реакции относительно оси, проходящей через точку O, равны нулю. Момент силы натяжения также должен быть равен нулю, так как сумма моментов всех сил, действующих на тело, относительно этой оси при равновесии равна нулю. Поэтому линия действия силы натяжения должна проходить через центр тяжести. Из рис. 6.8, следует, что

$$\sin\alpha = \frac{R}{l + R}, \quad \cos\alpha = \frac{\sqrt{l^2 + 2lR}}{l + R},$$

$$N = TR/(l + R).$$

Сила натяжения равна

$$T = mg(l + R)/\sqrt{l(l + 2R)}.$$

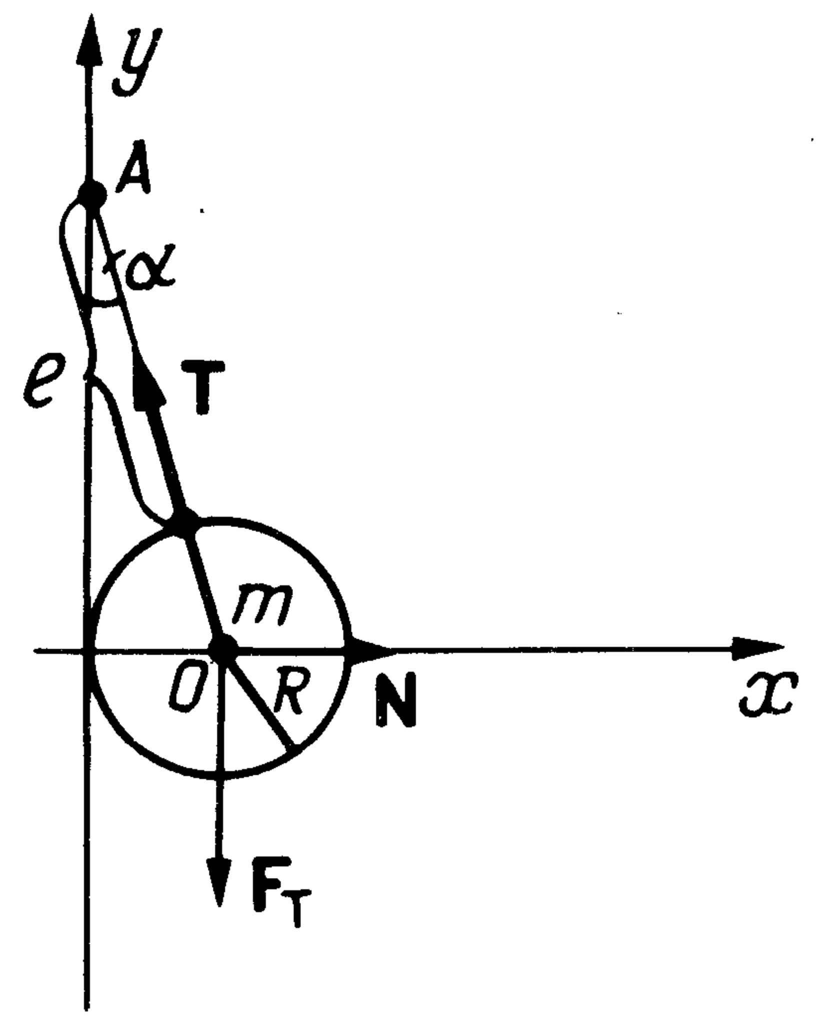


Рис. 6.8.

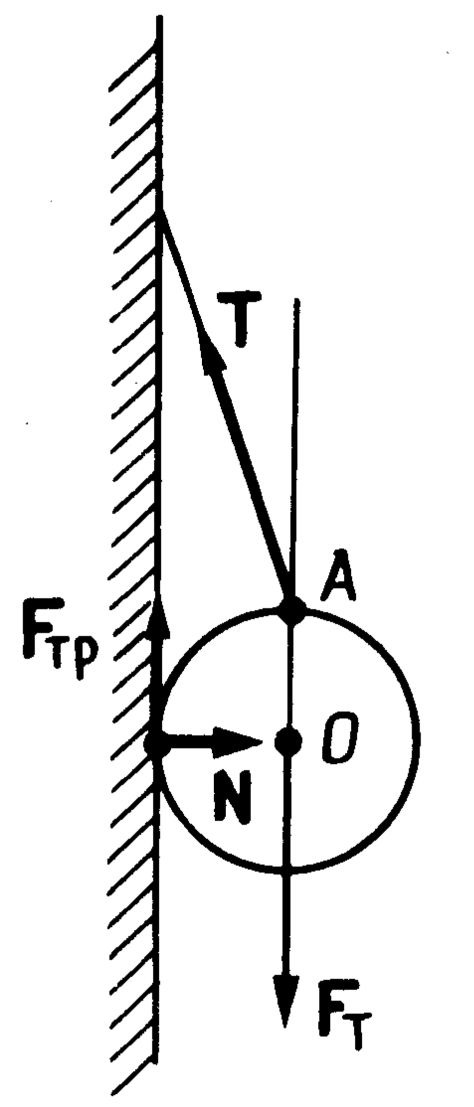


Рис. 6.9.

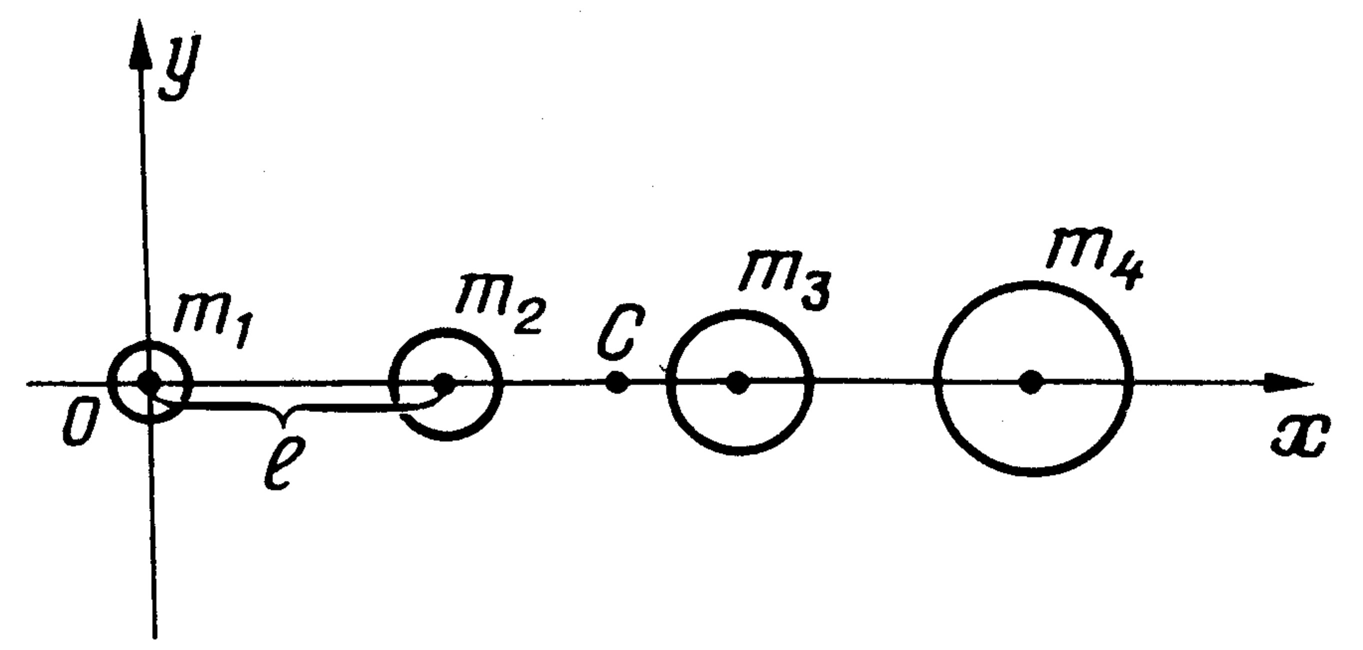


Рис. 6.10.

Сила нормальной реакции определяется из выражения

$$N = mgR/\sqrt{l(l+2R)}.$$

По 3-му закону Ньютона сила давления на стенку равна по величине силе нормальной реакции N:

$$\mathbf{F}_д = -\mathbf{N}, \quad F_д = N,$$

$$F_д = mgR/\sqrt{l(l+2R)}.$$

Задача 6. К вертикальной стене на веревке подвесили шар, причем точка подвеса находится на одной вертикали с центром тяжести. При каких значениях коэффициента трения возможен такой подвес?

Дано: $AO \parallel$ стене; k — ?

Решение. На шар (рис. 6.9) действует четыре силы: сила тяжести $\mathbf{F}_т = m\mathbf{g}$, сила натяжения $\mathbf{T}$, сила нормальной реакции $\mathbf{N}$, сила трения $\mathbf{F}_{тр}$. По условию (6.1) для равновесия тела необходимо

$$m\mathbf{g} + \mathbf{N} + \mathbf{T} + \mathbf{F}_{тр} = 0.$$

Условие (6.2) запишем относительно оси, проходящей через точку A, так как относительно этой оси моменты силы тяжести и силы натяжения нити равны нулю. Следовательно,

$$F_{тр}R - NR = 0,$$

а поскольку$F_{тр} = kN$, то такой подвес возможен при $k \geq 1$.

Задача 7. Определить центр тяжести четырех шаров массами 1 кг, 2 кг, 3 кг и 4 кг, закрепленных на невесомом стрежне. Расстояние между центрами шаров l (рис. 6.10).

Дано: $m_1 = 1\,кг$, $m_2 = 2\,кг$, $m_3 = 3\,кг$, $m_4 = 4\,кг$, l; $x_{цт}$ — ?

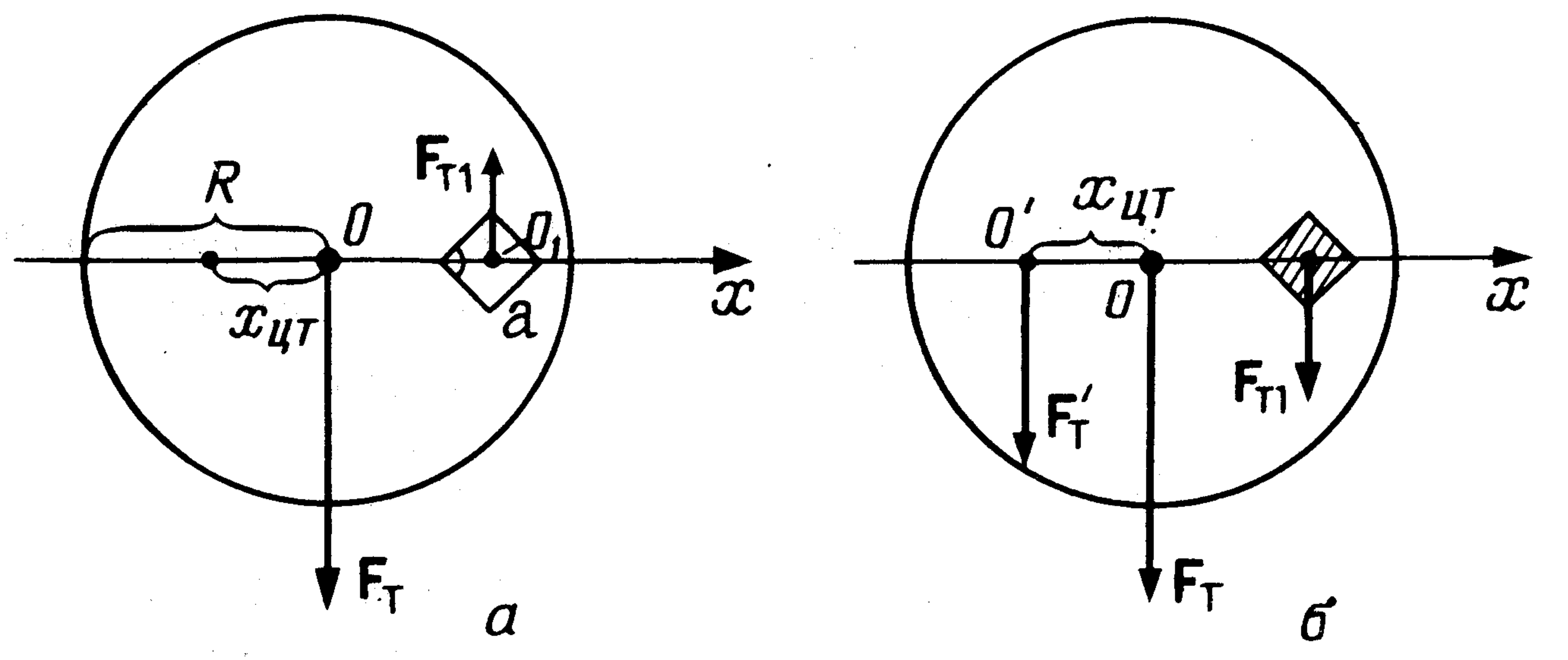


Рис. 6.11.

Решение.

1-й способ. Ось x выберем, как указано на рисунке. По формуле (6.3) имеем

$$x_{цт} = \frac{0m_1 + lm_2 + 2lm_3 + 3lm_4}{m_1 + m_2 + m_3 + m_4},$$
$$x_{цт} = (2l + 6l + 12l)/10 = 2l,$$

т. е. центр тяжести всей системы совпадает с центром тяжести шара массой m_3.

2-й способ. Воспользуемся определением центра тяжести: алгебраическая сумма моментов всех сил тяжести, действующих на все элементы системы относительно оси, проходящей через центр тяжести, равна нулю.

Пусть центр тяжести C находится на расстоянии $x_{цт}$ от центра первого шарика (рис. 6.10). Тогда сумма моментов сил тяжести относительно оси, проходящей через точку C, запишется в виде

$$-m_1gx_{цт} - m_2g(x_{цт} - l) + m_3g(2l - x_{цт}) + m_4g(3l - x_{цт}) = 0,$$
$$x_{цт} = \frac{m_2l + m_32l + m_43l}{m_1 + m_2 + m_3 + m_4} = 2l.$$

Задача 8. Определить центр тяжести однородного диска с вырезанным квадратом, как показано на рис. 6.11. Радиус диска R, сторона квадрата a.

Дано: R, a; $x_{цт}$ — ?

Решение. В силу симметрии центр тяжести диска будет находиться на оси x (рис. 6.11,a). Очевидно, что центр тяжести сместится влево от точки 0, так как правая часть диска будет легче благодаря вырезу. Сила $\mathbf{F}_{т1}$, приложенная в точке O_1 однородного диска и направленная вертикально вверх, эквивалентна вырезу, если сила тяжести вырезанного квадрата равна $\mathbf{F}_{т1}$.

Поскольку сумма моментов сил $\mathbf{F}_т$ и $\mathbf{F}_{т1}$ относительно оси, проходящей через центр тяжести, равна нулю, имеем

$$F_тx_{цт} - F_{т1}(x_{цт} + R - a/\sqrt{2}) = 0,$$
$$F_т = \rho h\pi R^2g, \quad F_{т1} = \rho ha^2g,$$

где ρ — плотность материала, h — толщина диска. Следовательно,

$$\rho h\pi R^2gx_{цт} - \rho ha^2g(x_{цт} + R - a/\sqrt{2}) = 0,$$

$$x_{\text{цт}} = \frac{a^2(R - a/\sqrt{2})}{\pi R^2 - a^2}.$$

Можно решить задачу еще одним способом. У диска без выреза центр тяжести находится в точке O. После выреза центр тяжести смещается влево по оси x. В точке O' приложена сила тяжести оставшейся части (рис. 6.11,*б*).

$$F'_{\text{т}} = F_{\text{т}} - F_{\text{т}1} = \rho g h(\pi R^2 - a^2), \tag{6.8}$$

где $F_{\text{т}1}$ — сила тяжести вырезанной части. Если вырезанную часть вернуть на прежнее место, то в точке O (по определению центра тяжести) приложена равнодействующая сил тяжести $\mathbf{F}'_{\text{т}}$ и $\mathbf{F}_{\text{т}1}$. Тогда относительно оси, проходящей через точку O, сумма моментов сил $\mathbf{F}'_{\text{т}}$ и $\mathbf{F}_{\text{т}1}$ должна быть равна 0:

$$F_{\text{т}}(R - a\sqrt{2}/2) = F'_{\text{т}} x_{\text{цт}}. \tag{6.9}$$

Воспользовавшись формулами (6.8) и (6.9), получим для $x_{\text{цт}}$:

$$x_{\text{цт}} = \frac{a^2(R - a/\sqrt{2})}{\pi R^2 - a^2}.$$

Задача 9. Определить положение центра тяжести тонкой однородной проволоки, изогнутой по дуге радиуса r (рис. 6.12).

Дано: r; x — ?

Решение. Впишем в полуокружность правильный многоугольник. Определим сумму моментов сил тяжести сторон многоугольника относительно оси AI, считая, что силы тяжести перпендикулярны плоскости чертежа. Сила тяжести каждой стороны, очевидно, приложена к ее центру. Из рис. 6.12 ясно, что плечо силы тяжести, действующей на AB, есть x_1, на BC — x_2, и т. д. Таким образом, суммарный момент сил тяжести относительно AI

$$M = (\rho ABx_1 + \rho BCx_2 + \rho CDx_3 + \rho DEx_4 + \rho EFx_5 + \rho FIx_6)g,$$

где ρ — линейная плотность проволоки, $\rho = m/\pi r$, m — масса проволоки. Из подобия треугольников $\Delta ABB'$ и ΔOMA следует:

$$\frac{AB'}{BB'} = \frac{AB}{2MO}, \quad BB' = 2x_1,$$

где $h = MO$ — высота треугольника ΔAOB. Очевидно, что высоты треугольников ΔCOD, ΔBOC и т. д. будут одинаковы, отсюда

$$\begin{aligned} ABx_1 &= AB'h, \\ BCx_2 &= B'C'h, \\ CDx_3 &= C'D'h, \quad \text{и т. д.} \end{aligned}$$

Тогда, сложив левые и правые части написанных равенств, получим

$$\begin{aligned} &(ABx_1 + BCx_2 + CDx_3 + DEx_4 + EFx_5 + FIx_6) = \\ &= (AB' + B'C' + C'D' + E'F' + F'I)h = 2rh. \end{aligned}$$

Если увеличивать число сторон вписываемого многоугольника, то h стремится к r, откуда окончательно

$$M = \rho 2r^2 g. \tag{6.10}$$

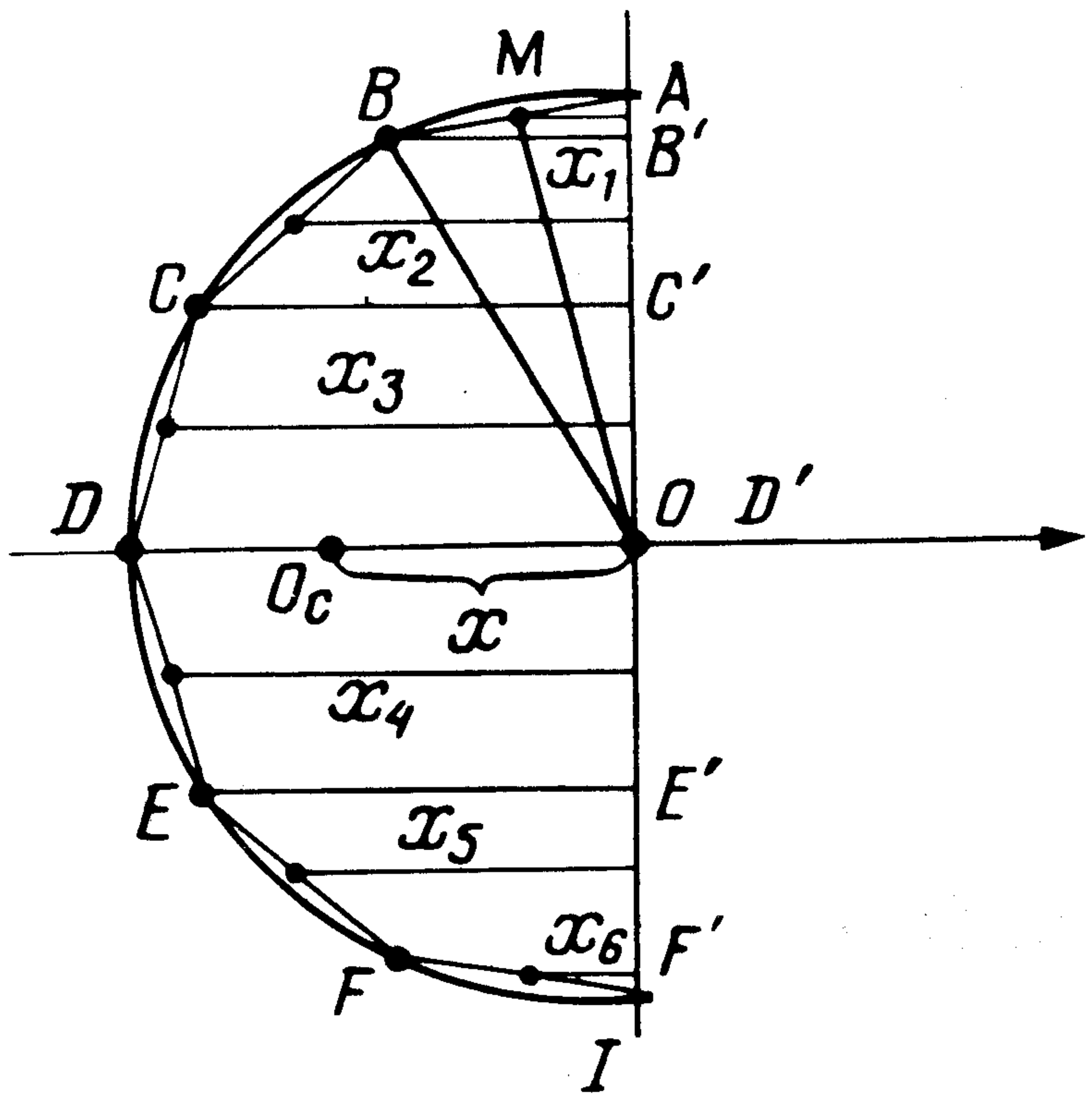


Рис. 6.12.

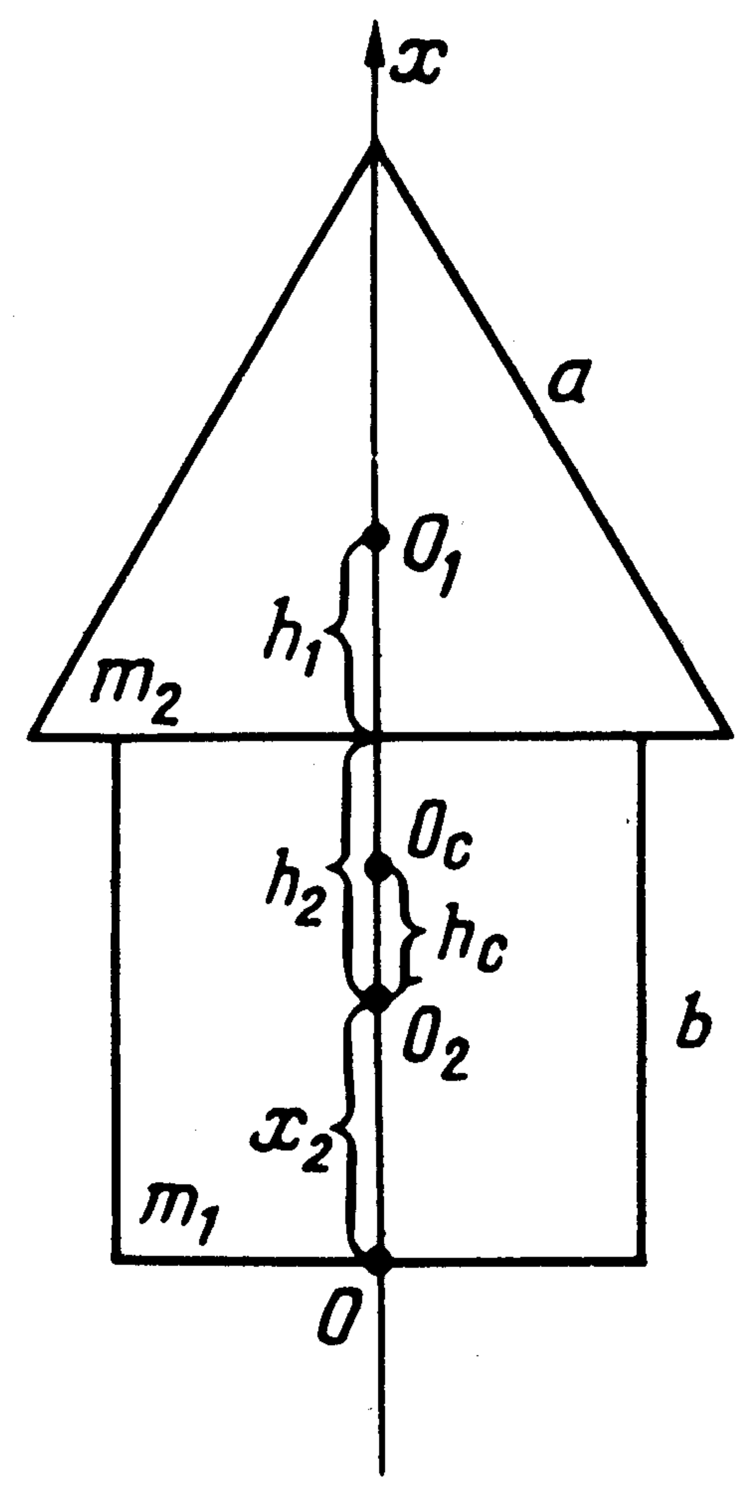


Рис. 6.13.

Если сила тяжести проволоки приложена в точке O_c, то момент этой силы относительно оси AI равен

$$M = mgx = \rho\pi r x g.$$

Очевидно, что этот момент равен (6.10):

$$\rho\pi r x g = \rho 2r^2 g, \quad x = 2r/\pi.$$

Задача 10. Определите центр тяжести вырезанного из фанеры домика (рис. 6.13), состоящего из двух правильных фигур: равностороннего треугольника со стороной a и квадрата со стороной b.

Дано: a, b, $x_{\text{цт}}$ — ?

Решение. Центр тяжести треугольника лежит на пересечении медиан, в данном случае в точке O_1, находящейся от основания треугольника на расстоянии $h_1 = a/2\sqrt{3}$. Центр тяжести квадрата лежит в точке O_2: $x_2 = b/2$. Очевидно, что центр тяжести фигуры находится на отрезке O_1O_2. Повернем мысленно фигуру на 90°, чтобы сила тяжести была перпендикулярна O_1O_2. Относительно оси, проходящей через центр тяжести O_c, сумма моментов сил тяжести, действующих на треугольник и квадрат, должна быть равна нулю. Обозначим через h_c расстояние от O_2 до центра тяжести O_c. Тогда

$$m_1 g h_c - m_2 g(h_1 + h_2 - h_c) = 0,$$

где m_1 — масса квадрата, равная $m_1 = \rho d b^2$, m_2 — масса треугольника, равная $m_2 = \rho d a^2\sqrt{3}/4$, где d — толщина фанеры. Подставляя эти выражения в написанное равенство, имеем

$$\rho d b^2 h_c - \rho d a^2(\sqrt{3}/4)(a/2\sqrt{3} + b/2 - h_c) = 0,$$

$$h_c = \frac{a^2(\sqrt{3}/4)(a/2\sqrt{3} + b/2)}{b^2 + a^2\sqrt{3}/4},$$

где ρ — плотность материала.

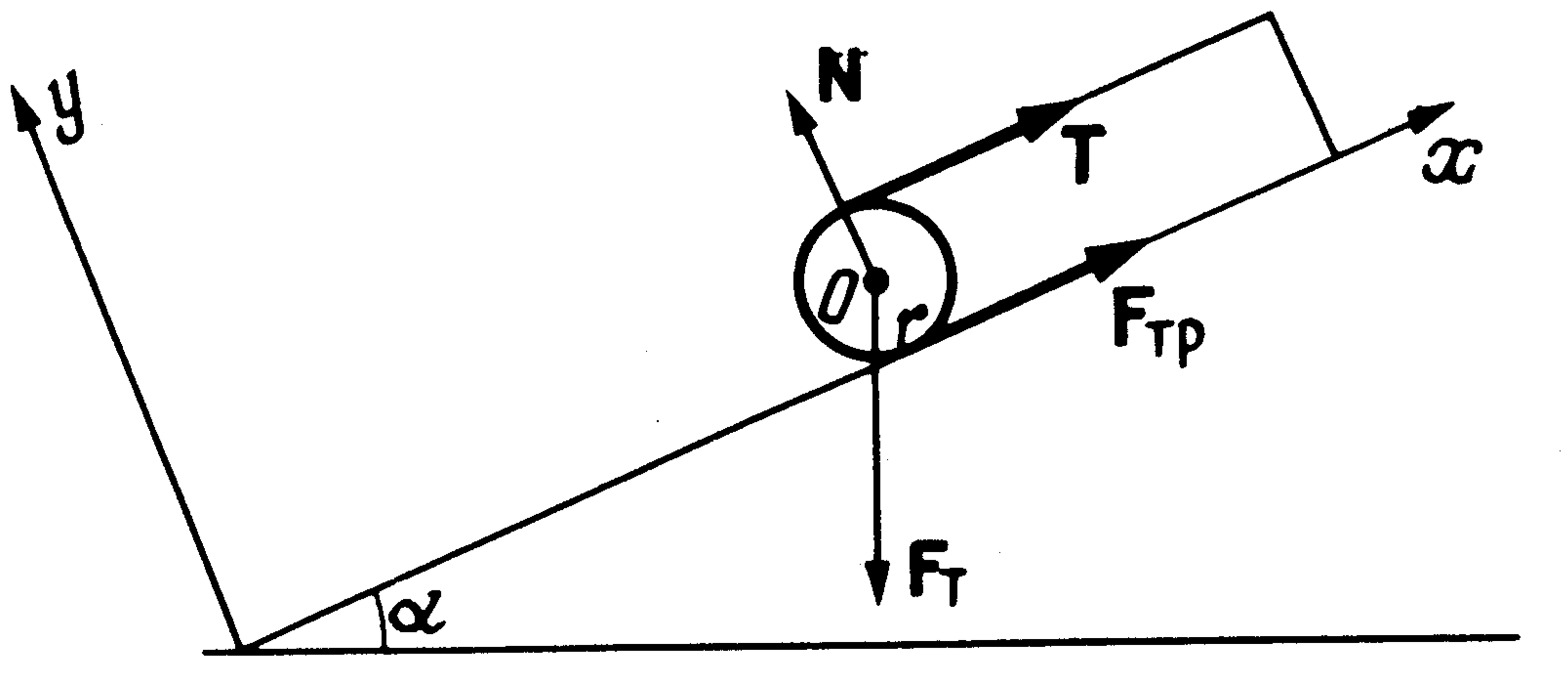


Рис. 6.14.

Тогда расстояние центра тяжести от основания домика определится по формуле

$$x_{\text{цт}} = \frac{b}{2} + \frac{a^2(\sqrt{3}/4)(a/2\sqrt{3} + b/2)}{b^2 + a^2\sqrt{3}/4}.$$

Величину $x_{\text{цт}}$ можно также найти по формуле (6.3) для центра тяжести. Приняв за начало координат точку O, найдем

$$x_{\text{цт}} = \frac{(b/2)m_1 + (b + a/2\sqrt{3})m_2}{m_1 + m_2} = \frac{(b/2)b^2 + (b + a/2\sqrt{3})a^2(\sqrt{3}/4)}{b^2 + a^2\sqrt{3}/4} =$$

$$= \frac{b}{2} + \frac{(a^2\sqrt{3}/8)(a\sqrt{3} + b)}{b^2 + a^2\sqrt{3}/4} = \frac{b}{2} + \frac{a^2(a + \sqrt{3}b)}{2(4b^2 + a^2\sqrt{3})}.$$

Задача 11. На цилиндр намотана нить, один конец которой закреплен на стойке в верхней точке плоскости. При каком угле наклона плоскости α цилиндр не будет скатываться с нее, если коэффициент трения цилиндра о плоскость k (рис. 6.14)?

Дано: k; α — ?

Решение. На цилиндр действуют четыре силы: сила тяжести $\mathbf{F}_\text{т}$, сила натяжения $\mathbf{T}$, сила трения $\mathbf{F}_{\text{тр}}$, сила нормальной реакции $\mathbf{N}$. Условие равновесия цилиндра — сумма сил равна нулю:

$$\mathbf{F}_\text{т} + \mathbf{T} + \mathbf{N} + \mathbf{F}_{\text{тр}} = 0. \qquad (6.11)$$

Алгебраическая сумма моментов сил равна нулю. Напишем это условие относительно оси, проходящей через точку O (ось симметрии цилиндра):

$$Tr - F_{\text{тр}}r = 0, \quad T = F_{\text{тр}}.$$

Плечо сил равно радиусу цилиндра r. В проекциях на оси x и y уравнение (6.11) запишется в виде

$$T + F_{\text{тр}} - mg\sin\alpha = 0, \quad N - mg\cos\alpha = 0.$$

Для $F_{\text{тр}}$ имеем

$$F_{\text{тр}} = kN = kmg\cos\alpha.$$

Таким образом,

$$2F_{\text{тр}} = mg\sin\alpha, \quad \text{или} \quad 2kmg\cos\alpha = mg\sin\alpha,$$

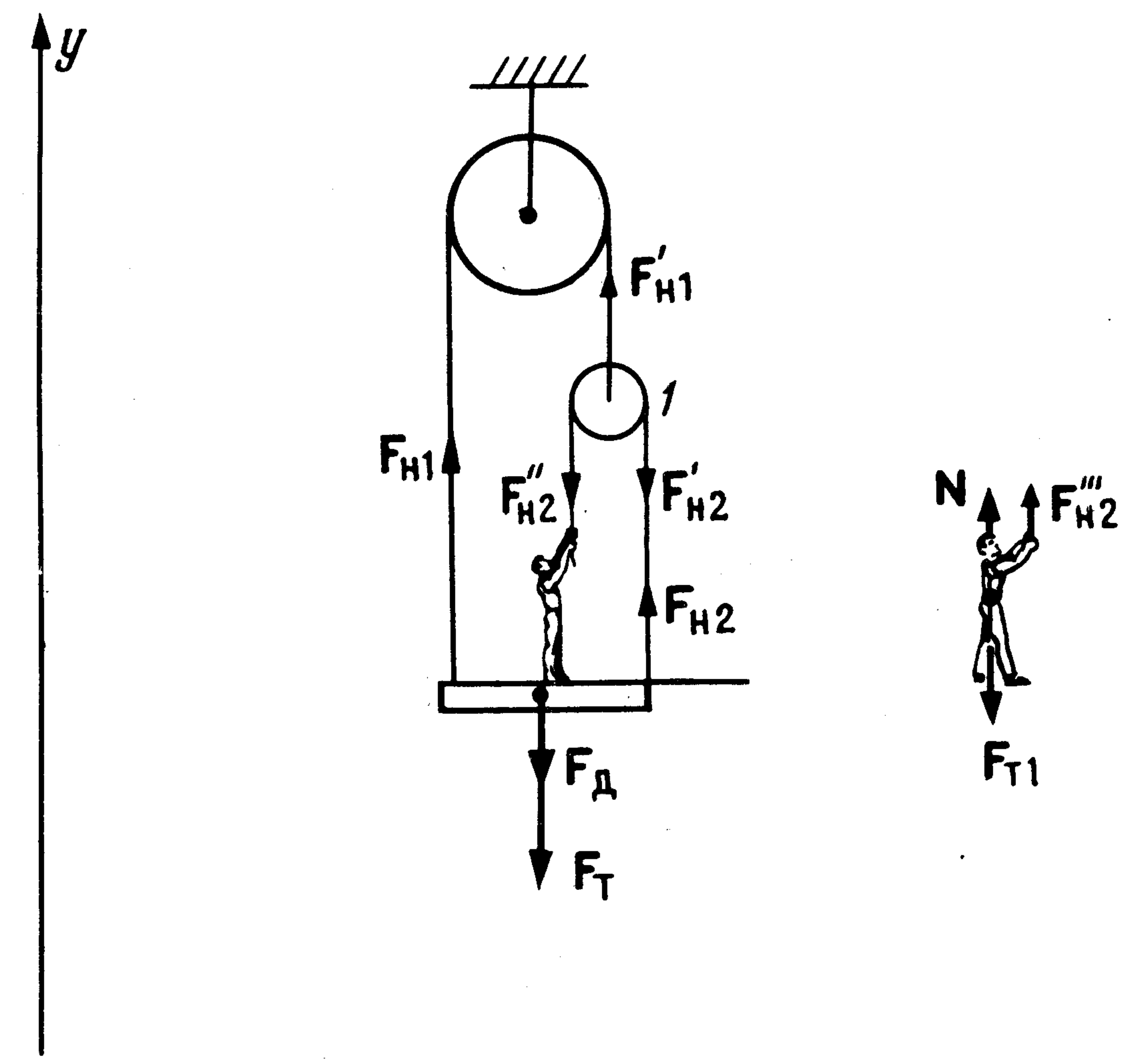


Рис. 6.15.

откуда $\operatorname{tg}\alpha = 2k$, следовательно, при

$$\alpha_0 \leq \operatorname{arctg}2k$$

цилиндр не будет скатываться. При уменьшении угла увеличивается сила нормальной реакции, возрастает сила трения, следовательно, при $\alpha \leq \alpha_0$ цилиндр будет в состоянии покоя.

Задача 12. С какой силой человек должен тянуть веревку, чтобы удержать себя и платформу, на которой он стоит, в равновесии (рис. 6.15)? Масса человека $m_1 = 70$ кг, платформы — $m_2 = 30$ кг, массой блоков и веревок пренебречь.

Дано: $m_1 = 70\,\text{кг}$, $m_2 = 30\,\text{кг}$; $F_{н2}$ — ?

Решение. Система состоит из четырех тел: человека, платформы и двух блоков. На платформу действуют четыре силы: сила тяжести $\mathbf{F}_т$, силы натяжения $\mathbf{F}_{н1}$ и $\mathbf{F}_{н2}$, сила давления человека $\mathbf{F}_д$. Условие равновесия платформы есть

$$\mathbf{F}_т + \mathbf{F}_{н1} + \mathbf{F}_{н2} + \mathbf{F}_д = 0.$$

В проекции на ось y это уравнение имеет вид

$$F_{н1} + F_{н2} - F_д - F_т = 0. \tag{6.12}$$

На блок 1 действуют три силы натяжения: $\mathbf{F}'_{н1}$, $\mathbf{F}'_{н2}$, $\mathbf{F}''_{н2}$. Условие равновесия блока есть

$$\mathbf{F}'_{н1} + \mathbf{F}'_{н2} + \mathbf{F}''_{н2} = 0.$$

В проекции на ось y это уравнение запишется в виде

$$F'_{н1} - F''_{н2} - F'_{н2} = 0. \tag{6.13}$$

На человека действуют сила тяжести $\mathbf{F}_{т1}$, сила нормальной реакции $\mathbf{N}$, сила натяжения $\mathbf{F}'''_{н2}$. Условие равновесия человека есть

$$\mathbf{F}_{т1} + \mathbf{N} + \mathbf{F}'''_{н2} = 0.$$

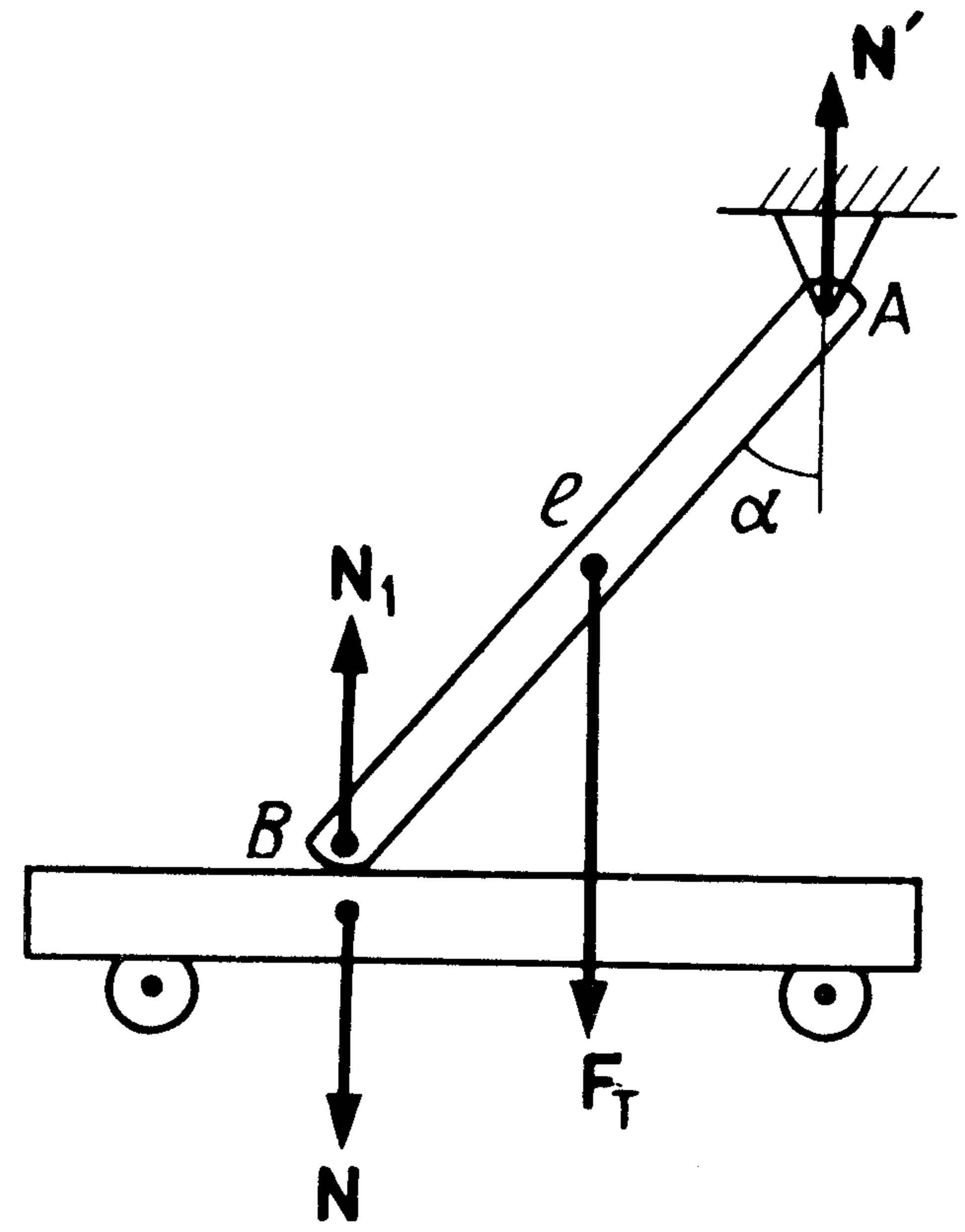


Рис. 6.16.

В проекции на ось y это уравнение имеет вид

$$F'''_{\text{н}2} + N - m_1 g = 0. \tag{6.14}$$

Система находится в равновесии, поэтому

$$F_{\text{н}1} = F'_{\text{н}1}, \quad F''_{\text{н}2} = F_{\text{н}2}.$$

По третьему закону Ньютона $N = F_{\text{д}}$. Уравнения (6.12)–(6.14) перепишем в виде

$$F_{\text{н}1} + F_{\text{н}2} - F_{\text{д}} - m_2 g = 0, \tag{6.15}$$

$$F_{\text{н}1} = 2F_{\text{н}2}, \tag{6.15а}$$

$$F_{\text{н}2} + F_{\text{д}} - m_1 g = 0. \tag{6.15б}$$

Из (6.15б) для $F_{\text{д}}$ получим

$$F_{\text{д}} = m_1 g - F_{\text{н}2}.$$

Подставив выражения для $F_{\text{д}}$ и $F_{\text{н}1}$ в (6.15), получим

$$2F_{\text{н}2} + F_{\text{н}2} - m_1 g + F_{\text{н}2} - m_2 g = 0,$$

откуда

$$F_{\text{н}2} = g(m_1 + m_2)/4.$$
$$F''_{\text{н}2} = F_{\text{н}2} = 2,5\,\text{Н}.$$

Задача 13. Однородный стержень AB шарнирно укреплен в точке A и опирается о тележку. Сила давления стержня на тележку $\mathbf{N}$, коэффициент трения в точке B $k = 0,2$. Какую горизонтальную силу нужно приложить к тележке, чтобы сдвинуть ее 1) вправо, 2) влево (рис. 6.16)?

Дано: $k = 0,2$, N; F — ?

Решение. Тележка может сдвинуться, если сила F равна или больше силы трения скольжения, действующей со стороны стержня на тележку: $F \geq F_{\text{тр}}$. Когда на тележку сила F не действует, то, соответственно, не действует никаких сил в горизонтальном направлении и на стержень. По вертикали (вдоль оси y) на него действуют сила тяжести $\mathbf{F}_{\text{т}}$, сила нормальной реакции со стороны тележки

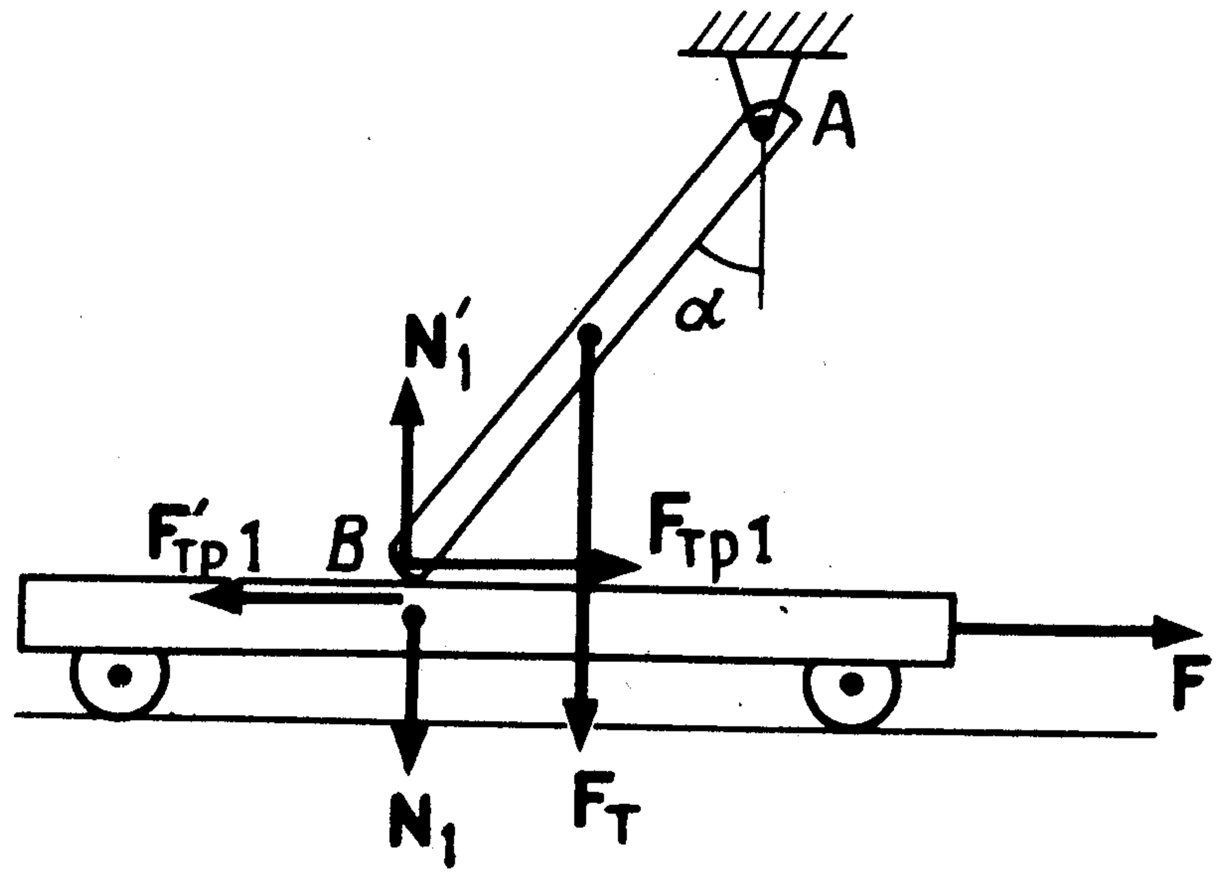


Рис. 6.17а.

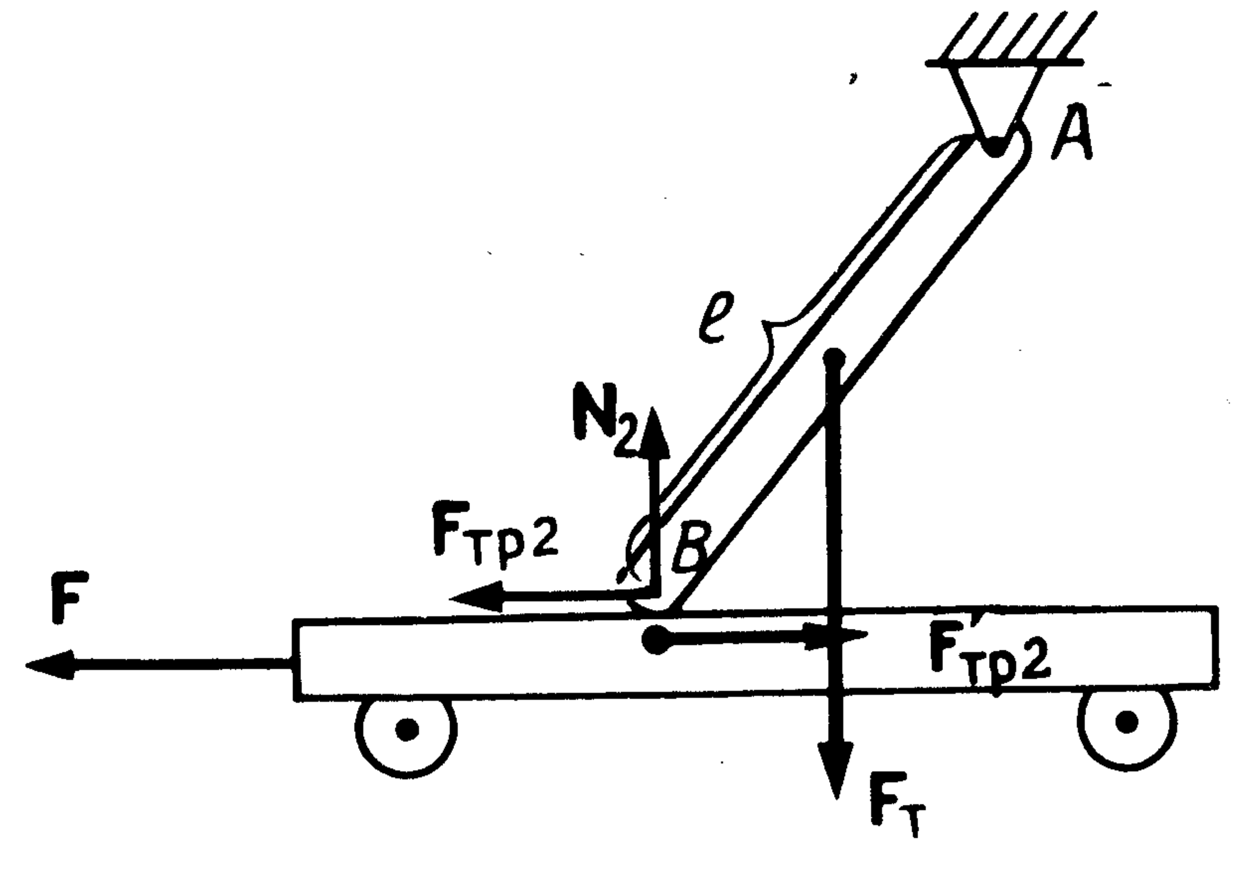


Рис. 6.17б.

$\mathbf{N}_1$ и сила реакции со стороны шарнира $\mathbf{N}'$. Очевидно, что $N_1 = N'$, так как сумма моментов этих сил относительно центра тяжести равна нулю. Условие равновесия:

$$N_1 + N' - mg = 0.$$

По 3-му закону Ньютона $N_1 = N$. Отсюда $mg = 2N$.

1) Когда начинает действовать сила $\mathbf{F}$, то сила нормальной реакции и сила давления стержня на тележку изменяются (рис. 6.17а). На стержень действуют те же силы, но сила нормальной реакции станет равной $\mathbf{N}_1'$. Сила трения $\mathbf{F}'_{\text{тр}1}$ препятствует движению тележки. Условие равновесия стержня имеет вид

$$N_1' l \sin\alpha - F_{\text{тр}1} l \cos\alpha - mg(l/2)\sin\alpha = 0,$$

$$F'_{\text{тр}1} = kN_1'. \tag{6.16}$$

где l — длина стержня. Из (6.16) находим

$$N_1' = N\sin\alpha/(\sin\alpha - k\cos\alpha).$$

Сила трения $F_{\text{тр}1} = kN_1' = kN\sin\alpha/(\sin\alpha - k\cos\alpha)$, следовательно,

$$F = F_{\text{тр}1} = \frac{0,2N\sqrt{2}/2}{(\sqrt{2}/2)(1-0,2)} = 0,25N.$$

2) Если сила, действующая на тележку, направлена влево, то сила трения направлена вправо. Условие равновесия стержня в этом случае имеет вид (рис. 6.17б)

$$N_2 l \sin\alpha + F_{\text{тр}2} l \cos\alpha - mg(l/2)\sin\alpha = 0,$$

или

$$N_2 \sin\alpha + kN_2\cos\alpha - (2N/2)\sin\alpha = 0,$$

откуда

$$N_2 = \frac{N\sin\alpha}{\sin\alpha + k\cos\alpha} = \frac{N}{1+0,2},$$

$$F = kN_2 = 0,2N/1,2 \approx 0,17N.$$

Очевидно, что влево тележку сдвинуть легче.

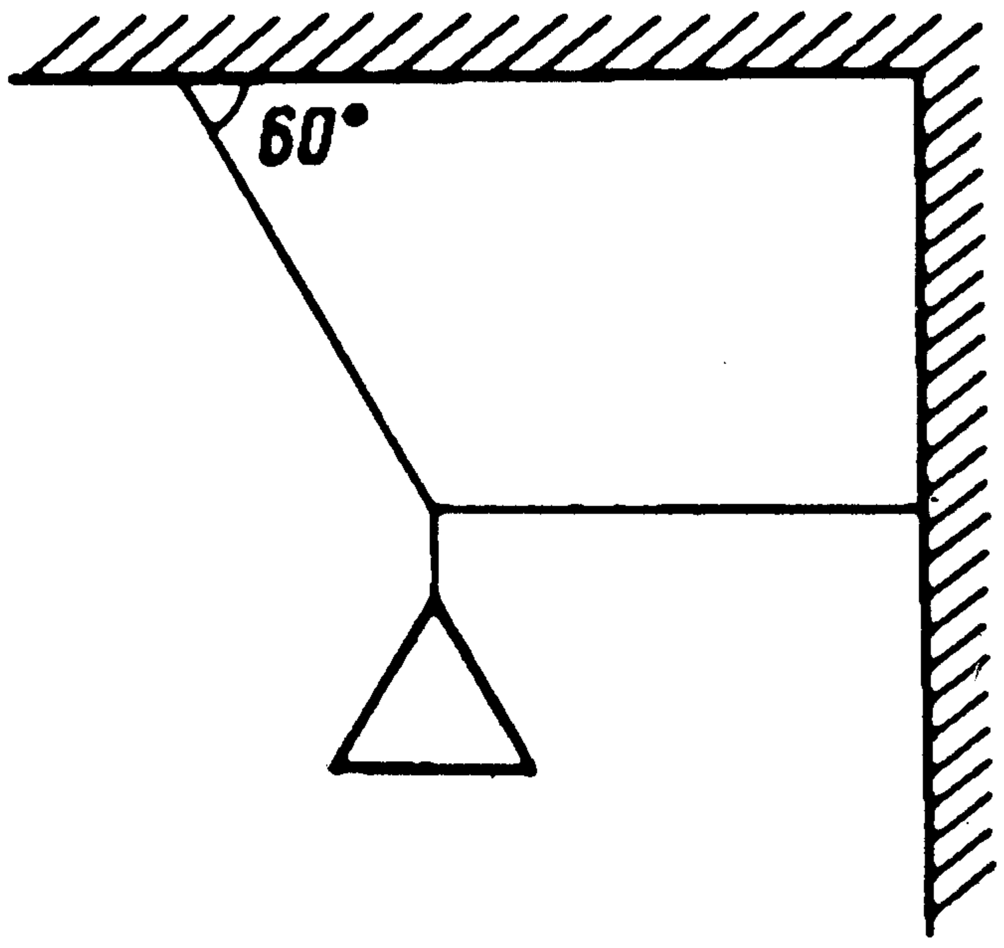


Рис. 6.18.

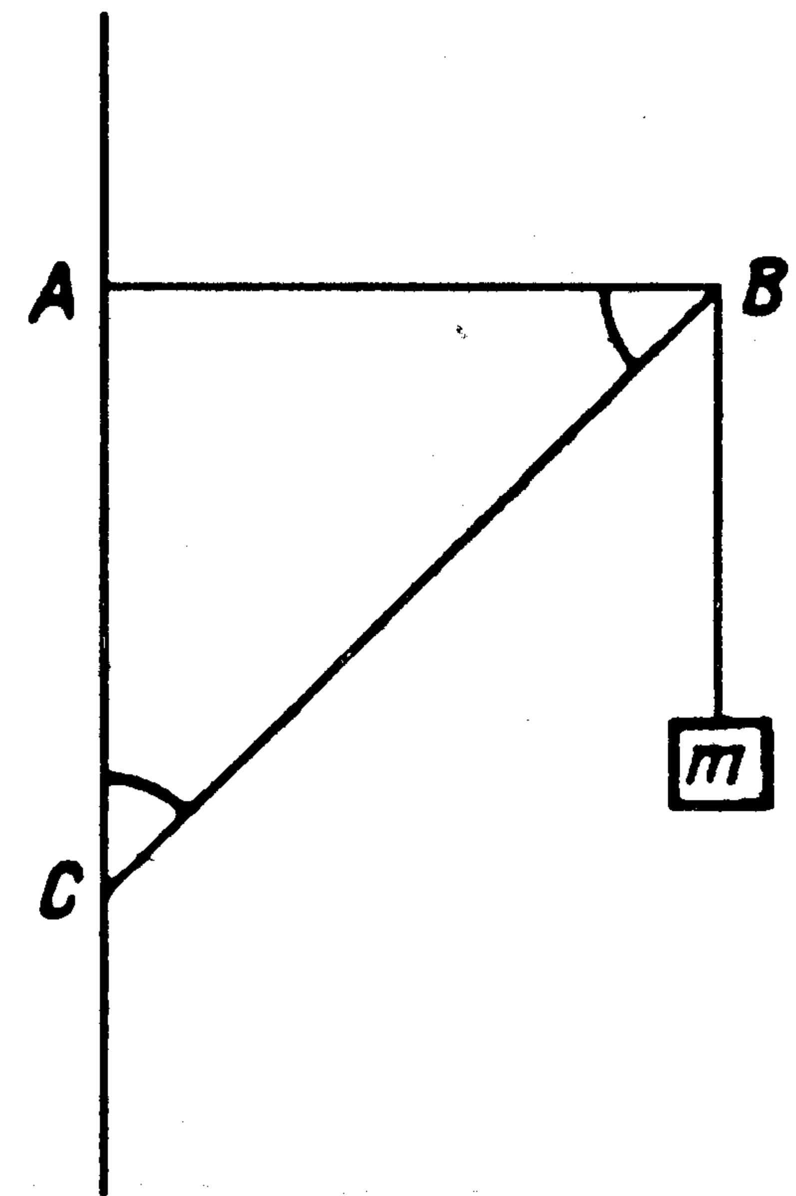


Рис. 6.19.

Задачи для самостоятельного решениия

Задача 1. Однородный стержень с прикрепленным на одном конце грузом массой $m = 1,2$ т находится в равновесии в горизонтальном положении, если его подпереть на расстоянии 1/5 длины стержня от груза. Чему равна масса стержня M?

Ответ: $M = (2/3)m = 0,8$ т.

Задача 2. Определите силы натяжения двух шнуров, на которых подвешена люстра массой 100 кг (рис. 6.18).

Ответ: $F_{\text{н}1} = 1,13 \cdot 10^3$ Н, $F_{\text{н}2} = 5,66 \cdot 10^2$ Н.

Задача 3. Туго натянутая над землей проволока имеет длину 50 м и провисает на 3,8 м, когда канатоходец массой 60 кг стоит на ее середине.

а) Чему равно натяжение проволоки?

б) Можно ли натянуть проволоку таким образом, чтобы она не провисала?

Ответ: а) $F_{\text{н}} = 2000$ Н; б) нет, невозможно, чем меньше провисает проволока, тем больше сила ее натяжения.

Задача 4. Лестница длиной 9,5 м и массой 16 кг приложена к гладкой вертикальной стенке, а другим концом упирается в землю. Лестница составляет угол $\alpha = 49°$ со стеной. На какое расстояние по лестнице может подняться человек массой 70 кг, прежде чем она начнет проскальзывать по поверхности земли, если коэффициент трения k между лестницей и землей равен 0,4?

Ответ: 0,3 м.

Задача 5. На кронштейне ABC висит груз массой $m = 100$ кг, угол между горизонтальным и наклонным стержнями кронштейна равен 45°. Определить силу, растягивающую горизонтальный стержень и сжимающую наклонный (рис. 6.19).

Ответ: $F_1 = 1000$ Н, $F_2 = 1410$ Н.

Задача 6. Однородный стержень AB опирается о шероховатый пол и о гладкий выступ C (рис. 6.20). Угол наклона 45°. Определить, чему должно быть равно отношение AC/BC, чтобы стержень находился в равновесии; $k = 0,5$.

Ответ: $AC/BC = 3$.

Задача 7. Определить центр тяжести проволочной рамки, имеющей форму равностороннего треугольника, если одна сторона сделана из медной, а две другие

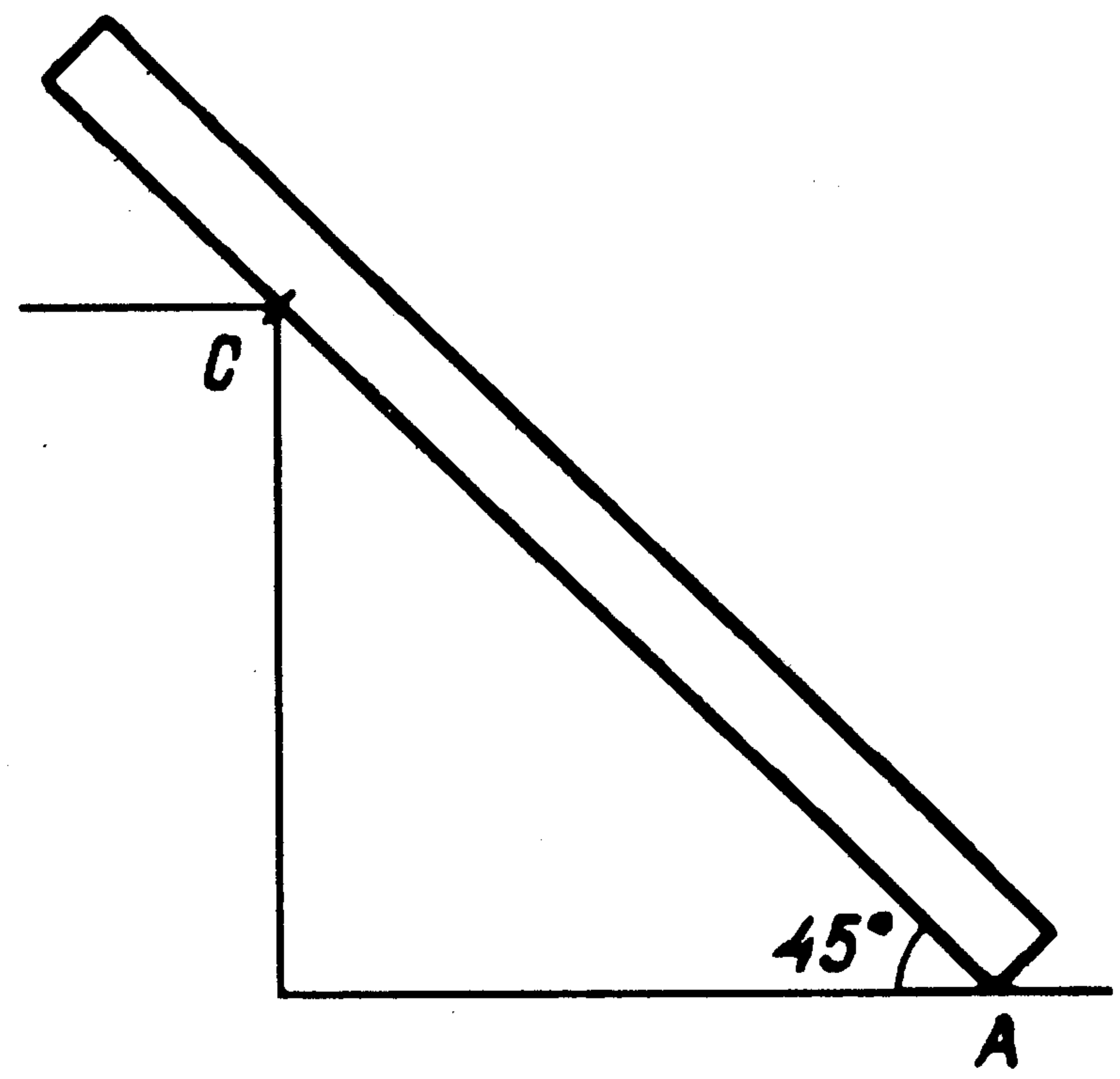


Рис. 6.20.

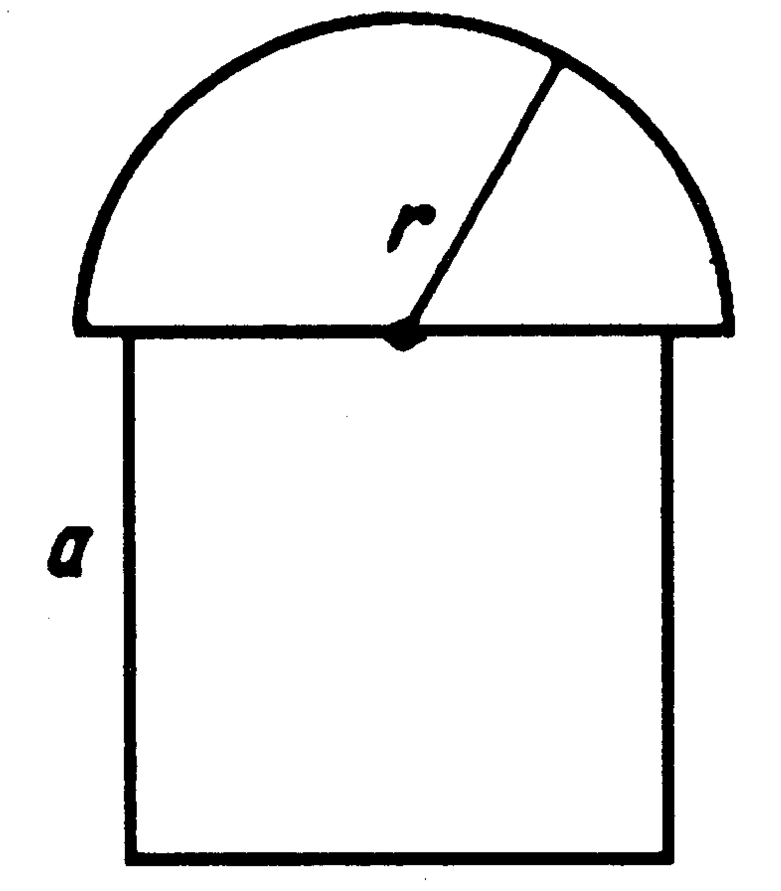


Рис. 6.21.

из алюминиевой проволоки. Сечение проволок одинаково. Сторона треугольника $l = 1$ м. Плотность меди $\rho_{\text{м}} = 8,9$ г/см^3, плотность алюминия $\rho_{\text{а}} = 2,7$ г/см^3.

Ответ: $x \approx 16,3$ см от середины медной проволоки.

Задача 8. На каком расстоянии от дна находится центр тяжести тонкостенного стакана высотой $h = 12$ см и диаметром $d = 8$ см, если толщина дна в два раза больше толщины стенок?

Ответ: 4,5 см.

Задача 9. Три человека несут плиту, имеющую форму равностороннего треугольника, причем два держатся за середину одной из сторон, а третий за противоположную ей вершину. Куда надо положить груз, чтобы на каждого из троих приходилась равная нагрузка?

Ответ: Нагрузка будет одинаковой в отсутствии груза или если груз лежит в центре тяжести плиты.

Задача 10. Найти положение центра тяжести половины однородного тонкого диска радиуса R.

Ответ: $4R/3\pi$ от центра диска.

Задача 11. Определите центр тяжести фигуры, состоящей из половины однородного диска радиуса r и квадратной пластины со стороной a (рис. 6.21).

Ответ:

$$x = \frac{a^3 + (2r/\pi + a)\pi r^2}{2a^2 + \pi r^2}.$$

Глава 7
Гидромеханика

В гидромеханике изучаются условия равновесия и движения так называемой сплошной среды. Хотя любое вещество, тело, среда состоят из молекул, и следовательно, дискретны, в гидромеханике рассматриваются объекты таких размеров, при которых этой дискретностью можно пренебречь. До сих пор мы имели дело с сосредоточенными силами, т. е. силами, которые имеют определенную точку приложения. Мы предполагали, что все силы, действующие на тело, приложены к центру тяжести, хотя, очевидно, что сама сила тяжести является результирующей всех действующих на элементарные массы сил тяжести.

В гидродинамике в основном мы будем иметь дело только с распределенными силами, т. е. силами, которые действуют на каждый элемент площади выделенного объема жидкости и твердого тела (поверхностные силы) или каждую элементарную массу тела (массовые силы).

Заметим, что под жидкостью мы понимаем капельные жидкости, а также газы. Одним из основных понятий гидромеханики является *давление*. Выделим в жидкости некоторую поверхность (рис. 7.1). S — ее площадь, нормаль к которой $\mathbf{n}$. В общем случае на нее может действовать сила $\mathbf{F}$, направленная под углом к нормали α. Разложим эту силу на две составляющие: $\mathbf{F}_\tau$ и $\mathbf{F}_n$ (касательную и нормальную к поверхности).

В случае покоящейся жидкости сколь угодно малая сила F_τ вызовет ее движение, т. е. в жидкостях отсутствует сила трения покоя. Поэтому при рассмотрении покоящейся жидкости (гидростатика) или *идеальной жидкости* (отсутствует трение, вязкость) касательная составляющая F_τ равна нулю. Следовательно, в этих случаях сила, действующая на выделенную поверхность, должна быть ей перпендикулярна. Это — сила давления.

Давление определяется отношением силы F_n к площади поверхности S, на которую эта сила действует:

$$P = F_n/S.$$

В СИ единицей давления является *паскаль* (Па):

$$1\text{Па} = 1\text{Н}/\text{м}^2.$$

Через основные единицы СИ килограмм, метр и секунду паскаль выражается в виде $[\text{Па}] = \text{кг}/\text{м}\cdot\text{с}^2$.

Давление может изменяться при переходе от одной точки жидкости к другой и, следовательно, давление является функцией координат x, y, z — $P(x, y, z)$. Для определения давления в заданной точке M берем элемент поверхности

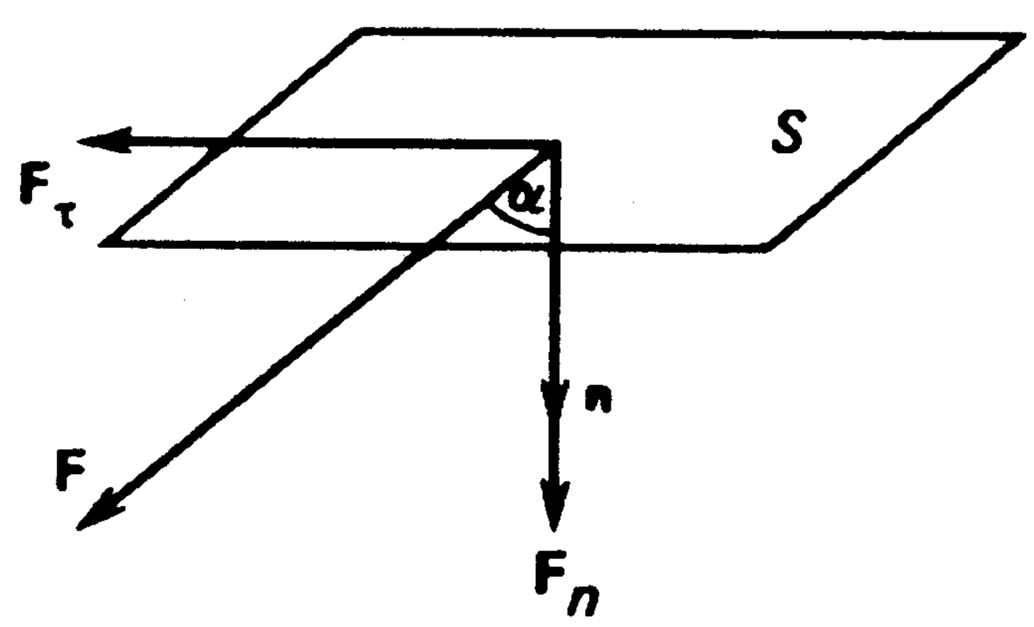


Рис. 7.1.

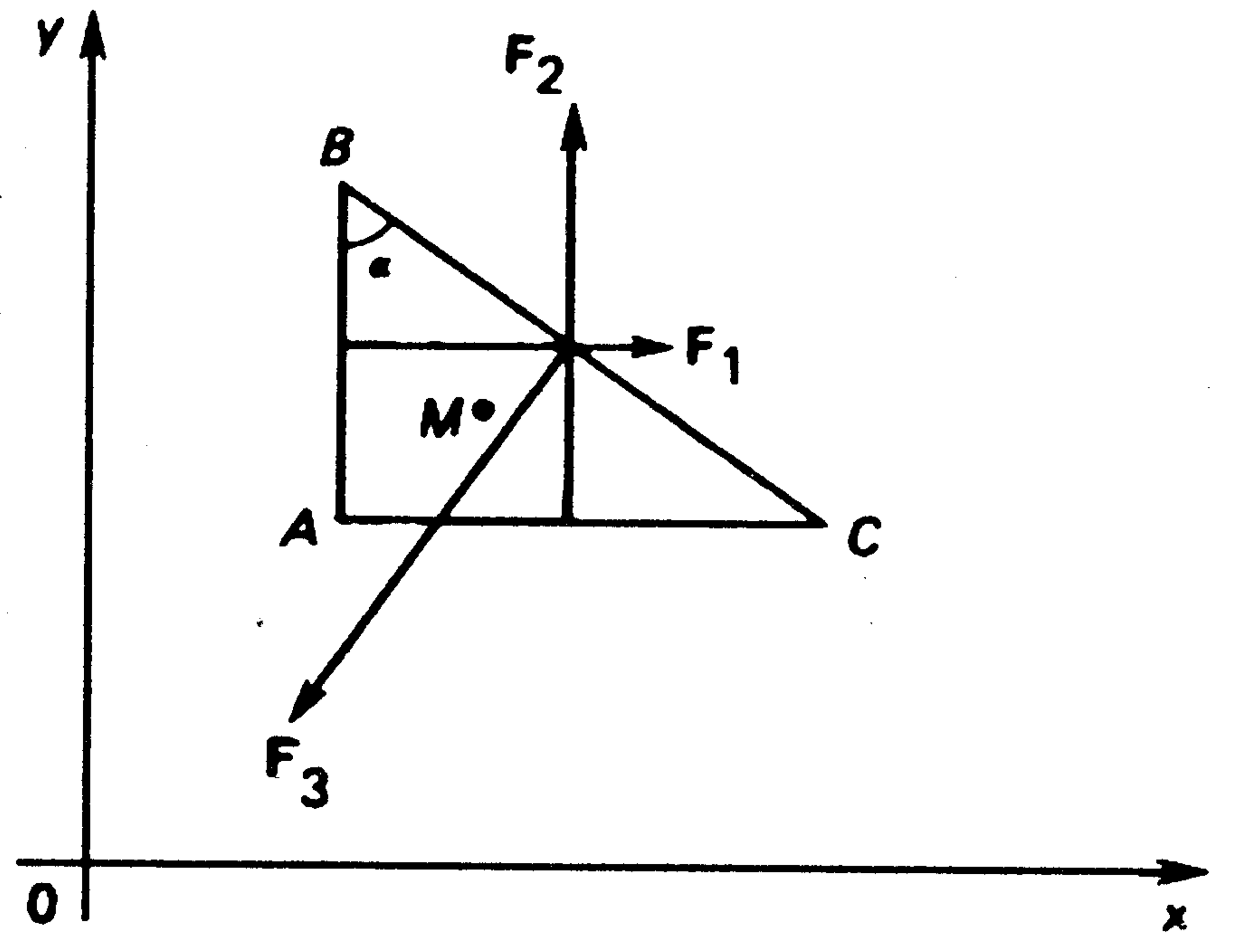


Рис. 7.2.

(ΔS — его площадь) и находим давление как предел отношения силы F к ΔS при стремлении ΔS к нулю:

$$P = \lim_{\Delta S \to 0} F_n/\Delta S,$$

причем M принадлежит ΔS.

Закон Паскаля: внешнее давление, производимое на жидкость, передается ею по всем направлениям без изменения. Определим давление в точке M. Для этого мысленно выделим в жидкости треугольную призму, внутри которой находится точка M (рис. 7.2). На боковую грань AB действует сила давления $\mathbf{F}_1$, на AC — сила $\mathbf{F}_2$ и на BC — сила $\mathbf{F}_3$. Силы, действующие на основания призмы, уравновешены. Условие равновесия призмы есть

$$\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3 = 0. \tag{7.1}$$

Мы хотим определить давление в данной точке жидкости; призма очень мала, так что силой тяжести можно пренебречь. Сила $\mathbf{F}_1$ направлена вдоль x (сила давления по определению перпендикулярна поверхности) и равна

$$F_1 = F_{1x} = P_1 S_{AB},$$

сила $\mathbf{F}_2$ направлена вдоль y и равна

$$F_2 = F_{2y} = P_2 S_{AC}.$$

Сила $\mathbf{F}_3$ имеет x- и y-составляющие и равна

$$\mathbf{F}_3 = P_3 S_{BC} \mathbf{n}_{BC},$$
$$F_{3x} = P_3 S_{BC} \cos\alpha,$$
$$F_{3y} = P_3 S_{BC} \sin\alpha.$$

Уравнение (7.1) в проекциях

на ось x $\qquad P_1 S_{AB} - P_3 S_{BC} \cos\alpha = 0,$

на ось y $\qquad P_2 S_{AC} - P_3 S_{BC} \sin\alpha = 0.$

Заметим, что

$$S_{BC} \cos\alpha = S_{AB}, \quad S_{BC} \sin\alpha = S_{AC}.$$

Отсюда $P_1 = P_2 = P_3$, т. е. давление жидкости в данной точке не зависит от ориентации выбранной площадки, силу давления на которую мы определяем. Так,

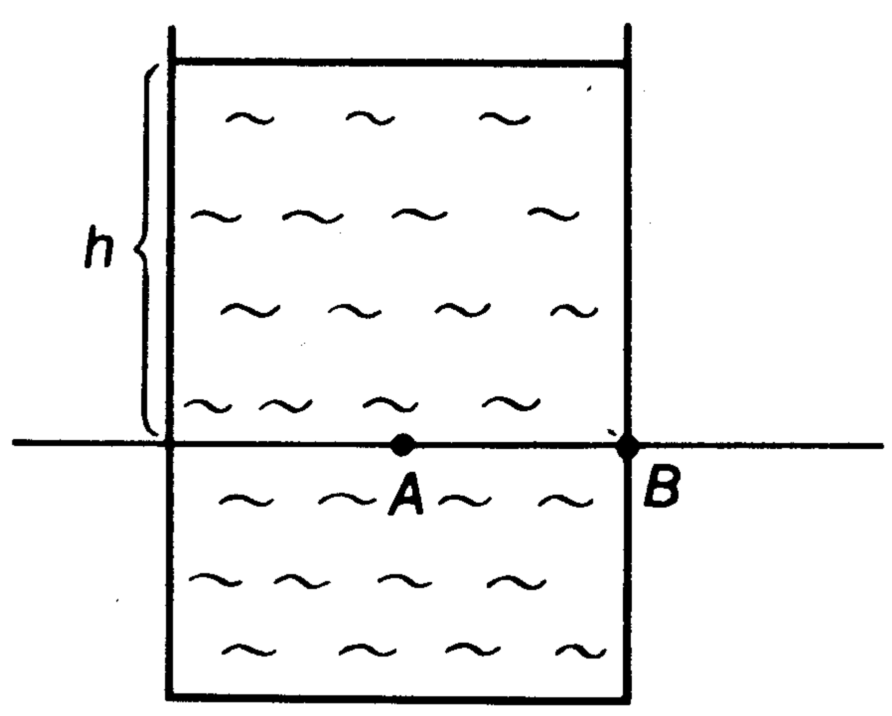


Рис. 7.3.

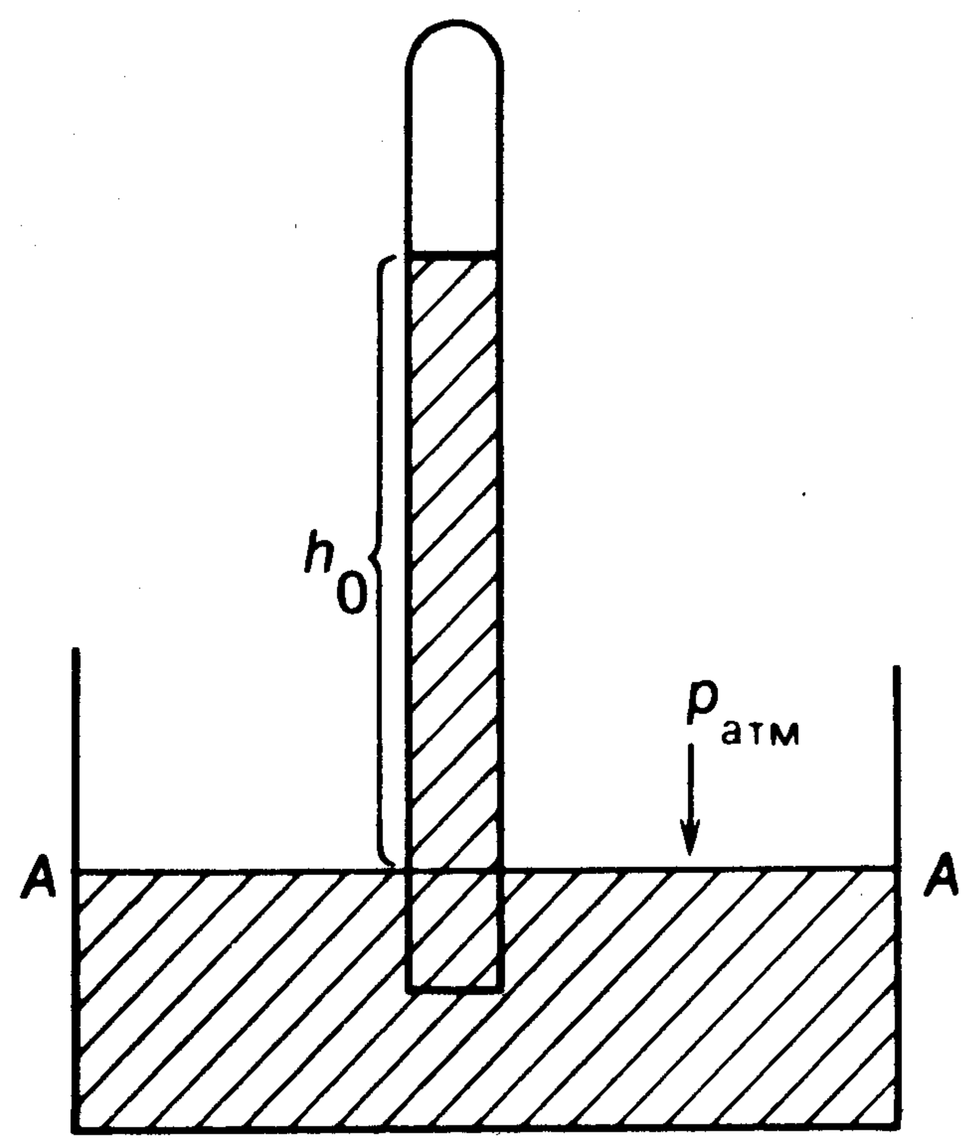


Рис. 7.4.

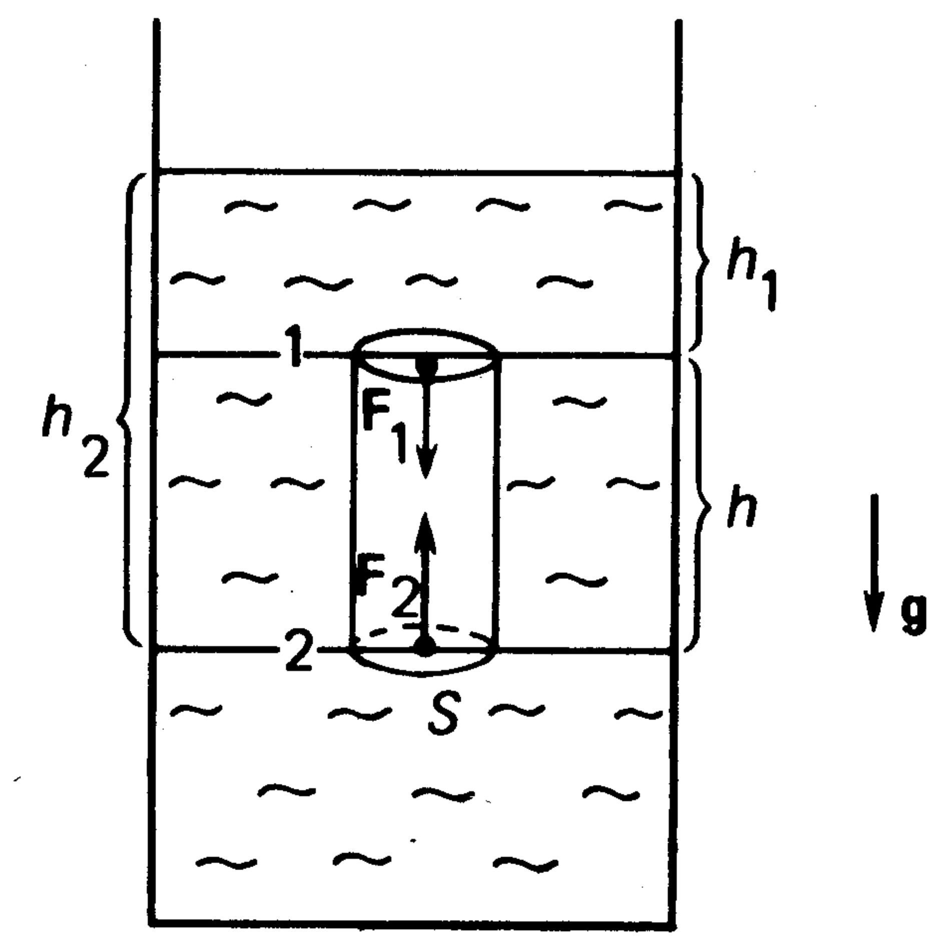


Рис. 7.5.

если в сосуд налита жидкость (рис. 7.3), то давление в точке A определится как сумма атмосферного давления $P_{\text{атм}}$ и давления столба жидкости P над уровнем AB, которое равно

$$P = mg/S = \rho hSg/S = \rho gh. \tag{7.2}$$

Здесь S — площадь основания сосуда, ρ — плотность жидкости. Давление $P = \rho gh$ называется *гидростатическим* давлением. Итак,

$$P_A = P_{\text{атм}} + \rho gh.$$

По закону Паскаля давления на стенку сосуда в точках A и B равны, т. е. $P_A = P_B$.

Атмосферное давление — это гидростатическое давление столба воздуха, которое равно давлению столбика ртути высотой $h_0 = 760$ мм (рис. 7.4):

$$P_{\text{атм}} = \rho_{\text{рт}} g h_0 = 1,36 \cdot 10^4 \text{кг/м}^3 \cdot 9,81\,\text{м/с}^2 \cdot 0,76\,\text{м} = 1,013 \cdot 10^5\,\text{Па}.$$

Вследствие разности давлений на различных уровнях в жидкости на тело, погруженное в жидкость, действует выталкивающая сила.

Закон Архимеда. На тело, погруженное в жидкость или газ, действует сила, равная весу вытесненной жидкости.

Погрузим в жидкость цилиндр высотой h и площадью основания S (рис. 7.5). Давление на глубине h_1 равно

$$P_1 = P_{\text{атм}} + \rho g h_1,$$

а на глубине h_2

$$P_2 = P_{\text{атм}} + \rho g h_2.$$

Силы давления, действующие на основание цилиндра, равны

$$F_1 = P_1 S = (P_{\text{атм}} + \rho g h_1)S,$$
$$F_2 = P_2 S = (P_{\text{атм}} + \rho g h_2)S.$$

Суммарная сила давления на боковую поверхность в силу симметрии равна нулю. Отсюда результирующая сила давления, действующая на цилиндр, есть

$$F = F_2 - F_1 = \rho g V \tag{7.3}$$

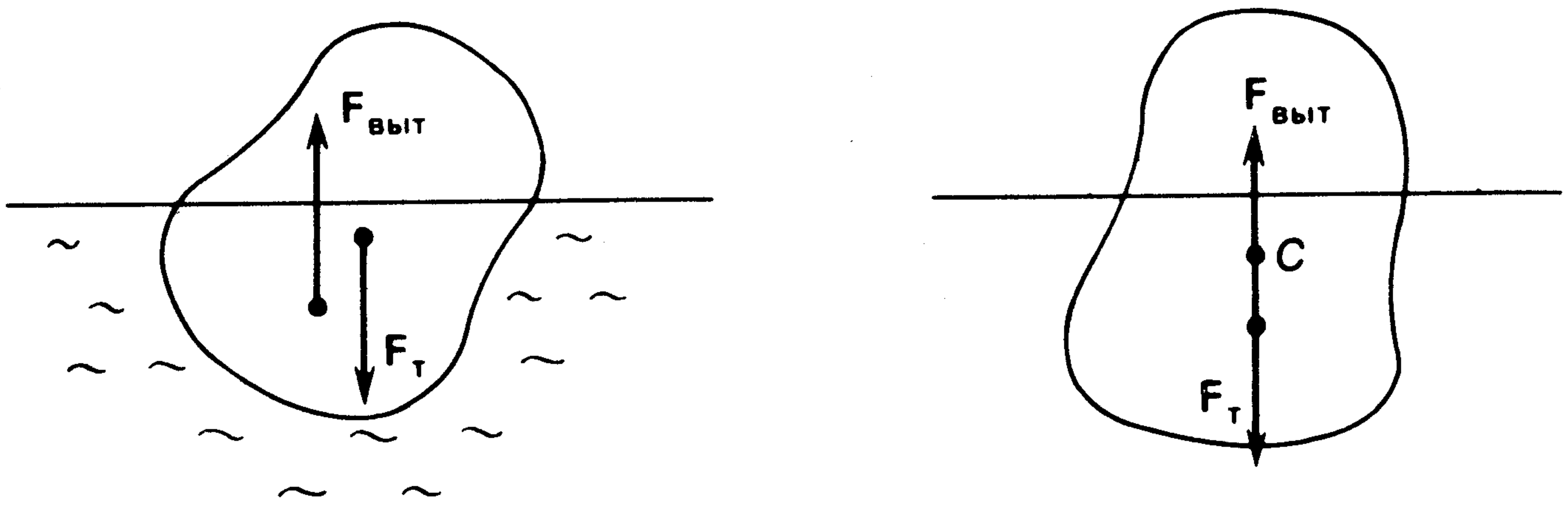


Рис. 7.6.

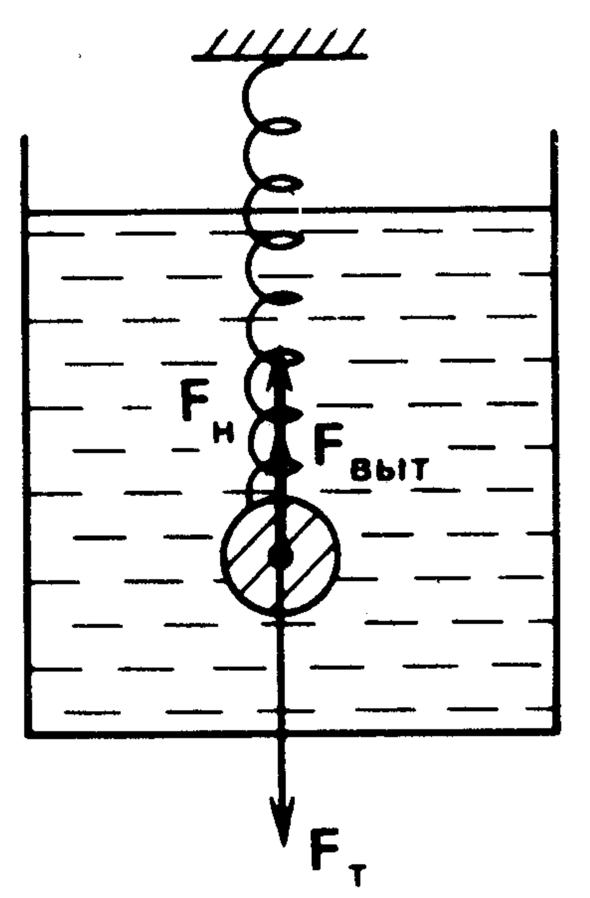


Рис. 7.7.

и равна весу вытесненной жидкости ($V = hS$ — объем вытесненной жидкости). Эта сила называется ***выталкивающей силой*** $F_{выт}$.

Обратим внимание на то, что выталкивающая сила равна весу вытесненной жидкости, а не силе тяжести. Если сосуд с жидкостью будет падать с ускорением свободного падения, то верхние слои жидкости не будут давить на нижние и $F_{выт}$ будет равна нулю. Если же, наоборот, сосуд поднимать вверх с ускорением a, то выталкивающая сила, действующая на рассматриваемый цилиндр, равна

$$F_{выт} = \rho V(g + a).$$

Точка приложения выталкивающей силы не обязательно должна совпадать с центром масс тела. Выталкивающая сила приложена к телу в точке, совпадающей с центром масс объема вытесненной жидкости, эту точку называют центром давления. Направления силы тяжести тела и выталкивающей силы, вообще говоря, не совпадают (рис. 7.6). Сумма моментов этих сил относительно любой оси вращения, перпендикулярной плоскости чертежа, не равна нулю. Так как в жидкостях нет силы трения покоя, то под действием этих моментов тело поворачивается в жидкости таким образом, чтобы силы были направлены вдоль одной прямой. Тогда суммарный момент сил станет равным нулю.

Равнодействующая выталкивающей силы и силы тяжести называется ***подъемной силой***. Если плотность тела ρ больше плотности жидкости $\rho_ж$, то выталкивающая сила $F_{выт}$ меньше силы тяжести $F_т$

$$F_{выт} < F_т \quad (\rho_ж V g < \rho V g)$$

и тело тонет, но при этом вес тела уменьшается (рис. 7.7):

$$F_т = F_{выт} + F_н,$$

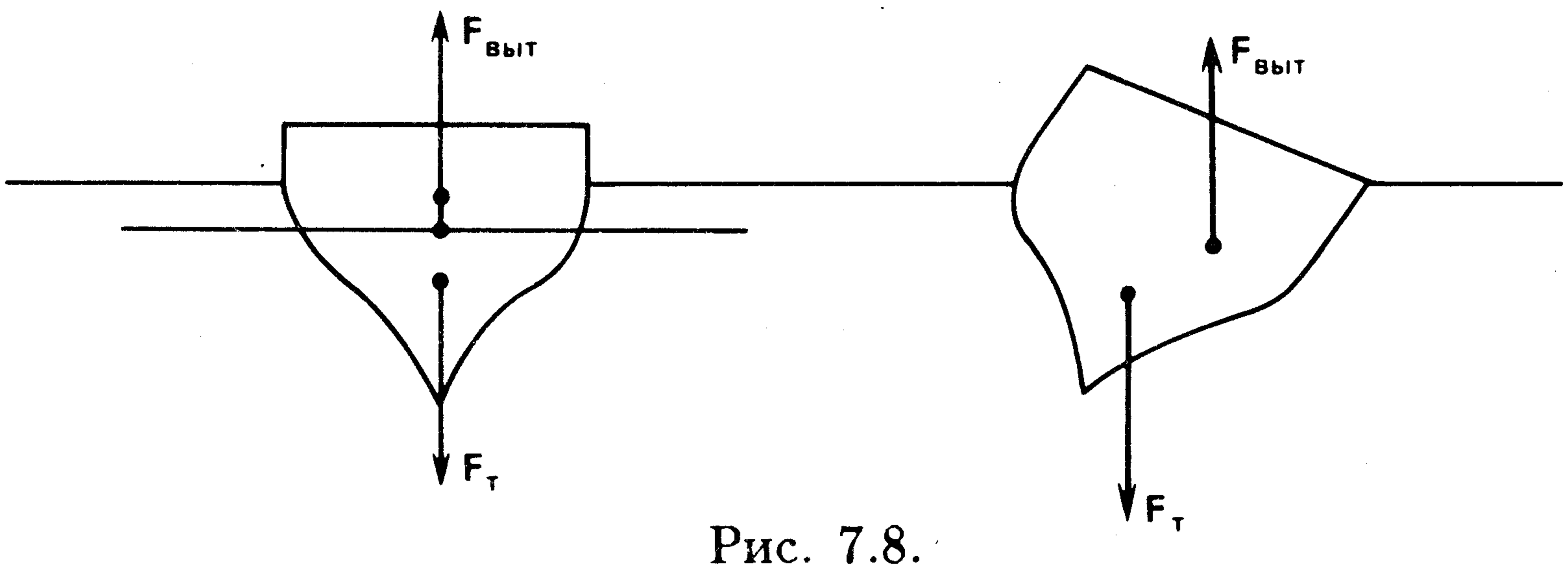


Рис. 7.8.

где $F_н$ — сила натяжения пружины. Вес тела определяется силой натяжения

$$P = F_т - F_{выт} = mg - \rho_ж V g.$$

Если плотность тела равна плотности жидкости, то тело находится в состоянии безразличного равновесия:

$$F_{выт} = mg \quad (\rho = \rho_ж).$$

Если же плотность тела меньше плотности жидкости, то выталкивающая сила больше силы тяжести:

$$F_{выт} > F_т \quad (\rho_ж V g > \rho V g).$$

Для того, чтобы тело удержать под водой, должна действовать внешняя сила. Тело может находиться в равновесии, если оно не полностью погружено в жидкость. Условие равновесия: $F_{выт} = F_т$, т. е.

$$\rho_ж V_1 g = \rho V g,$$

где V_1 — объем погруженной в жидкость части тела.

Тело находится в состоянии устойчивого равновесия, если центр тяжести лежит ниже точки приложения выталкивающей силы. На рис. 7.8 видно, что при отклонении тела от положения равновесия момент сил, действующих на тело, стремится вернуть тело к положению равновесия.

Рассмотрим один частный случай движущейся жидкости. Соотношение между скоростью течения и давлением описывается уравнением Бернулли. Сделаем ряд предположений:

1) жидкость *идеальная*, т. е. отсутствует трение (вязкость);

2) жидкость *несжимаемая*, т. е. плотность жидкости остается постоянной,

3) течение стационарное (скорость и давление не зависят от времени);

4) при своем движении различные слои жидкости не смешиваются, т. е. считаем, что жидкость состоит из набора несмешивающихся струй. Тогда выделим в жидкости (рис. 7.9) некоторый объем между сечениями 1 и 2, при этом перетекание жидкости через боковую поверхность отсутствует.

За промежуток времени Δt происходит перемещение выделенного объема и он будет находиться между сечениями $1'-2'$ (на рис. 7.9 AA' — нулевой уровень отсчета потенциальной энергии). Тогда механическая энергия выделенного объема жидкости увеличится на энергию объема жидкости между сечениями $2-2'$, но уменьшится на энергию объема жидкости между сечениями $1-1'$, энергия же жидкости, заключенной между сечениями $1'-2$, останется без изменений. Изменение энергии определяется формулами

$$\Delta E_{мех} = E_{мехII} - E_{мехI},$$

где

$$E_{\text{мехI}} = m_\text{I} v_1^2/2 + m_\text{I} g h_1,$$

$$E_{\text{мехII}} = m_\text{II} v_2^2 + m_\text{II} g h_2,$$

m_I и m_II — массы жидкости между сечениями $1 - 1'$ и $2 - 2'$ соответственно,

$$m_\text{I} = \rho V_\text{I} = \rho S_1 v_1 \Delta t,$$

$$m_\text{II} = \rho V_\text{II} = \rho S_2 v_2 \Delta t,$$

v_1 и v_2 — скорость жидкости в сечениях 1 и 2, при этом считается, что скорость по сечению практически не изменяется, h_1 и h_2 — положение центров тяжести жидкостей между сечениями $1 - 1'$ и $2 - 2'$, S_1 и S_2 — площади сеченийй 1 и 2. Так как жидкость несжимаема, то количества жидкости, перетекающие через сечения 1 и 2 за один и тот же промежуток времени, должны быть равны, т. е.

$$\rho S_1 v_1 \Delta t = \rho S_2 v_2 \Delta t, \text{ или } v_1 S_1 = v_2 S_2.$$

Тогда изменение механической энергии запишется в виде

$$\Delta E_{\text{мех}} = v_1 S_1 \Delta t(\rho v_1^2/2 + \rho g h_1 - \rho v_2^2/2 - \rho g h_2).$$

Изменение механической энергии равно алгебраической сумме работ сил, действующих на выделенный объем жидкости, в данном случае сил давления. Сила давления $F_{\text{д}1} = P_1 S$ совершает положительную работу, равную $A_1 = P_1 S_1 v_1 \Delta t$, сила давления $F_{\text{д}2} = P_2 S$ совершает отрицательную работу $A_2 = -P_2 S_2 v_2 \Delta t$. Итак,

$$\Delta E_{\text{мех}} = \sum_i A_i,$$

или

$$v_1 S_1 \Delta t(\rho v_1^2/2 + \rho g h_1 - \rho v_2^2/2 - \rho g h_2) = (P_1 - P_2) S_1 v_1 \Delta t.$$

Окончательно

$$\rho v_1^2/2 + \rho g h_1 + P_1 = \rho v_2^2/2 + \rho g h_2 + P_2.$$

Так как сечения 1 и 2 выбраны произвольно, для любого сечения можно записать

$$\rho v^2/2 + \rho g h + P = \text{const}. \tag{7.4}$$

Это уравнение называется *уравнением Бернулли.*

Следствия уравнения Бернулли

1. *Закон Бернулли*: Если жидкость течет по горизонтальному каналу, то, чем больше скорость течения жидкости, тем меньше давление.

2. *Формула Торичелли.* Если в сосуде есть отверстие, через которое течет жидкость (рис. 7.10), то, записывая уравнение Бернулли для сечений $1 - 1'$ и $2 - 2'$, получим

$$P_{\text{атм}} + \rho v_1^2/2 + \rho g h = P_{\text{атм}} + \rho v_2^2/2 + 0.$$

Так как $v_1 \ll v_2$, для скорости струи, вытекающей из отверстия, имеем

$$v_2 \simeq \sqrt{2gh}.$$

3. Пусть имеется трубка переменного сечения (рис. 7.11), в одном из сечений находится поршень, на который давят с силой $\mathbf{F}$. Если площадь сечения $1 - 1'$ есть S, то давление жидкости в этом сечении равно $P_1 = F/S + P_{\text{атм}}$. Тогда уравнение Бернулли запишется в виде

$$F/S + P_{\text{атм}} + \rho v_1^2/2 = P_{\text{атм}} + \rho v_2^2/2.$$

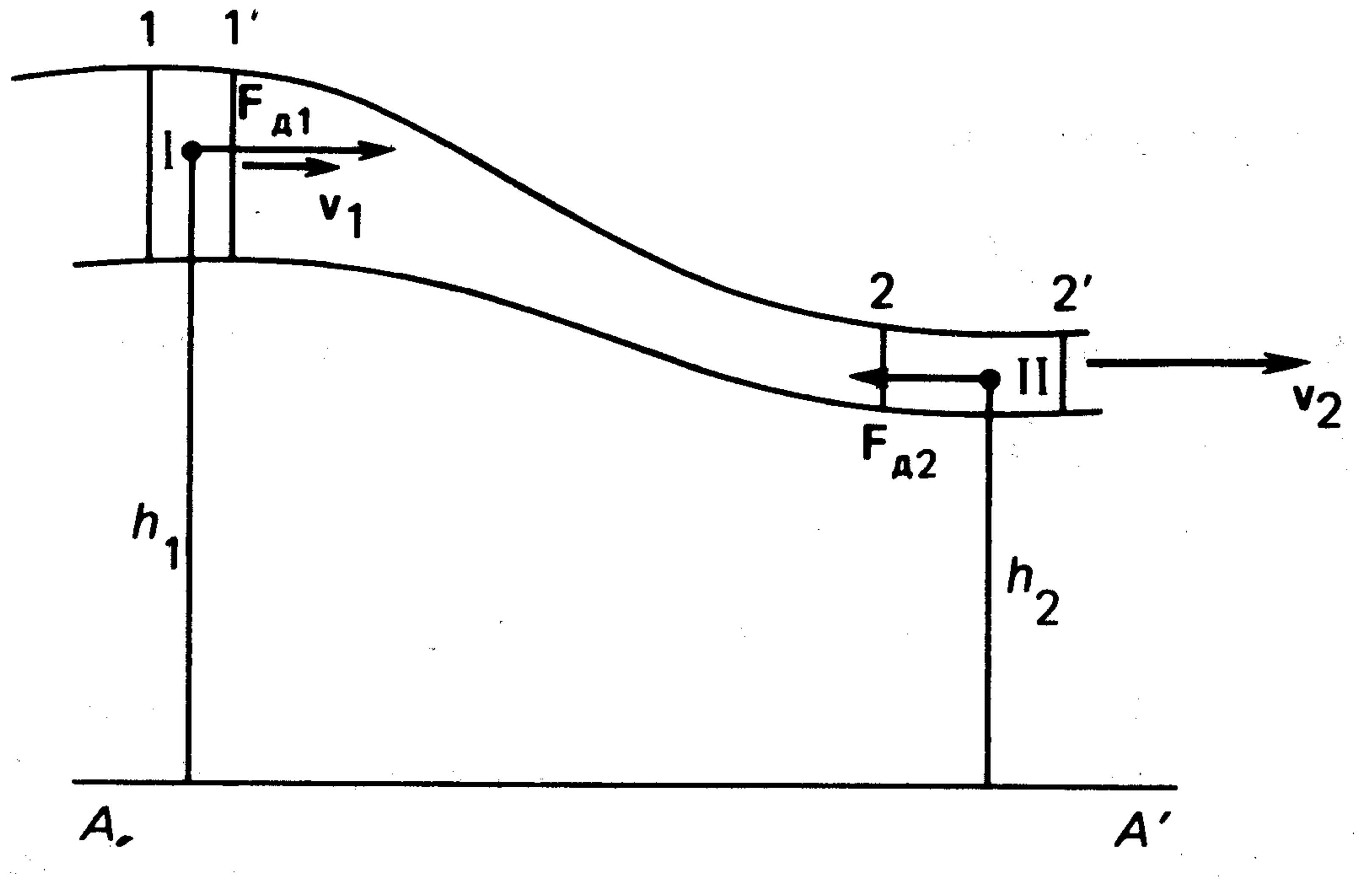


Рис. 7.9.

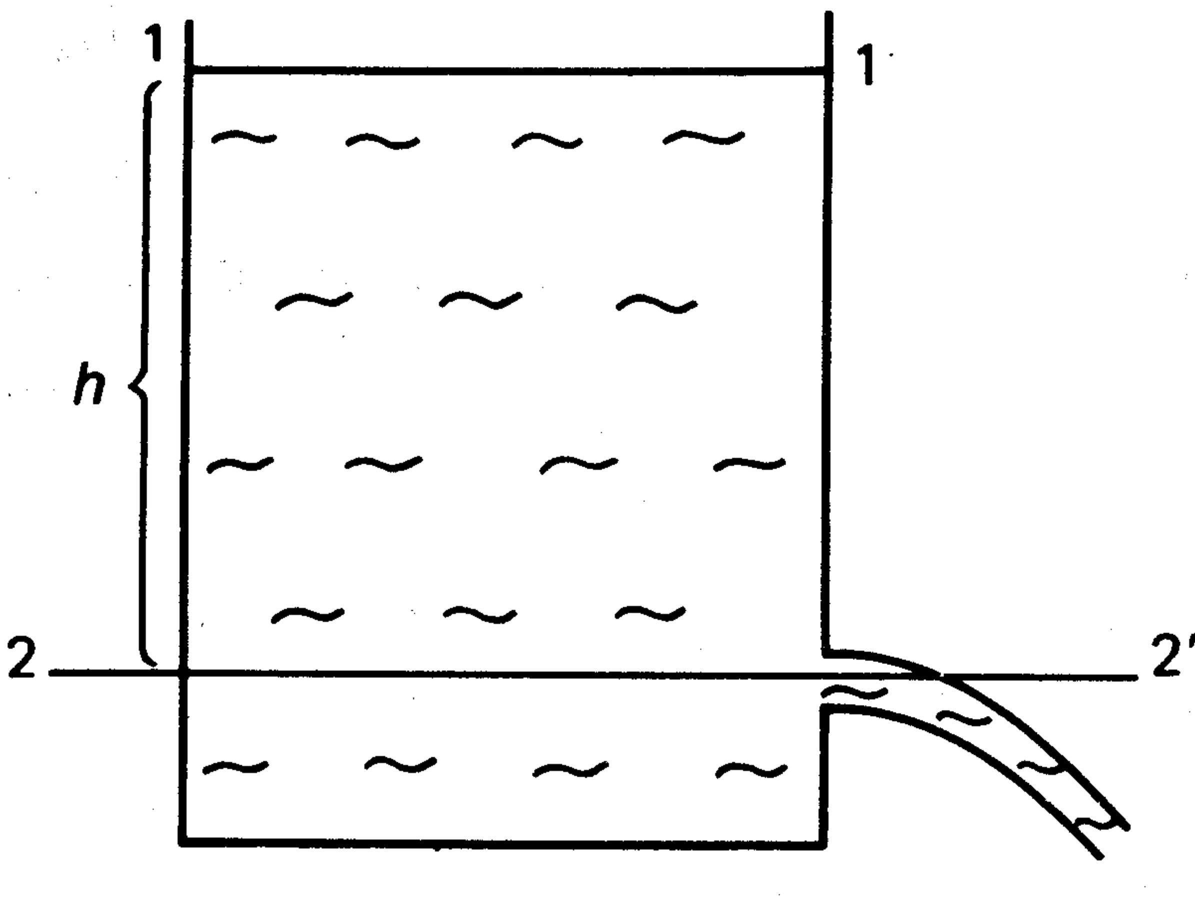


Рис. 7.10.

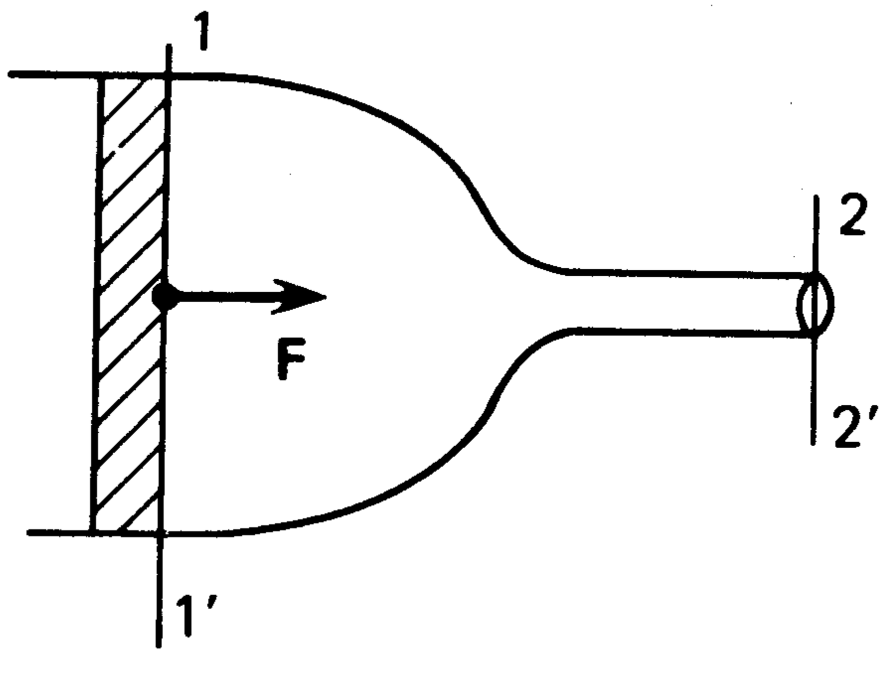


Рис. 7.11.

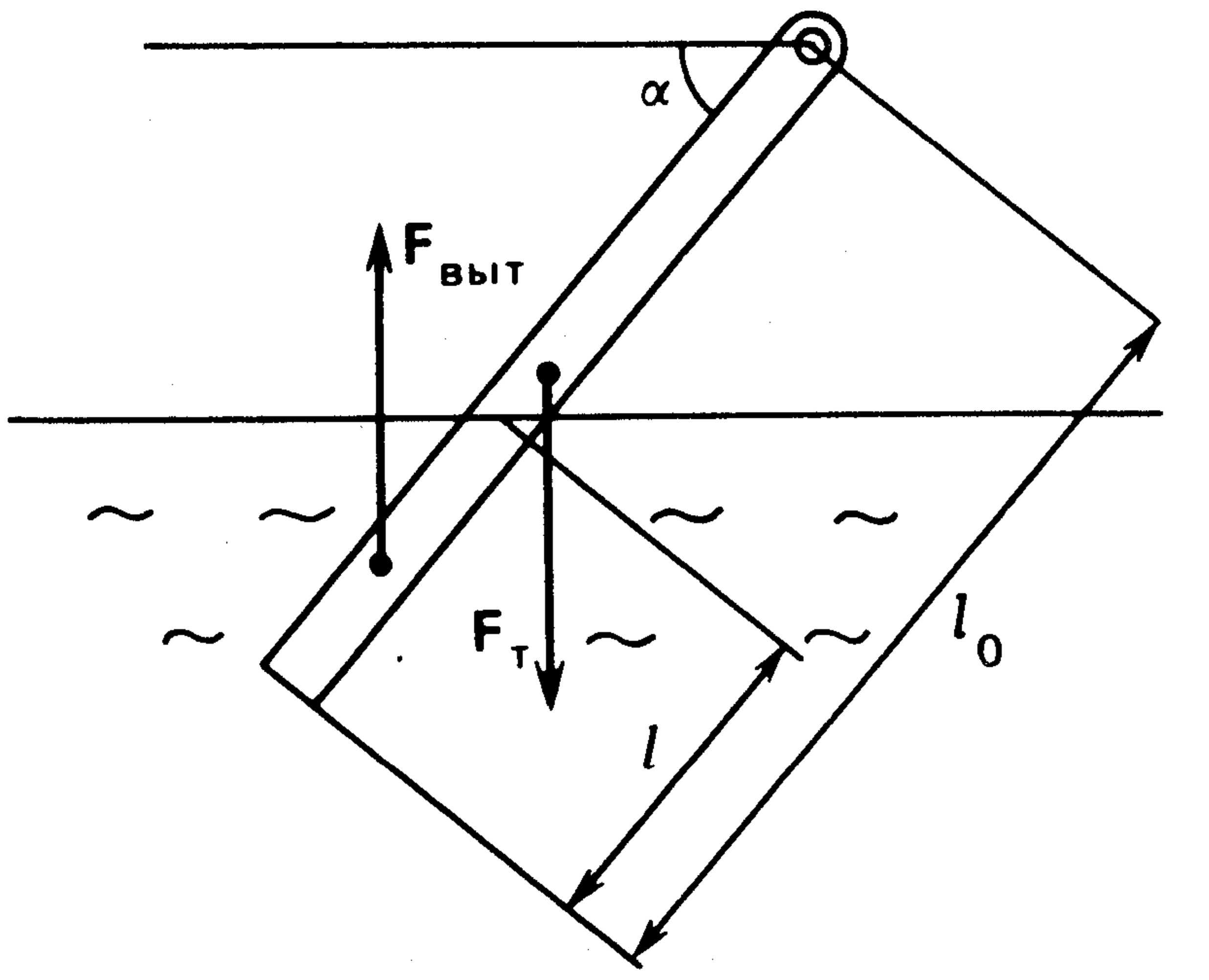


Рис. 7.12.

Примеры решения задач

Задача 1. Тонкая палочка плотностью $\rho = 750\,\text{кг/м}^3$ закреплена шарнирно на одном конце и опущена свободным концом в воду. Какая часть длины палочки будет погружена в жидкость при равновесии, если плотность воды $\rho_в = 1000\,\text{кг/м}^3$? Шарнир находится на небольшой высоте над уровнем воды.

Дано: $\rho = 750\,\text{кг/м}^3$, $\rho_в = 1000\,\text{кг/м}^3$; l/l_0 — ?

Решение. Так как палочка закреплена шарнирно, она может совершать только вращательное движение (рис. 7.12). Условием ее равновесия будет равенство нулю суммы моментов всех действующих сил относительно оси, проходящей через шарнир (гл. 6). Пусть l_0 — длина палочки, l — длина погруженной части, α — угол, образуемый палочкой с горизонтальной осью при равновесии. Запишем условие равновесия:

$$F_т(l_0/2)\cos\alpha - F_{выт}(l_0 - l/2)\cos\alpha = 0,$$

где

$$F_т = mg = \rho V g = \rho l_0 S g, \quad F_{выт} = \rho_в l S g,$$

Имеем

$$\rho l_0^2/2 - \rho_в l(l_0 - l/2) = 0,$$

$$\rho l_0^2/2 - \rho_{\text{в}} l l_0 + \rho_{\text{в}} l^2/2 = 0,$$

и разделив на $l_0^2/2$, получим

$$\rho - 2\rho_{\text{в}}(l/l_0) + \rho_{\text{в}}(l/l_0)^2 = 0.$$

Решим это уравнение относительно l/l_0:

$$\frac{l}{l_0} = \frac{\rho \pm \sqrt{\rho_{\text{в}}^2 - \rho\rho_{\text{в}}}}{\rho_{\text{в}}},$$

$$(l/l_0)_{1,2} = 1 \pm 0,5.$$

Поскольку отношение должно быть меньше 1, выберем

$$l/l_0 = 1/2.$$

Если шарнир расположен так, что в воду не может быть погружена половина палочки, то палочка будет висеть вертикально.

Задача 2. Какую силу давления испытывает боковая стенка сосуда длиной 2 м, если ее угол наклона $\alpha = 30°$, а высота столба воды в сосуде 10 м (рис. 7.13)?

Дано: $P_{\text{атм}} \approx 10^5$ Па, $l = 2$ м, $h = 10$ м, $\alpha = 30°$, $\rho = 10^3$ кг/м^3; F — ?

Решение. Давление изменяется с высотой по линейному закону $P = P_{\text{атм}} + \rho g h$, поэтому для определения силы давления на стенку возьмем среднее давление

$$P_{\text{ср}} = P_{\text{атм}} + \rho g h/2.$$

Сила давления на стенку сосуда

$$F = P_{\text{ср}} S = (P_{\text{атм}} + \rho g h/2) l h/\cos\alpha,$$

откуда

$$[F] = [\text{Н/м}^2 + (\text{кг/м})^3(\text{м/с}^2)\text{м}]\text{м}^2 = \text{Н},$$

$$F = 6 \cdot 10^6\ \text{Н}.$$

Если перевернуть сосуд, то сила давления на стенку по величине не изменится, если высота воды останется прежней, т. е. сила F также будет равна

$$F = (P_{\text{атм}} + \rho g h/2) l h/\cos\alpha.$$

Обратим внимание на то, что направление силы давления всегда перпендикулярно стенке и в первом случае жидкость будет “давить” на стенки, а во втором их “поддерживать”.

Задача 3. В сообщающихся сосудах разных диаметров находится ртуть (рис. 7.14). После того как в более узкий сосуд налили столб масла высотой 60 см, уровень ртути в широком сосуде повысился относительно первоначального положения AA' на 0,7 см.

Определить отношение диаметров сообщающихся сосудов, если плотность масла $\rho_{\text{м}}$ равна 800 кг/м^3, а плотность ртути $\rho_{\text{рт}}$ равна $1,36 \cdot 10^4$ кг/м^3. Считать $g = 10$ м/с^2.

Дано: $\rho_{\text{м}} = 8 \cdot 10^2$ кг/м^3, $\rho_{\text{рт}} = 1,36 \cdot 10^4$ кг/м^3, $H = 7 \cdot 10^{-3}$ м, $h_0 = 0,6$ м; D/d — ?

Решение. Из закона Паскаля следует, что однородная жидкость в сообщающихся сосудах устанавливается таким образом, что давления во всех точках,

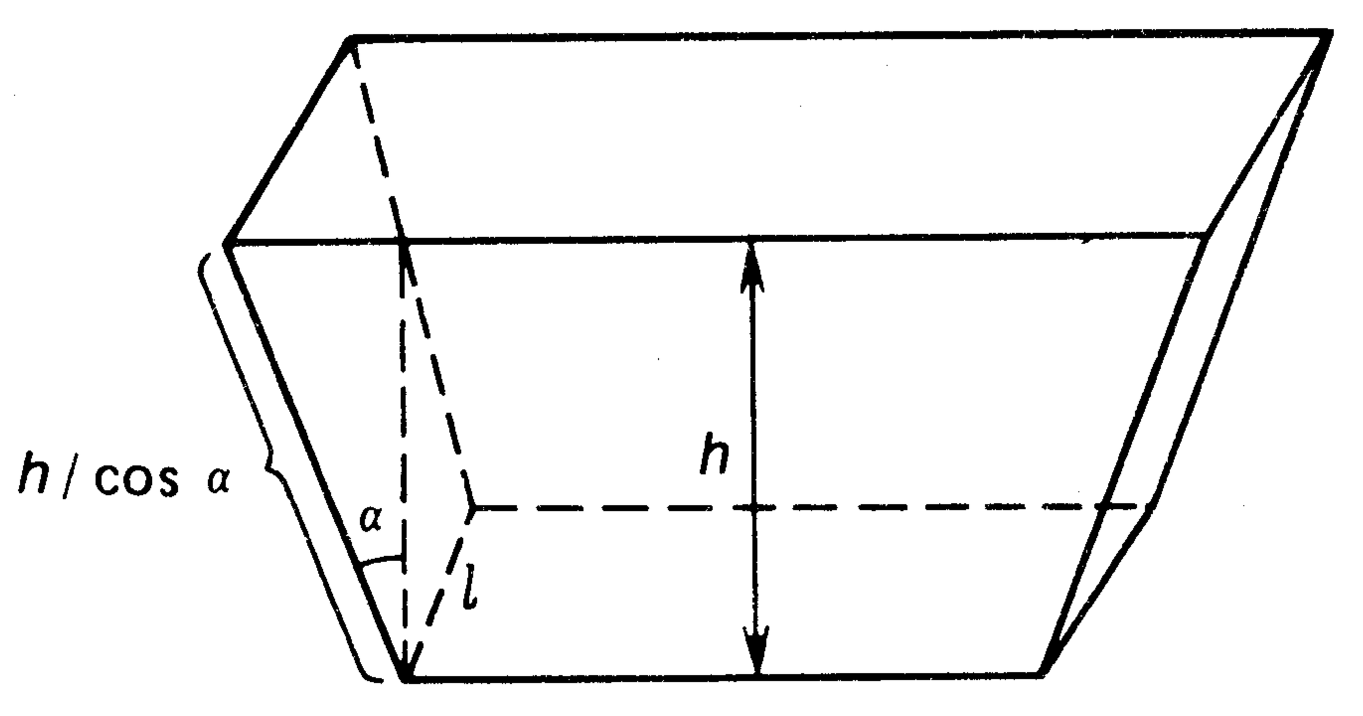


Рис. 7.13.

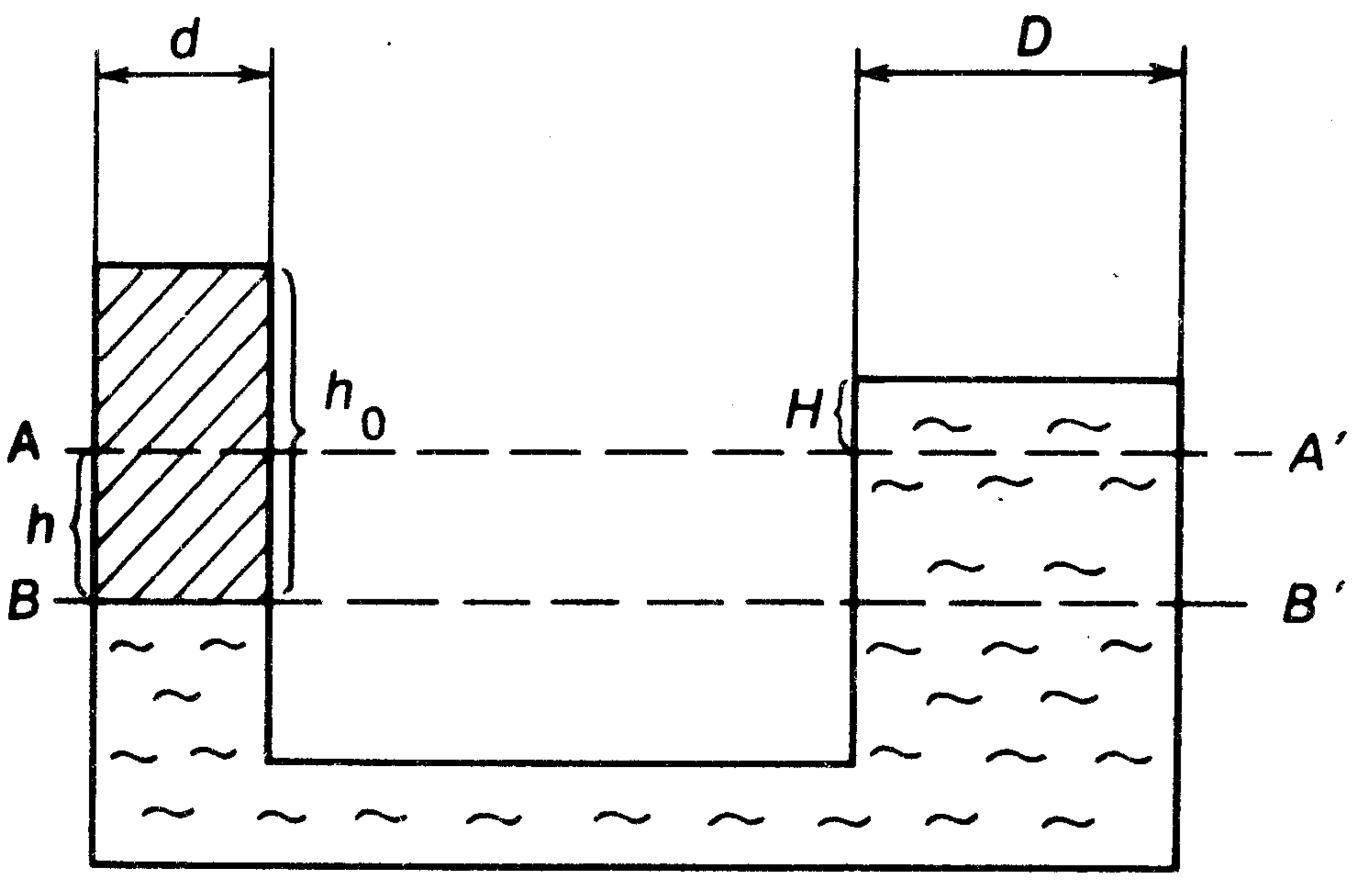


Рис. 7.14.

расположенных на одном и том же горизонтальном уровне, одинаковы. Если в одно из колен сосуда налита несмешивающаяся с первой жидкость другой плотности, то высоты столбов жидкости в сосудах будут различны. При этом давление на границу двух жидкостей в первом колене и давление жидкости во втором колене на том же горизонтальном уровне должны быть равны.

В узком сосуде уровень ртути понизился на h, а в широком сосуде повысился на H. Запишем условие равенства давлений для уровня BB':

$$\rho_м h_0 g = \rho_{рт}(h+H)g,$$

откуда легко получить

$$h + H = \rho_м h_0/\rho_{рт},$$

$$h + H = 3,5 \cdot 10^{-2}м, \quad h = 2,8 \cdot 10^{-2}м.$$

Жидкость несжимаема, объем ртути, вытесненной из узкого сосуда, равен объему ртути, вошедшему в широкий сосуд, т. е.

$$h\pi d^2/4 = H\pi D^2/4, \text{ или } hd^2 = HD^2.$$

Отношение диаметров сосудов

$$D/d = \sqrt{h/H} \approx 2.$$

Задача 4. Вес однородного тела в воде в три раза меньше, чем в воздухе. Чему равна плотность тела, если плотность воды $\rho_в = 10^3$ кг/м^3?

Дано: $P_1 = 3P_2$, $\rho_в = 1000$ кг/м^3; $\rho_т$ — ?

Решение. Определим вес тела его давлением на опору. В воздухе на тело действуют две силы (рис. 7.15,*а*): сила тяжести $\mathbf{F}_т = m\mathbf{g}$ и сила реакции опоры $\mathbf{N}_1 = -\mathbf{P}_1$ (выталкивающей силой в воздухе можно пренебречь). Запишем условие равновесия тела:

$$\mathbf{N}_1 + m\mathbf{g} = 0.$$

Уравнение в проекции на ось y имеет вид

$$N_1 - mg = 0,$$

$$P_1 = N_1 = mg = \rho_т V g,$$

где V — объем тела.

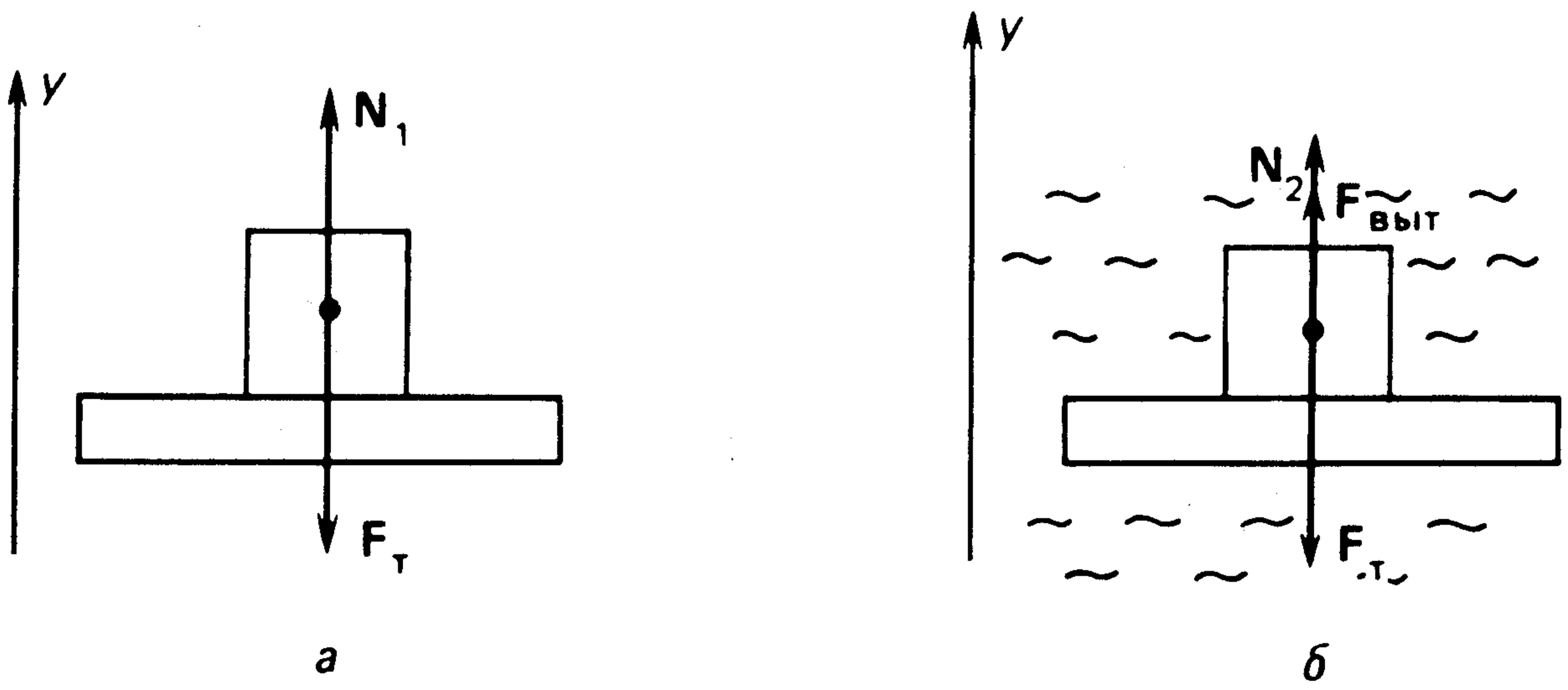


Рис. 7.15.

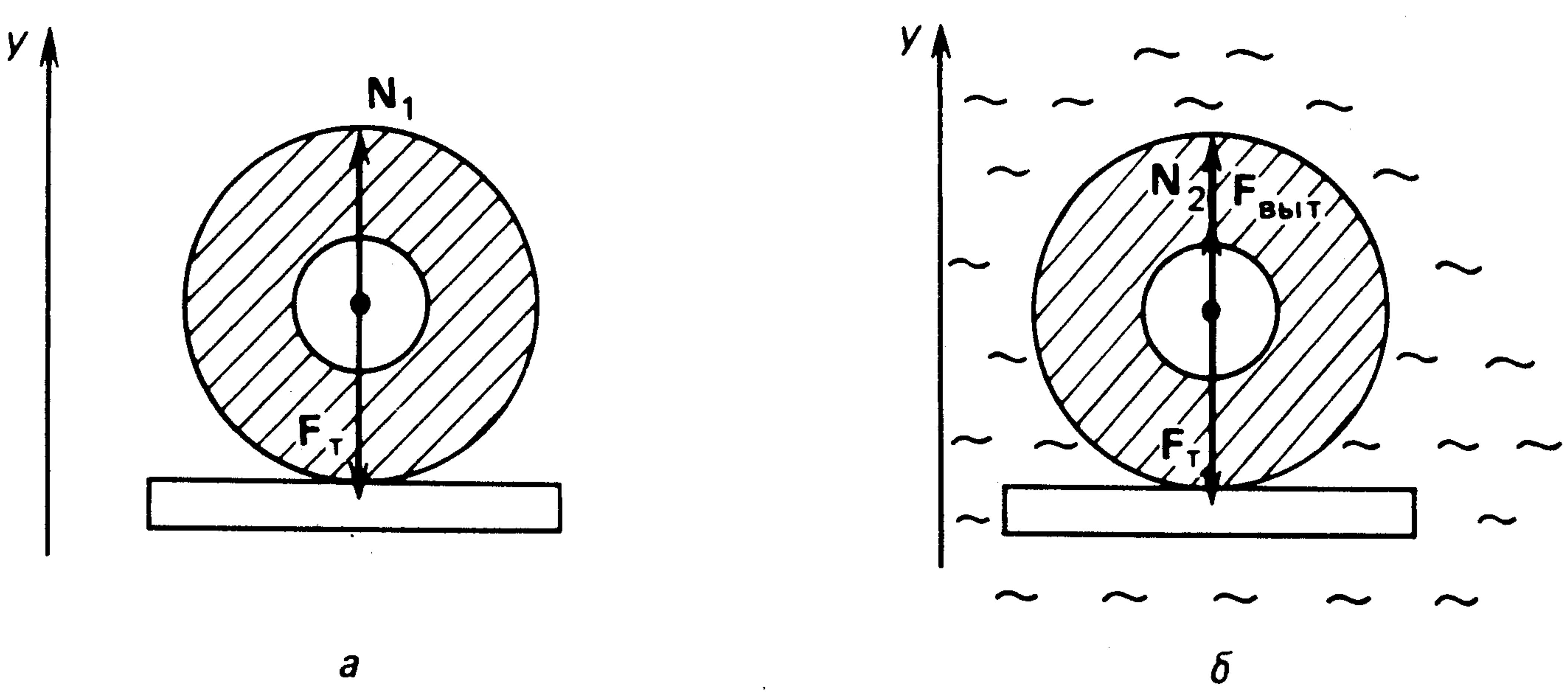


Рис. 7.16.

В воде на тело действуют три силы: сила тяжести $\mathbf{F}_т = m\mathbf{g}$, сила реакции опоры $\mathbf{N}_2 = -\mathbf{P}_2$ и выталкивающая сила $\mathbf{F}_{выт}$. Условие равновесия тела в воде:

$$\mathbf{N}_2 + m\mathbf{g} + \mathbf{F}_{выт} = 0.$$

Уравнение в проекции на ось y имеет вид

$$N_2 + F_{выт} - mg = 0,$$

откуда

$$F_{выт} = mg - N_2 = P_1 - P_2 = P_1 - P_1/3 = (2/3)P_1 = (2/3)\rho_т V g.$$

Так как $F_{выт} = \rho_в V g$, то $\rho_т = (3/2)\rho_в$, $\rho_т = 1500\,кг/м^3$.

Задача 5. Пустотелый медный шар весит в воздухе $P_1 = 17,8$ Н, а в воде $P_2 = 14,2$ Н. Определить объем полости $V_{пол}$, если плотность меди $\rho_{меди} = 8,9 \cdot 10^3\,кг/м^3$.

Дано: $P_1 = 17,8\,Н$, $P_2 = 14,2\,Н$, $\rho_м = 8,9 \cdot 10^3\,кг/м^3$, $\rho_в = 10^3\,кг/м^3$; $V_{пол}$ — ?

Решение. В воздухе на шар действуют две силы (рис. 7.16,*а*): сила тяжести $\mathbf{F}_т = m\mathbf{g}$ и сила реакции опоры $\mathbf{N}_1 = -\mathbf{P}_1$. Запишем условие равновесия:

$$\mathbf{N}_1 + m\mathbf{g} = 0.$$

Это уравнение в проекции на ось y

$$N_1 - mg = 0, \quad N_1 = mg = \rho_м V_м g,$$

где $V_м = P_1/\rho_м g$ — объем стенок.

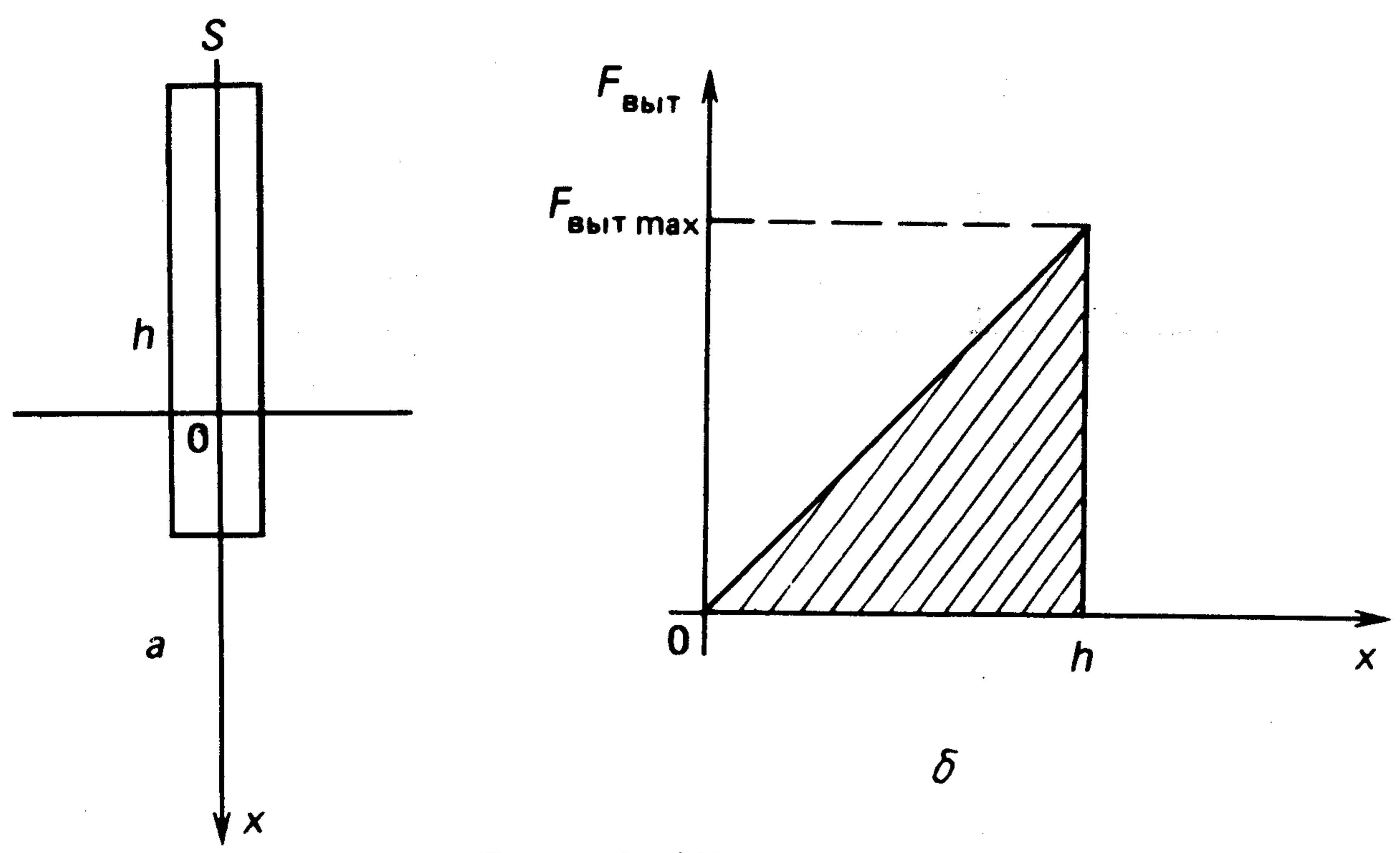


Рис. 7.17.

В воде на шар действуют три силы: сила тяжести $\mathbf{F}_т = m\mathbf{g}$, сила реакции опоры $\mathbf{N}_2 = -\mathbf{P}_2$ и выталкивающая сила $\mathbf{F}_{выт}$ (рис. 7.16,*б*). Условие равновесия в этом случае есть

$$\mathbf{N}_2 + m\mathbf{g} + \mathbf{F}_{выт} = 0.$$

Это уравнение в проекции на ось y имеет вид

$$N_2 + F_{выт} - mg = 0, \quad \text{где} \quad F_{выт} = \rho_в(V_{пол} + V_м)g.$$

Тогда

$$F_{выт} = mg - N_2 = P_1 - P_2 = \rho_в(V_{пол} + V_м)g = \rho_в(V_{пол} + P_1/\rho_м g)g,$$

откуда

$$V_{пол} = \frac{P_1 - P_2}{\rho_в g} - \frac{P_1}{\rho_м g},$$

$$[V] = \frac{кг \cdot м}{с^2 \cdot (кг/м^3)(м/с^2)} = м^3,$$

$$V_{пол} = \left(\frac{17,8 - 14,2}{10^3 \cdot 10} - \frac{17,8}{8,9 \cdot 10^3 \cdot 10}\right) м^3 = 1,6 \cdot 10^{-4} м^3.$$

Задача 6. Бревно высотой h и площадью поперечного сечениия S погружают в воду в вертикальном положении. Определить работу, которую совершила выталкивающая сила при полном погружении бревна (рис. 7.17,*а*).

Дано: S, h, $\rho_в$; A — ?

Решение. Выталкивающая сила равна

$$F_{выт} = \rho_в g S x,$$

где x — глубина погружения бревна. Величина x изменяется от 0 до h и, соответственно, выталкивающая сила, действующая на бревно, изменится от 0 до величины $F_{выт\,max} = \rho_в g S h$. На рис. 7.17,*б* изображена зависимость величины выталкивающей силы от глубины погружения. Работа этой силы равна площади заштрихованного треугольника и определяется выражением

$$A = -F_{выт\,max} h/2 = -\rho_в S h^2 g/2.$$

Знак минус берется потому, что выталкивающая сила направлена в сторону, противоположную перемещению. В случае подъема бревна выталкивающая сила совершает положительную работу.

Задача 7. В сосуде с жидкостью ко дну на нити длиной l прикреплен шарик массой m, радиусом $r_ш$. Сосуд начинают вращать с угловой скоростью ω. Определить угол между нитью и осью вращения (рис. 7.18). Плотность жидкости $\rho_ж$.

Дано: m, r, ω, $\rho_ж$; α — ?

Решение. На шарик действует три силы: сила натяжения $\mathbf{T}$, сила тяжести $\mathbf{F}_т$ и выталкивающая сила $\mathbf{F}_{выт}$. Основной закон динамики для шарика имеет вид

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F}_т + \mathbf{F}_{выт} + \mathbf{T}.$$

Шарик движется с постоянной по величине скоростью. Нормальное ускорение дается формулой $a_n = \omega r$, где r — радиус окружности, по которой движется шарик:

$$r = l \sin\alpha.$$

Тогда $a_n = \omega^2 l \sin\alpha$. Запишем уравнение в проекциях на оси координат:

$$\text{на ось } x \qquad ma_n = T\sin\alpha,$$
$$\text{на ось } y \qquad F_{выт} - T\cos\alpha - F_т = 0.$$

Исключив T, получим

$$ma_n/(F_{выт} - F_т) = \mathrm{tg}\alpha.$$

Выразив $F_{выт}$ и $F_т$ через данные задачи $F_{выт} = \rho_ж gV$, $F_т = mg$, имеем

$$\frac{m\omega^2 l \sin\alpha}{(\rho_ж V - m)g} = \mathrm{tg}\alpha.$$

Итак,

$$\cos\alpha = \frac{(\rho_ж 4\pi r_ш^3/3 - m)g}{m\omega^2 l},$$
$$\alpha = \arccos\frac{(\rho_ж 4\pi r_ш^3/3 - m)g}{m\omega^2 l}.$$

Задача 8. В сосуд, наполненный смесью жидкостей, плотность которой изменяется с глубиной по закону $\rho = \rho_0 + \alpha h$, опускают тело плотностью ρ. Тело целиком погружается в жидкость. На какой глубине окажется тело (положение центра тяжести), если оно имеет форму куба? При погружении грань куба параллельна поверхности жидкости.

Дано: $\rho = \rho_0 + \alpha h$, ρ; h_0 — ?

Решение. На тело (рис. 7.19) действуют две силы: сила тяжести $\mathbf{F}_т = m\mathbf{g}$ и выталкивающая сила $\mathbf{F}_{выт}$. Условие равновесия тела запишется в виде

$$\mathbf{F}_{выт} + \mathbf{F}_т = 0. \tag{7.5}$$

Чтобы вычислить выталкивающую силу, определим плотности жидкости на уровне верхней 1 и нижней 2 граней куба, считая длину куба равной a:

$$\rho_1 = \rho_0 + \alpha(h_0 - a/2) \text{ и } \rho_2 = \rho_0 + \alpha(h_0 + a/2),$$

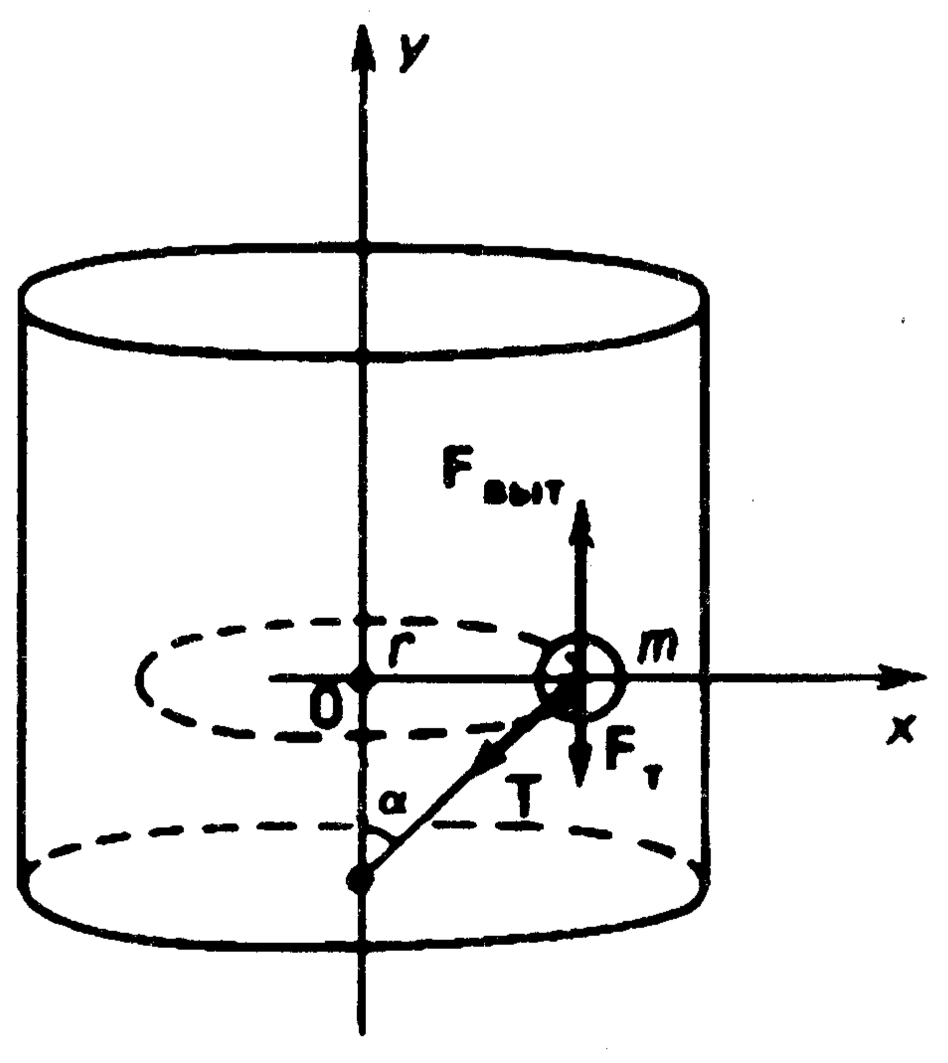


Рис. 7.18.

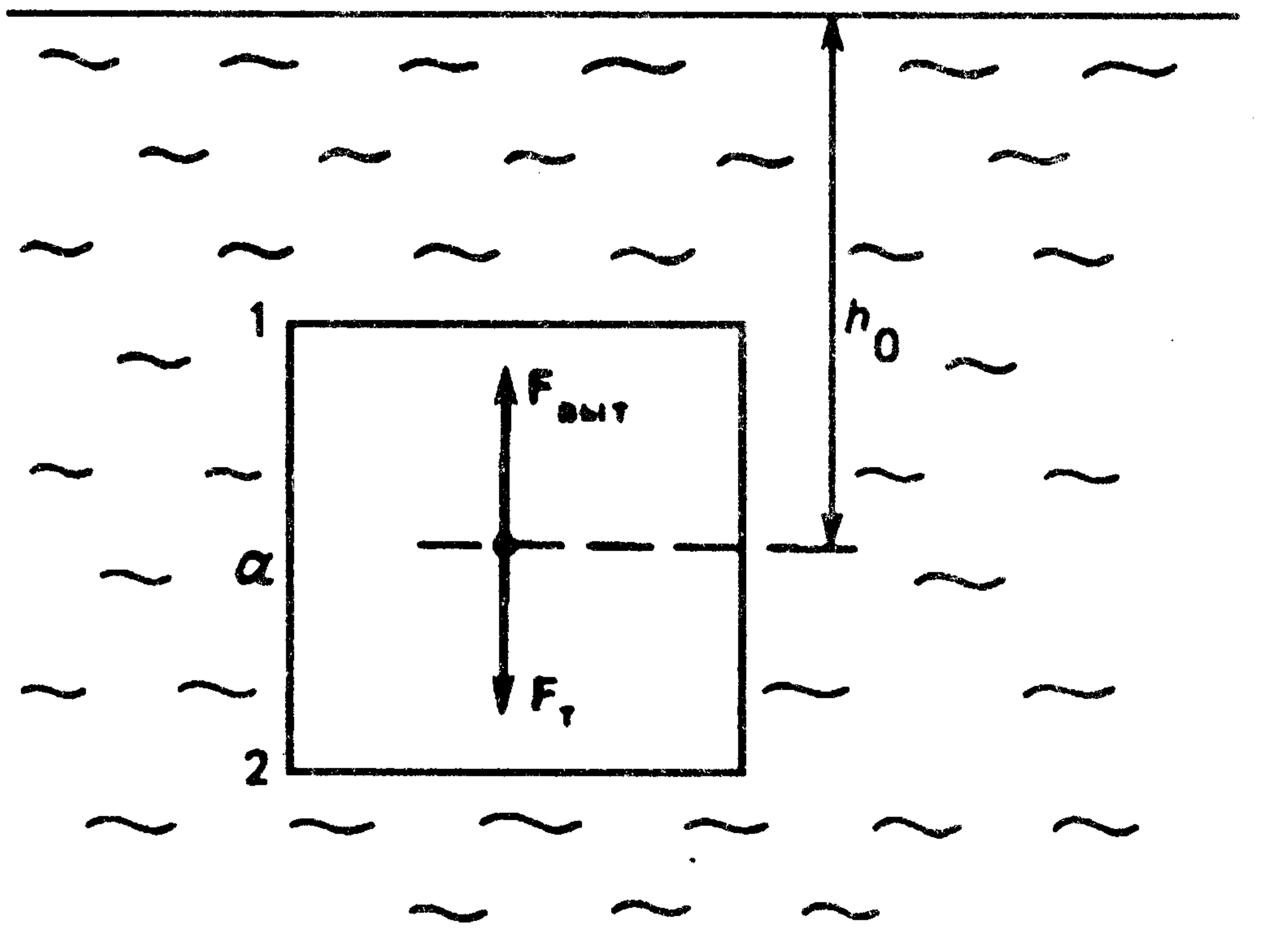


Рис. 7.19.

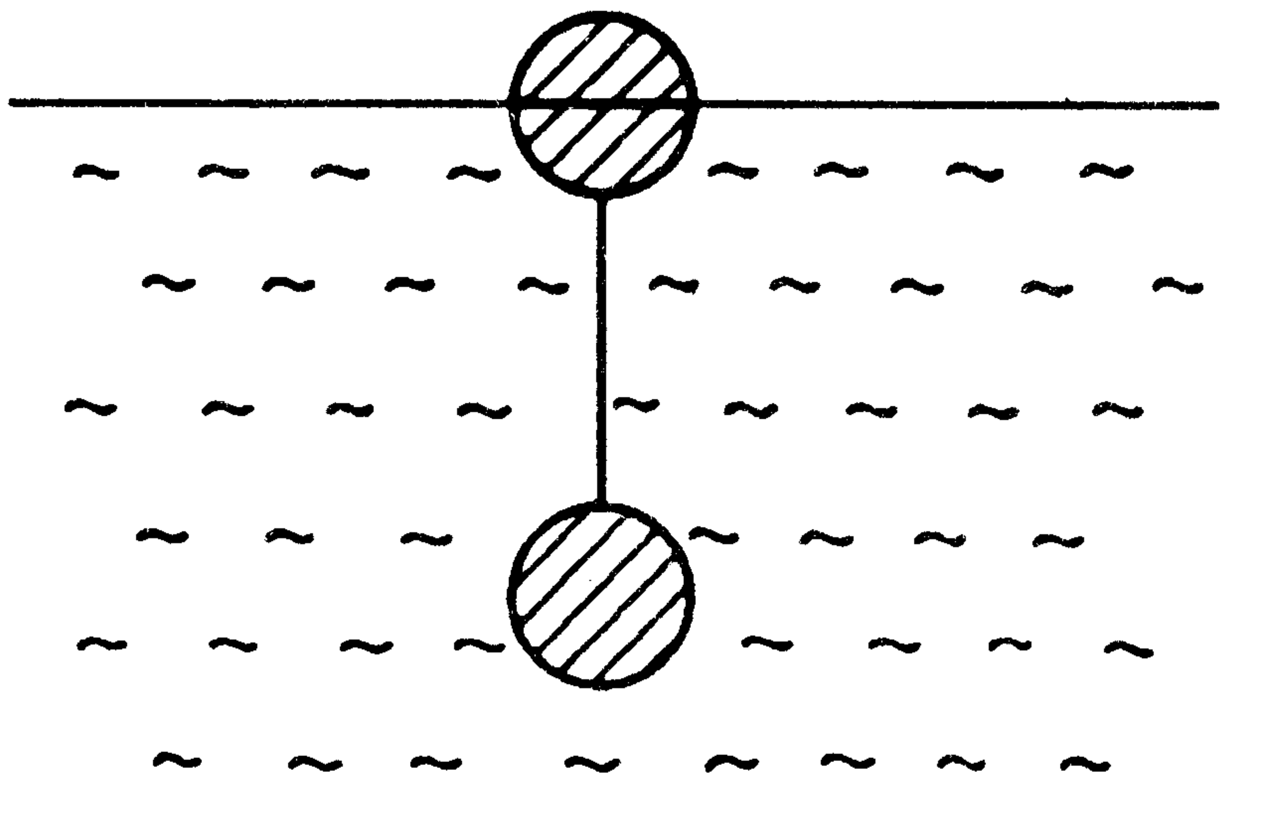


Рис. 7.20.

тогда среднее значение плотности жидкости

$$\rho_{ср} = (1/2)(\rho_1 + \rho_2) = \rho_0 + \alpha h_0.$$

Выталкивающая сила, действующая на куб, равна

$$F_{выт} = \rho_{ср} V g = (\rho_0 + \alpha h_0) a^3 g. \tag{7.6}$$

Подставляя (7.6) в (7.5), получим

$$\rho a^3 g = (\rho_0 + \alpha h_0) a^3 g,$$

откуда

$$h_0 = (\rho - \rho_0)/\alpha.$$

Задачи для самостоятельного решения

Задача 1. Определить натяжение нити, связывающей два шарика объемом 10 см^3, если верхний шарик плавает, наполовину погрузившись в воду. Нижний шарик в три раза тяжелее верхнего (рис. 7.20)

Ответ: $F = 2,5$ Н.

Задача 2. Два шарика радиусами r_1 и r_2 сделаны из материала плотностью ρ_1 и ρ_2 и соединены невесомым стержнем длиной l. Затем вся система помещена в жидкость плотностью ρ ($\rho < \rho_1$ и $\rho < \rho_2$). В какой точке стержня нужно прикрепить подвес, чтобы вся система находилась в равновесии при горизонтальном положении стержня?

Ответ:

$$x = l\frac{\rho - \rho_2}{(\rho - \rho_2) + (\rho - \rho_1)(r_1/r_2)^3}$$

от шара плотностью ρ_1.

Задача 3. В сообщающиеся сосуды диаметрами D_1 и D_2 налита вода. Как изменится уровень воды в сосудах, если положить кусок дерева массой m в первый сосуд? Во второй сосуд? Плотность воды $\rho_в$.

Ответ:

$$\Delta h = \frac{m}{(\pi/4)(D_1^2 + D_2^2)\rho_в}.$$

Задача 4. В сосуд с водой опущена трубка сечением $S = 2\,см^2$. В трубку налито 72 г масла ($\rho_{масла} = 900\,кг/м^3$). Найти разность уровней масла и воды.

Ответ: $\Delta h = 4$ см.

Задача 5. При подъеме груза массой $m = 2000$ кг с помощью гидравлического пресса затрачена работа $A = 40$ Дж. При этом малый поршень сделал $n = 10$ ходов, перемещаясь за один ход на $h = 10$ см. Во сколько раз площадь большого поршня больше площади малого?

Ответ: $S_2/S_1 = nhmg/A = 500$ раз.

Задача 6. Гидравлический пресс, заполненный водой, имеет поршни сечений 100 и $10\,см^2$. На больший поршень помещен груз массой 8 кг. На какую высоту поднимается после этого малый поршень?

Ответ: $h = 7,27$ см.

Задача 7. Из воды с глубины 7 м кран поднимает чугунную плиту массой 1400 кг. Найти совершенную работу, если плита была поднята на высоту 5 м над водой. Плотность чугуна $700\,кг/м^3$. Считать $g = 10\,м/с^2$.

Ответ: $1,54 \cdot 10^5$ Дж.

Задача 8. Кастрюля емкостью 2 л доверху наполнена водой. В нее ставят кастрюлю объемом 1,5 л и массой 0,6 кг. Сколько воды вытечет из большой кастрюли?

Ответ: 0,6 кг.

Задача 9. Деревянный кубик лежит на дне сосуда. Всплывет ли он, если в сосуд налить воду? (Вода не проникает под кубик.)

Ответ: Нет, так как на него не действует выталкивающая сила.

Задача 10. Полый шар (внешний радиус R_1, внутренний R_2), сделанный из материала плотностью ρ_1, плавает на поверхности жидкости плотностью ρ_2. Какова должна быть плотность ρ вещества, которым следует заполнить внутреннюю полость шара, чтобы он находился в безразличном равновесии внутри жидкости?

Ответ: $\rho = [R_1^3(\rho_2 - \rho_1) + R_2^3\rho_1](1/R_2^3)$.

Задача 11. Вес тела в воде в четыре раза меньше, чем в воздухе. Какова его плотность?

Ответ: $1,33 \cdot 10^3\,кг/м^3$.

Задача 12. На границе раздела двух жидкостей плотностью ρ_1 и ρ_2 плавает шайба плотности ρ ($\rho_1 < \rho < \rho_2$). Высота шайбы h. Определить глубину ее погружения во вторую жидкость (рис. 7.21).

Ответ: $x = h(\rho - \rho_1)/(\rho_2 - \rho_1)$.

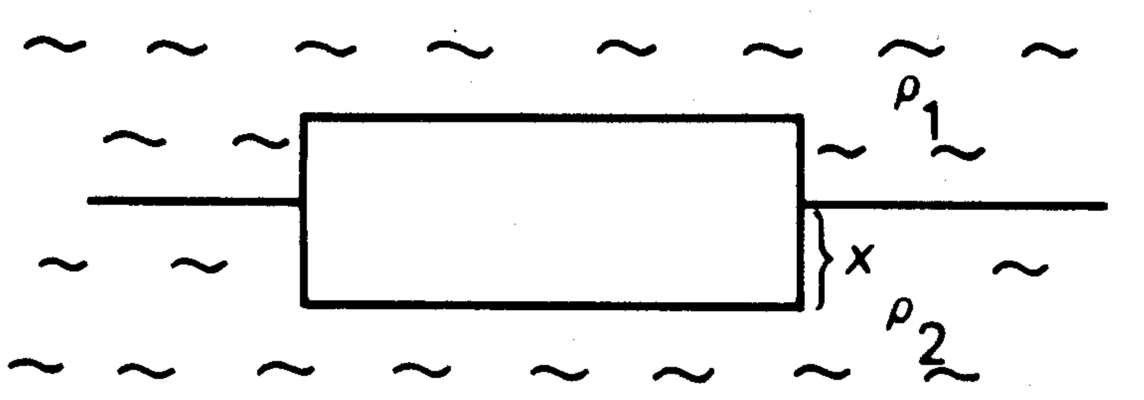


Рис. 7.21.

Задача 13. Один конец нити закреплен на дне, а второй прикреплен к пробковому поплавку. При этом 0,75 всего объема поплавка погружено в воду. Определить силу натяжения нити, если масса поплавка равна 2 кг и плотность пробки 250 кг/м^3. Массой нити пренебречь.

Ответ: 39,2 Н.

Задача 14. Канал шириной 10 м и глубиной 5 м наполнен водой и перегорожен плотиной. С какой средней силой вода давит на плотину? Одинаковое ли давление производит вода на верхнюю и нижнюю часть плотины?

Ответ: $1,23 \cdot 10^6$ Н; нет.

Задача 15. Шарик всплывает с постоянной скоростью в жидкости, плотность которой в 4 раза больше плотности материала шарика. Определить силу сопротивления жидкости при движении в ней шарика, считая ее постоянной. Масса шарика 10 г.

Ответ: 0,29 Н.

Задача 16. В цилиндрический сосуд налиты ртуть и поверх ртути масло. Вес масла в 2 раза меньше веса ртути. Сосуд заполнен до высоты 30 см. Определить давление на дно сосуда, если плотность ртути $1,36 \cdot 10^4$ кг/м^3, а плотность масла 900 кг/м^3.

Ответ: 7 кПа.

Задача 17. С какой скоростью вытекает вода из отверстия в дне бака, наполненного до высоты 4,6 м? Вязкость не учитывать.

Ответ: 9,6 м/с.

Задача 18. Скорость ветра над крышей дома 25 м/с. Какая сила действует на крышу площадью 250 м^2?

Ответ: 10^5 Н.

Молекулярная физика и термодинамика

Глава 8
Газовые законы

Все тела состоят из молекул. Молекулярная физика, изучая поведение молекул, объясняет состояние системы и процессы, протекающие в системе. Молекулы находятся в непрерывном движении. Хаотическое движение молекул обычно называется *тепловым движением*. Интенсивность теплового движения возрастает с увеличением температуры.

Молекулы взаимодействуют друг с другом. Между ними действуют силы притяжения и силы отталкивания, которые быстро убывают при увеличении расстояний между молекулами. Силы отталкивания действуют только на очень малых расстояниях. Практически поведение вещества и его агрегатное состояние определяются тем, что является доминирующим: силы притяжения или хаотическое тепловое движение. В твердых телах, где концентрация молекул n (n — число молекул в единице объема) относительно велика, доминируют силы взаимодействия и твердое тело сохраняет свои размеры и форму. Жидкости, где концентрация меньше, а, следовательно, меньше силы взаимодействия, сохраняют свой объем, но принимают форму сосуда, в котором они находятся. В газах, где концентрация молекул еще меньше, силы взаимодействия малы, поэтому газ занимает весь предоставленный ему объем.

На рис. 8.1 приведен график зависимости потенциальной энергии взаимодействия двух молекул от расстояния между ними. Пусть в точке $r = 0$ находится молекула и вторая молекула приближается к ней из бесконечности.

Напомним, что $\Delta E_{\text{п}} = -A_{\text{вз}} = -F_{\text{вз}}\Delta r$, откуда $F_{\text{вз}} = -\Delta E_{\text{п}}/\Delta r$.

При $r > r_0$ сила притяжения больше, чем сила отталкивания: $\Delta E_{\text{п}}/\Delta r > 0$. При $r = r_0$ $\quad F_{\text{отт}} = F_{\text{пр}}$, потенциальная энергия минимальна, суммарная сила, действующая на молекулы, равна нулю. При $r < r_0$ сила отталкивания становится больше силы притяжения: $F_{\text{отт}} > F_{\text{пр}}$ $(\Delta E_{\text{п}}\Delta r < 0)$. При значениях $r \sim d$ потенциальная энергия стремится к бесконечности. Это означает, что сила отталкивания также стремится к бесконечности, т. е. две молекулы не могут приблизиться друг к другу на расстояние меньше, чем d. Это позволило рассматривать молекулы как два упругих шарика диаметрами d, так как d — минимальное расстояние между их центрами. Взаимодействие молекул рассматривается по законам абсолютно упругого удара (модель реального взаимодействия).

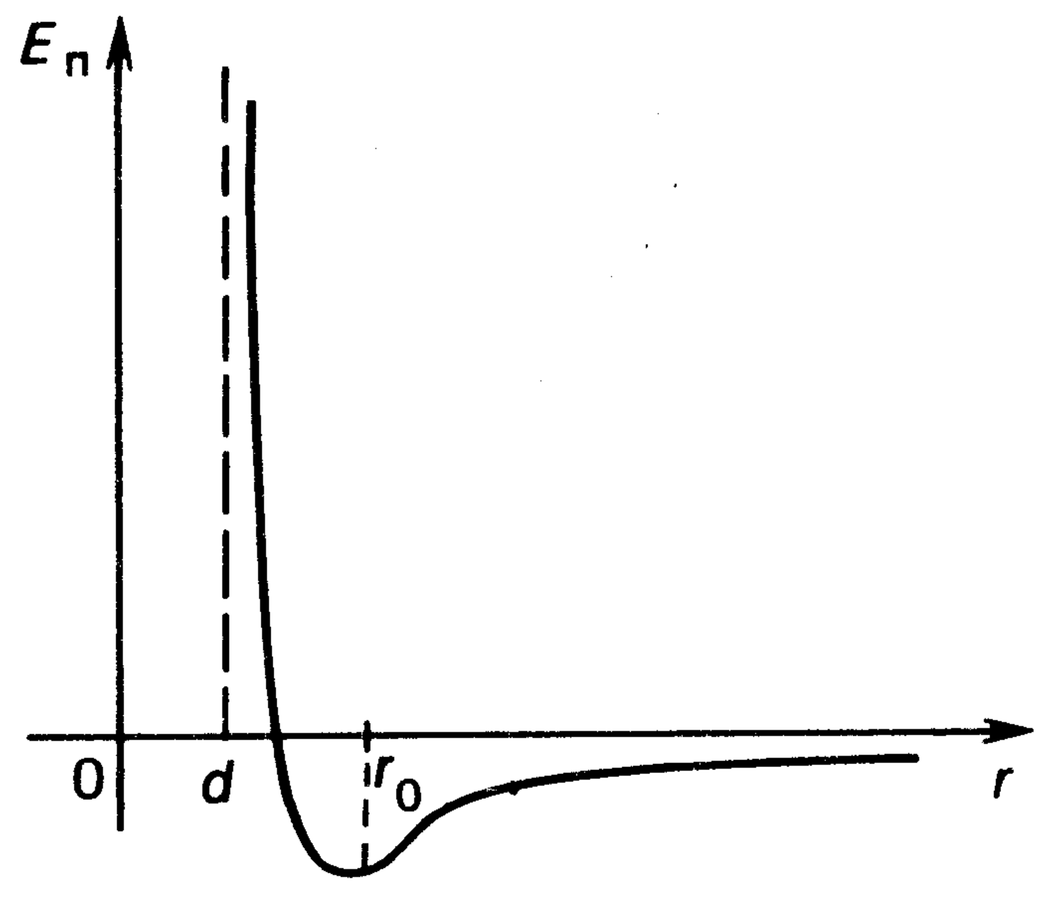


Рис. 8.1.

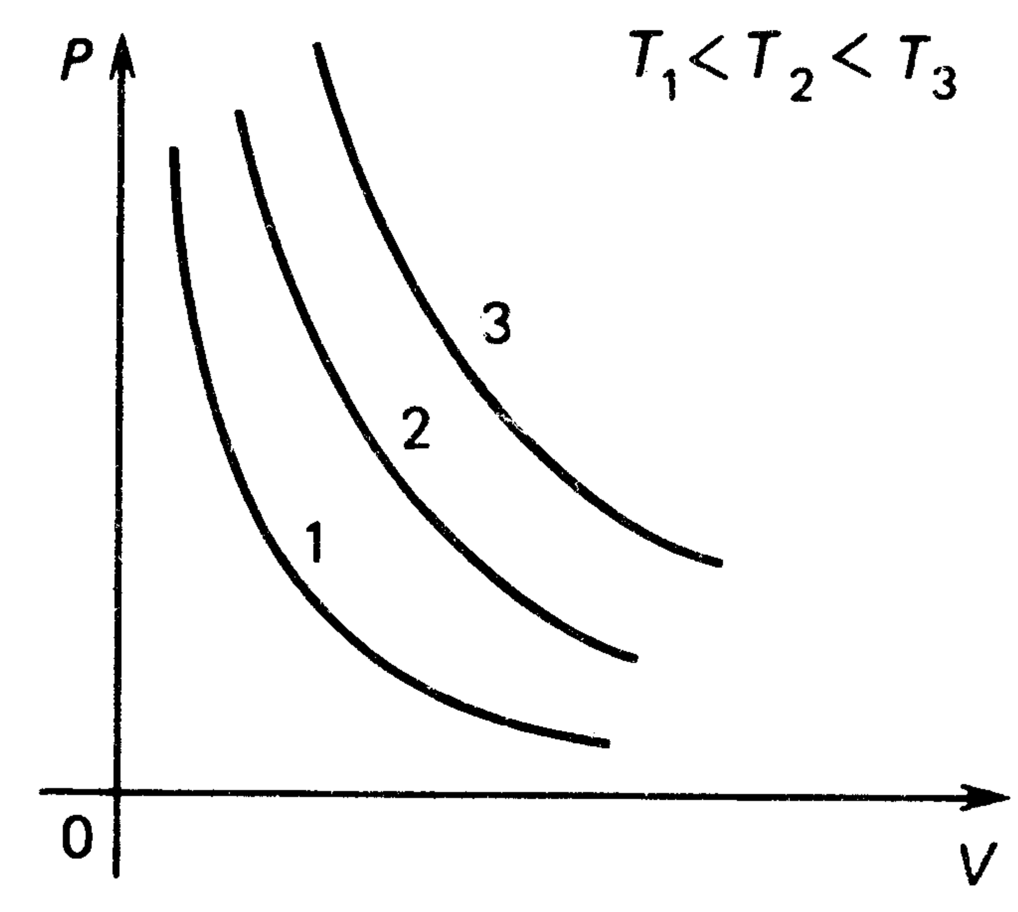


Рис. 8.2.

Силы, действующие между молекулами газа, малы и поэтому часто ими можно пренебречь. Кроме того, можно пренебречь объемом, который занимают молекулы. Газ, для которого это справедливо, называется *идеальным газом*. Любой газ при давлениях, меньших 10 атм, можно рассматривать как идеальный. Газ характеризуется тремя параметрами: *объемом* V, *давлением* P и *температурой* T. Температура может быть измерена по разным температурным шкалам. *Абсолютная температура* связана с температурой по шкале Цельсия соотношением: $T = t°\text{C} + 273°\text{C}$, изменение температуры по шкале Кельвина равно измененииию температуры по шкале Цельсия: $\Delta t°\text{C} = \Delta T$.

Если значения температуры и давления в различных точках объема разные, то температура и давление являются функциями координат, т. е. $T(x, y, z)$, $P(x, y, z)$. В этом случае газ (система) находится в неравновесном состоянии и мы не можем назвать значения давления и температуры, определяющие состояние системы. Если систему, находящуюся в неравновесном состоянии, предоставить самой себе, то температура и давление постепенно выравниваются, система приходит в равновесное состояние. *Равновесное состояние* — это состояние, при котором температура и давление во всех точках объема одинаковы. Состоянiие газа может быть определено, если он находится в равновесном состоянии.

На графиках зависимости $P - V$, $T - V$ и $P - T$ мы можем изображать только такие процессы, при которых каждое промежуточное состояниие является равновесным. Такие процессы называются *обратимыми*. Экспериментально исследовались процессы, при которых один из трех параметров и масса газа оставались неизменными. Эти законы называются *газовыми законами*, и если газ подчиняется газовым законам, его можно считать *идеальным* (еще одно определение идеального газа).

1.*Закон Бойля — Мариотта*. Для данной массы газа при постоянной температуре произведение давления на объем остается величиной постоянной:

$$PV = \text{const}. \tag{8.1}$$

Зависимость давления от объема изображена на рис. 8.2.

Процессы, происходящие при постоянной температуре, называются *изотермическими*, а кривые, изображающие процессы при $T = \text{const}$, называются *изотермами*. Поскольку $P = C/V$ ($C = \text{const}$), изотермы являются гиперболами.

2. *Закон Гей-Люссака*. Для данной массы газа при постоянном давлении

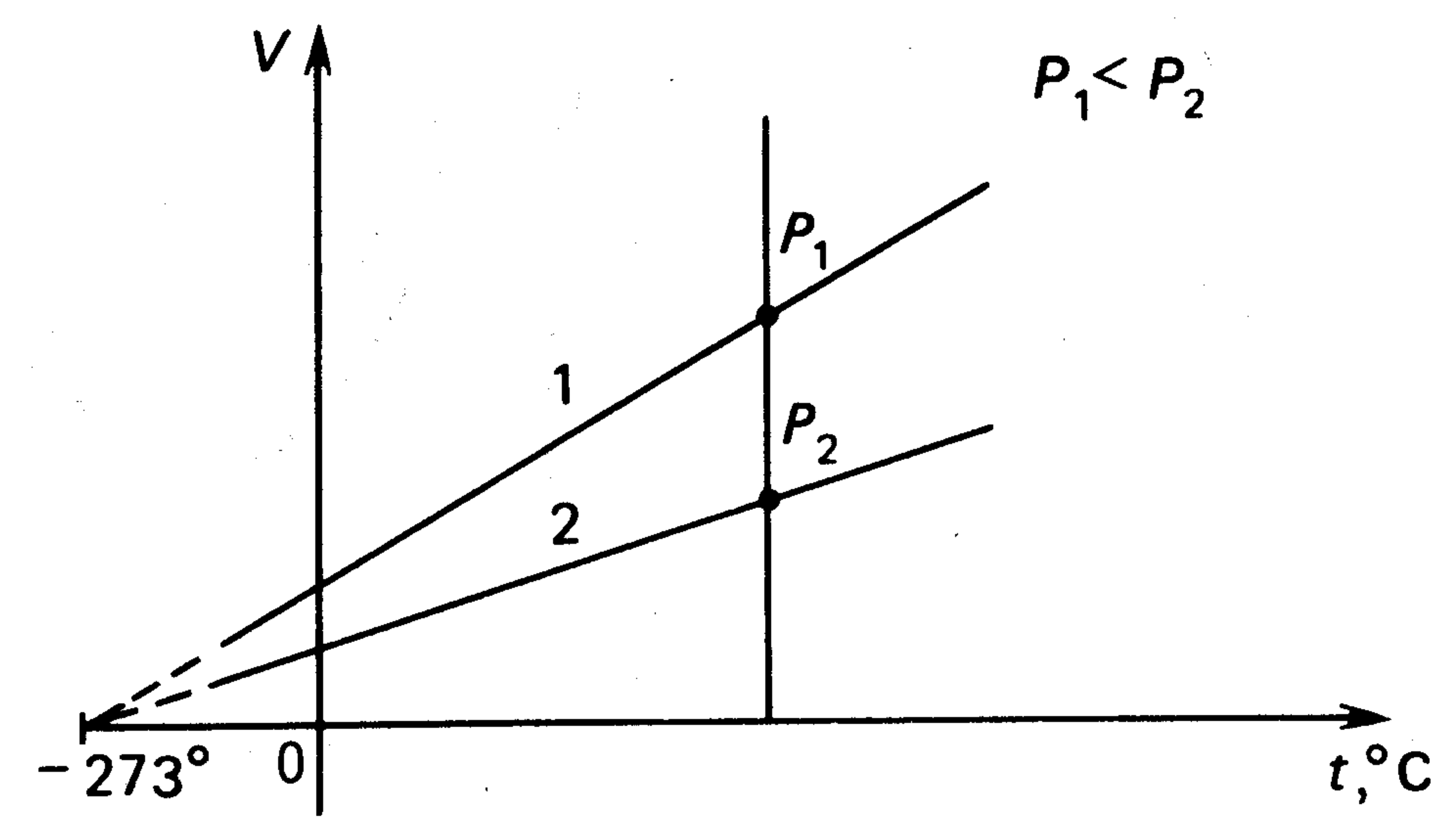


Рис. 8.3.

объем изменяется при увеличении температуры по линейному закону:

$$V = V_0(1 + \alpha t°\mathrm{C}), \tag{8.2}$$

где $\alpha = 1/273°\mathrm{C}$. Подставив α в (8.2), получим

$$V = \frac{V_0(273°\mathrm{C} + t°\mathrm{C})}{273°\mathrm{C}}.$$

Введем абсолютную температуру $T = 273°\mathrm{C} + t°\mathrm{C}$, откуда

$$\frac{V}{T} = \frac{V_0}{273°\mathrm{C}} = \mathrm{const}.$$

Закон Гей-Люссака можно сформулировать следующим образом: отношение объема к абсолютной температуре для данной массы газа при постоянном давлении остается постоянным. Процессы, происходящие при постоянном давлении, называются *изобарными*, а кривые, изображающие изобарный процесс, *изобарами*. На рис. 8.3 показаны две изобары при различных давлениях $P_1 < P_2$ (очевидно, что при данной температуре, чем больше объем, тем меньше давление). Около точки $t° \to -273°\,\mathrm{C}\,(T \to 0)$ зависимости изображены пунктирными линиями. Это понятно, так как при низких температурах газ превращается в жидкость и законы, найденные экспериментально для газа, не работают. Продолжив экспериментальные зависимости $V(t°\mathrm{C})$ до пересечения с осью абсцисс, найдем, что они пересекаются в одной точке $T = 0$.

3. *Закон Шарля.* Для постоянной массы газа при постоянном объеме отношение давления газа к его температуре остается постоянным:

$$P/T = \mathrm{const} \text{ при } \quad m = \mathrm{const}, \quad V = \mathrm{const}.$$

Процессы, происходящие при постоянном объеме, называются *изохорными*, и кривые их изображающие — *изохорами.*

На рис. 8.4 изображены изохорные процессы при разных значениях объема. Зависимости вблизи абсолютного нуля изображены так же, как и при изобарных процессах, пунктирными линиями. Указанные три закона устанавливают связь двух из трех параметров газа.

Уравнение, устанавливающее связь всех трех параметров при постоянной массе газа, называется *объединенным газовым законом.*

Пусть система, находящаяся в состоянии 1 (рис. 8.5), характеризующемся параметрами P_1, V_1, T_1, перешла в состояние 2, характеризующееся параметрами P_2, V_2, T_2. Переведем систему из состояния 1 в 2 следующим образом: сначала

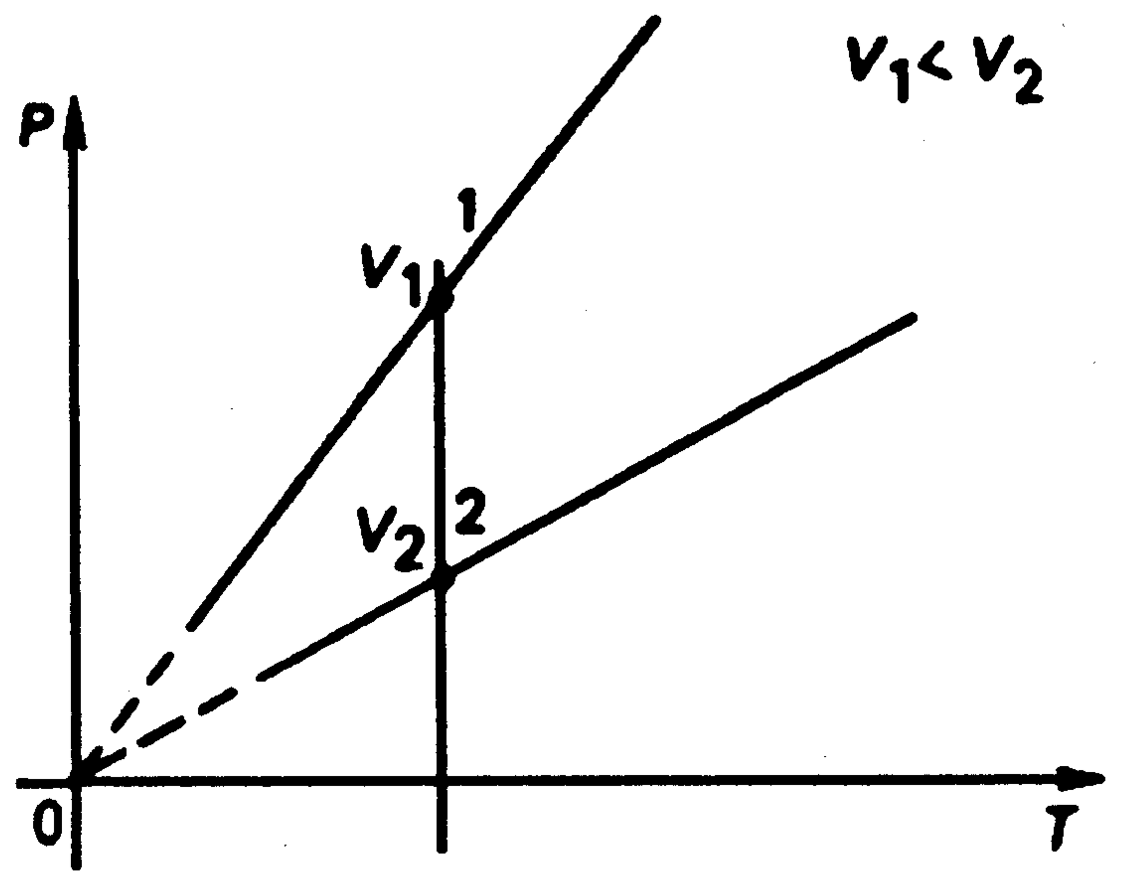


Рис. 8.4.

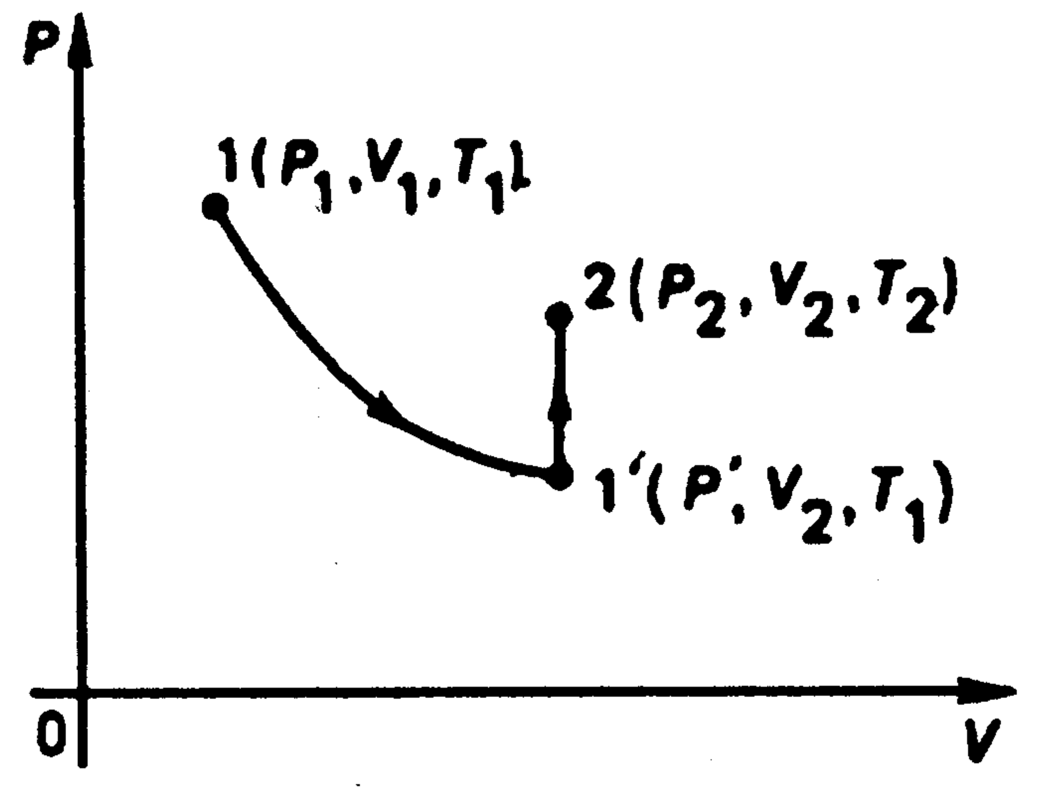


Рис. 8.5.

газ изотермически расширяется до объема V_2 (кривая $1 \to 1'$), а затем изохорно нагревается до температуры T_2 (отрезок $1' \to 2$). Итак, промежуточное состояние газа $1'$ характеризуется параметрами P', V_2, T_1.

При изотермическом расширении справедливо выражение

$$P_1V_1 = P'V_2 \tag{8.3}$$

(закон Бойля — Мариотта). При изохорном нагревании

$$\frac{P'}{T_1} = \frac{P_2}{T_2} \tag{8.4}$$

(закон Шарля). Выразив P' из (8.3) и (8.4) и приравняв выражения для P', получим

$$\frac{P_1V_1}{T_1} = \frac{P_2V_2}{T_2},$$

т. е. при $m = \text{const}$

$$PV/T = \text{const}. \tag{8.5}$$

Уравнение Клапейрона — Менделеева, или уравнение состояния идеального газа, связывает термодинамические параметры и массу газа.

Моль равен количеству вещества, содержащему столько же молекул, сколько их содержит 0,012 кг углерода (C^{12}). В одном моле любого вещества число молекул равно *числу Авогадро*

$$N_A = 6,022 \cdot 10^{23} \text{моль}^{-1}.$$

Масса моля M равна произведению массы одной молекулы m_0 на число Авогадро N_A:

$$M = m_0 N_A.$$

Известно, что 1 моль любого газа при нормальных условиях ($P_0 = 1\,\text{атм} = 1,013 \cdot 10^5\text{Па}$ и $t^\circ = 0^\circ\text{C}$ или $T_0 = 273\,\text{K}$) занимает объем $V_0 = 22,4$ л. Для одного моля можно записать уравнение (8.5):

$$\frac{PV}{T} = \frac{P_0V_0}{T_0} = \text{const}.$$

Величина $R = P_0V_0/T_0$ называется *универсальной* (одинаковой для всех газов) *газовой постоянной*:

$$R = \frac{1\,\text{атм} \cdot 22,4\,\text{л}}{1\,\text{моль} \cdot 273\,\text{K}} = 0,082\,\text{атм} \cdot \text{л}/(\text{моль} \cdot \text{K}) = 8,31\,\text{Дж}/(\text{моль} \cdot \text{K}).$$

Итак, $PV/T = R$, или $PV = RT$. Если в объеме V содержится m/M молей, то

$$PV = (m/M)RT \tag{8.6}$$

— уравнение Клапейрона — Менделеева. Все выше перечисленные газовые законы являются частным случаем уравнения Клапейрона — Менделеева. Газовая постоянная R связана с числом Авогадро и постоянной Больцмана k:

$$R = kN_A,$$

где $k = 1,38 \cdot 10^{23}$ Дж/К. Подставив это выражение в (8.6), получим $PV = NkT$, где N — число молекул газа. Величина $n_0 = N/V$ называется *концентрацией молекул*. Таким образом,

$$P = n_0 kT. \tag{8.7}$$

Уравнения (8.6) и (8.7) называются *уравнениями состояния идеального газа.*

Если в сосуде объемом V находится смесь газов, то давление смеси определяется *законом Дальтона*: давление смеси газов равно сумме парциальных давлений: $P = P_1 + P_2 + P_3 \ldots$. *Парциальное давление* — это давление компоненты смеси, если бы она занимала весь объем, т. е.

$$P_i = \frac{m_i}{M_i}\frac{RT}{V},$$

где m_i и M_i — масса и масса моля i-й компоненты смеси соответственно. Итак, если в сосуде находится смесь газов, состоящая из n компонентов, то

$$P = \sum_{i=1}^{n} p_i = (RT/V)\sum_{i=1}^{n} m_i/M_i.$$

Так как $m_i/V = \rho_i$ — плотность i-й компоненты,

$$P = RT\sum_{i=1}^{n} \rho_i/M_i.$$

Атмосферное давление также определяется суммой парциальных давлений компонентов, из которых состоит воздух: кислорода, углекислого газа, азота, паров воды:

$$P_{\text{ат}} = \left(\frac{m_1}{M_1} + \frac{m_2}{M_2} + \frac{m_3}{M_3} + \cdots + \frac{m_n}{M_n}\right)\frac{RT}{V} = \frac{m}{M_{\text{эфф}}}\frac{RT}{V},$$

где $m_1, m_2, m_3, \ldots, m_n$ и $M_1, M_2, M_3, \ldots, M_n$ — массы и массы молей кислорода, углекислого газа, азота и паров воды в объеме V, $M_{\text{эфф}}$ — эффективная масса моля воздуха, $M_{\text{эфф}} = 0,029$ кг/моль.

Примеры решения задач

Задача 1. В пробирке длиной $l = 10$ см, расположенной вертикально, над воздухом находится столбик ртути высотой $h = 3$ см. Пробирку переворачивают вверх дном. Определить, какой высоты столбик ртути останется в пробирке. Принять $P_{\text{атм}} = 1,013 \cdot 10^5$Па, плотность ртути $\rho = 13,6 \cdot 10^3\,\text{кг/м}^3$.

Дано: $l = 10\,\text{см}\,(0,1\,\text{м})$, $h = 3\,\text{см}\,(0,03\,\text{м})$, $P_{\text{атм}} = 1,013 \cdot 10^5\,\text{Па}$, $\rho = 13,6 \cdot 10^3\,\text{кг/м}^3$; x — ?

Решение. Если перевернуть пробирку (рис. 8.6), то воздух, заключенный в ней под столбиком ртути, расширится. Температура воздуха не изменится, т. е. процесс расширения происходит изотермически:

$$P_1V_1 = P_2V_2. \tag{8.8}$$

Давление воздуха P_1 равно сумме гидростатического давления столбика ртути и атмосферного давления:

$$P_1 = P_{\text{атм}} + \rho g h.$$

Объем, занимаемый воздухом до опрокидывания, $V_1 = (l-h)S$, где S — площадь поперечного сечения пробирки.

Когда пробирку перевернули, то атмосферное давление уравновешивается давлением воздуха P_2 и давлением оставшегося столбика ртути x:

$$P_{\text{атм}} = P_2 + \rho g x,$$

откуда

$$P_2 = P_{\text{атм}} - \rho g x.$$

Объем воздуха в этом случае равен

$$V_2 = (l-x)S.$$

Подставив найденные выражения в (8.8), получим

$$(P_{\text{атм}} + \rho g h)(l-h) = (P_{\text{атм}} - \rho g x)(l-x),$$

$$\rho g x^2 - x(\rho g l + P_{\text{атм}}) + P_{\text{атм}} l - (P_{\text{атм}} + \rho g h)(l-h) = 0. \tag{8.8a}$$

Для удобства расчетов обозначим $\rho g l + P_{\text{атм}} = A$, $P_{\text{атм}} l - (P_{\text{атм}} + \rho g h)(l-h) = B$. Тогда решение уравнения имеет вид

$$x_{1,2} = \frac{A \pm \sqrt{A^2 - 4\rho g B}}{2\rho g}.$$

Подставив численные значения, найдем $A = 1,15 \cdot 10^5$Па, $B = 2,78 \cdot 10^3$Па $\cdot$ м, $\rho g = 1,33 \cdot 10^5$Па/м. Физический смысл имеет только один из корней уравнения

$$x = \frac{A - \sqrt{A^2 - 4\rho g B}}{2\rho g},$$

численно равный $x = 0,026$ м.

Второй корень имеет значение больше l, что невозможно. Заметим, что в задачах этого типа для простоты расчетов удобно пользоваться тем, что атмосферное давление определяется по формуле

$$P_{\text{атм}} = \rho g h_0, \quad h_0 = 76\,\text{мм рт. ст.}$$

Подставив $P_{\text{атм}}$ в (8.8а), получим

$$(h_0 + h)(l-h) = (h_0 - x)(l-x).$$

Выразив h_0, h, l в сантиметрах, имеем

$$76(10-3) = (76-x)(10-x),$$

откуда

$$x = 2,6\,\text{см}.$$

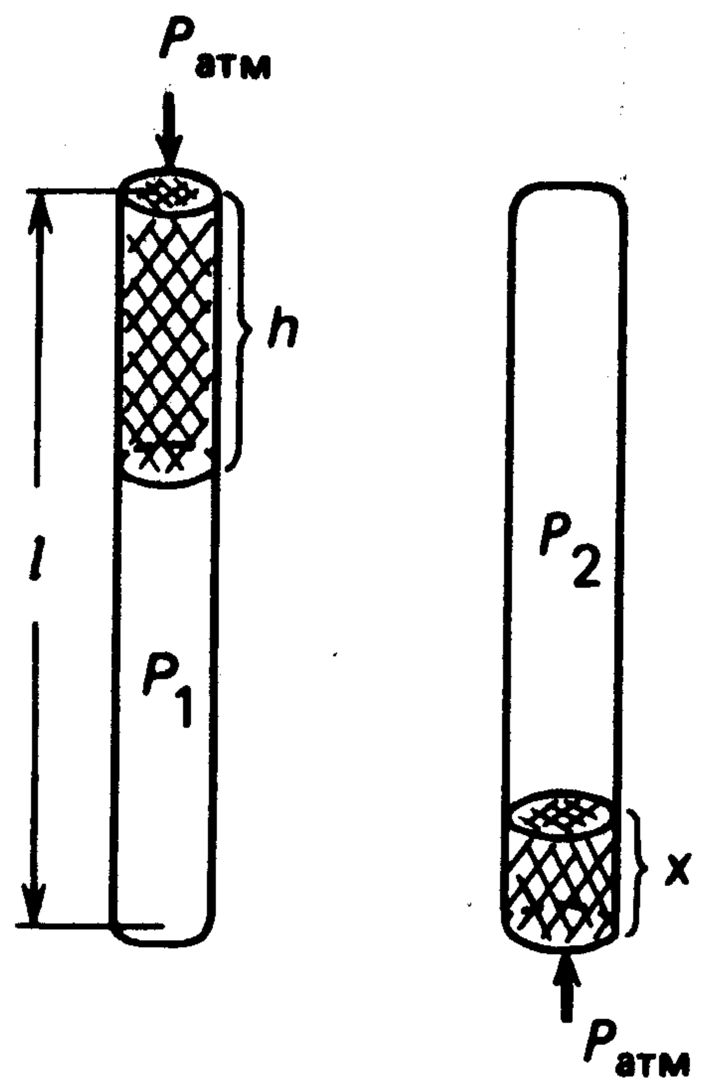


Рис. 8.6.

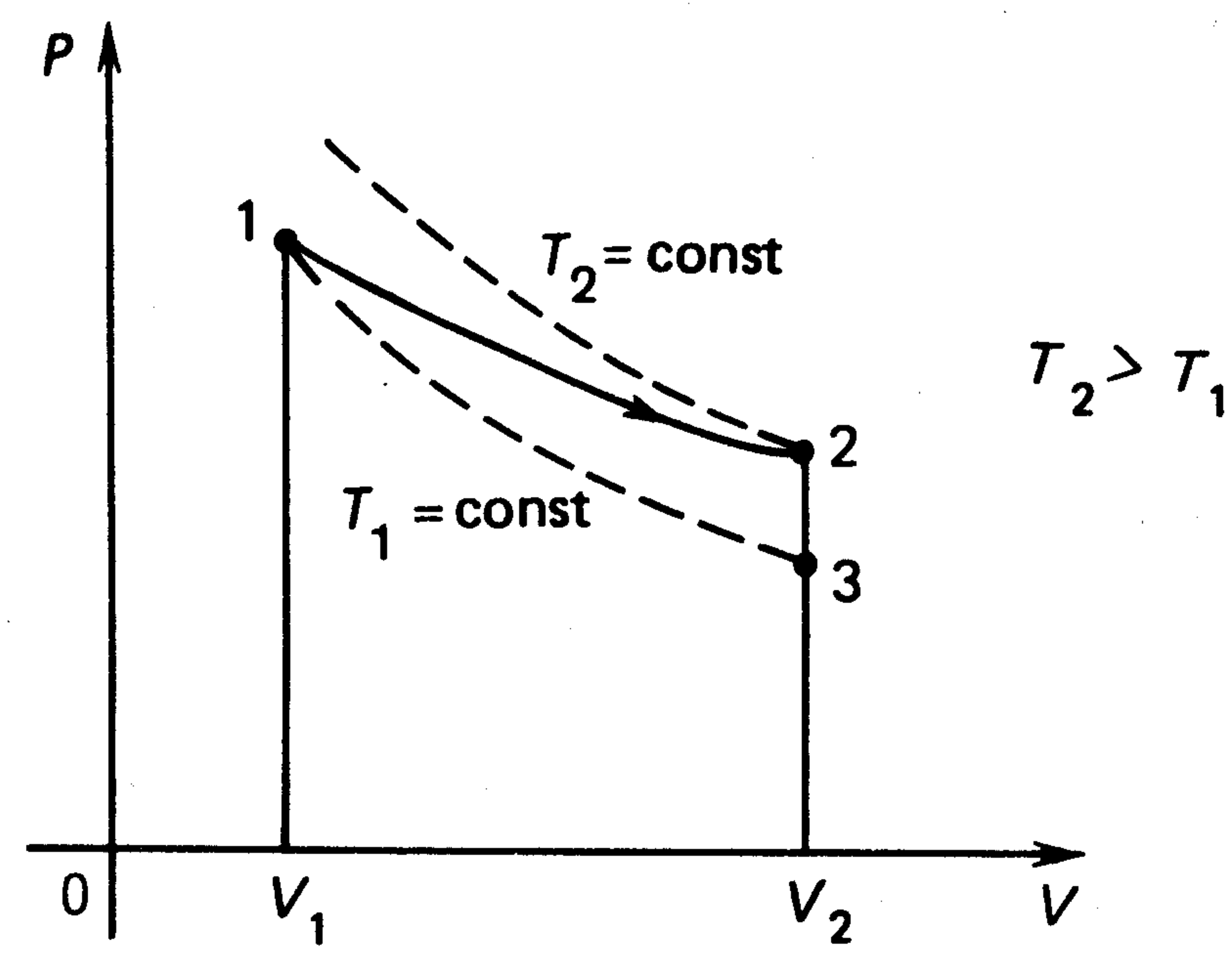


Рис. 8.7.

Задача 2. Нагревается или охлаждается газ при переходе из состояния 1 в состояние 2 (рис. 8.7)? $m = \text{const}$.

Решение. Изобразим на диаграмме $P - V$ графики зависимости $P(V)$ при изотермическом расширении газа. Изотерма, проходящая через точку 2, определяющую состояние 2, выше изотермы, проходящей через точку 1, определяющую состояние 1, следовательно, $T_2 > T_1$. Газ нагревается.

Задача 3. Нагревается или охлаждается газ, если процесс его расширения происходит по закону $PV^n = \text{const}$? Масса газа постоянна. Рассмотреть два случая: 1) $n < 1$, 2) $n > 1$.

Дано: $PV^n = \text{const} = b$, $m = \text{const}$; T_1/T_2 — ?

Решение. Подставив в уравнение Клапейрона — Менделеева $P = b/V^n$, получим:

$$\frac{b}{V^n}V = (m/M)RT; \quad b/V^{n-1} = (m/M)RT.$$

Выразим температуру из последнего уравнения:

$$T = bM/mRV^{n-1}.$$

Отсюда ясно, что, если $n < 1$, то при расширении газа температура увеличивается, если же $n > 1$, то при расширении газа температура уменьшается. Итак, в первом случае газ нагревается ($T_1/T_2 < 1$), во втором охлаждается ($T_1/T_2 > 1$).

Эту задачу, так же как и задачу 2, можно было решить графически.

Задача 4. При нагревании газа при постоянном объеме на 1 К давление увеличилось на 0,2%. Какова начальная температура газа?

Дано: $\Delta T = 1\,\text{К}$, $(P_2 - P_1)/P_1 = 0{,}002$; T — ?

Решение. Газ нагревается при постоянном объеме — процесс изохорный. По закону Шарля

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{T_1}{T_2},$$

где $T_2 = T_1 + \Delta T$. Из условия задачи следует, что $P_2 = P_1 \cdot 1{,}002$, т. е.

$$\frac{P_1}{T_1} = \frac{P_1 \cdot 1{,}002}{T_1 + \Delta T},$$

откуда $T_1 = \Delta T/0{,}002 = 500\,\text{К}$.

Задача 5. Давление воздуха внутри бутылки, закрытой пробкой, равно 0,1 МПа при температуре $t_1^\circ = 7°C$. На сколько градусов нужно нагреть воздух в бутылке, чтобы пробка вылетела? Без нагревания пробку можно вынуть, прикладывая к ней силу 30 Н. Сечение пробки $2\,см^2$.

Дано: $S = 2\,см^2\,(2{\cdot}10^{-4}\,м^2), F = 30\,Н, t_1 = 7°C\,(280\,К), P_0 = 0,1\,МПа\,(10^5\,Па)$; ΔT — ?

Решение. Чтобы пробка вылетела из бутылки, необходимо, чтобы давление воздуха в бутылке равнялось

$$P = F/S.$$

При нагревании объем не изменяется. По закону Шарля

$$P_0/T_1 = P/T_2,$$

откуда

$$T_2 = PT_1/P_0,$$

следовательно,

$$\Delta T = T_2 - T_1 = T_1(F/P_0S - 1),$$

$$\Delta T = 280\left(\frac{30}{2\cdot10^{-4}\cdot10^5} - 1\right)\,К = 140\,К.$$

Задача 6. Два сосуда емкостью $300\,см^3$ разделены на две части объемами $V_1 = 100\,см^3, V_2 = 200\,см^3$ подвижным поршнем, не проводящим тепло. Начальная температура газа в сосудах $T_0 = 300\,К$, а его давление $P_0 = 1,01\cdot10^5 Па$. Затем меньший сосуд охладили до 273 К, а больший нагрели до 373 К. Какое давление установится в сосудах?

Дано: $P_0 = 1,01\cdot10^5\,Па$, $T_0 = 300\,К$, $V_1 = 100\,см^3\,(10^{-4}\,м^3)$, $T_1 = 273\,К$, $V_2 = 200\,см^3\,(2\cdot10^{-4}\,м^3)$, $T_2 = 373\,К$; P — ?

Решение. При изменении температуры изменяется давление газа, поршень перемещается до тех пор, пока давление с двух сторон поршня не станет одинаковым. Для газа в объеме V_1 запишем уравнение Клапейрона:

$$\frac{P_0V_1}{T_0} = \frac{PV_1'}{T_1}. \tag{8.9}$$

Для газа в объеме V_2 имеем

$$\frac{P_0V_2}{T_0} = \frac{PV_2'}{T_2}. \tag{8.10}$$

При этом общий объем сосуда не изменился:

$$V_1' + V_2' = V_1 + V_2. \tag{8.11}$$

Система уравнений (8.9)–(8.11) — это система алгебраических уравнений относительно неизвестных: V_1', V_2' и P. Из (8.9) и (8.10) имеем

$$V_1' = \frac{T_1P_0V_1}{PT_0}, \quad V_2' = \frac{T_2P_0V_2}{PT_0}. \tag{8.12}$$

Подставив эти выражения в (8.11), получим

$$\frac{T_1V_1P_0}{PT_0} + \frac{T_2P_0V_2}{PT_0} = V_1 + V_2,$$

откуда

$$P = \frac{P_0(V_1T_1 + V_2T_2)}{(V_1 + V_2)T_0};$$

$$[P] = \frac{(\text{Н}/\text{м}^2)(\text{м}^3 \cdot \text{К} + \text{м}^3 \cdot \text{К})}{(\text{м}^3 + \text{м}^3)\text{К}} = \frac{\text{Н}}{\text{м}^2} = \text{Па},$$

$$P = 1,15 \cdot 10^5 \text{Па}.$$

Задача 7. В баллоне емкостью 110 л помещено $m_1 = 0,8$ г водорода H_2 и $m_2 = 1,6$ г кислорода O_2. Определить давление смеси на стенки сосуда, если температура окружающей среды $t = 27°$C.

Дано: $V = 110$ л $(1,1 \cdot 10^{-1}\,\text{м}^3)$, $m_1 = 0,8$ г, $m_2 = 1,6$ г. Молярные массы водорода $M_1 = 0,002$ кг/моль, кислорода $M_2 = 0,032$ кг/моль, $t° = 27°$C, $(T = 300\,\text{К})$; P — ?

Решение. Согласно закону Дальтона, давление смеси равно сумме парциальных давлений:

$$P = P_1 + P_2,$$

где P_1 — парциальное давление водорода, равное

$$P_1 = \frac{m_1}{M_1}\frac{RT}{V},$$

P_2 — парциальное давление кислорода, равное

$$P_2 = \frac{m_2}{M_2}\frac{RT}{V}.$$

Тогда

$$P = \frac{RT}{V}\left(\frac{m_1}{M_1} + \frac{m_2}{M_2}\right),$$

$$[P] = \frac{\text{Дж} \cdot \text{К}}{\text{моль} \cdot \text{К} \cdot \text{м}^3}\left(\frac{\text{кг}}{\text{кг}/\text{моль}} + \frac{\text{кг}}{\text{кг}/\text{моль}}\right) = \frac{\text{Н}}{\text{м}^2} = \text{Па},$$

$$P = \frac{8,31 \cdot 300}{1,1 \cdot 10^{-1}}\left(\frac{0,8}{0,002} + \frac{1,6}{0,032}\right)\text{Па} = 1,02 \cdot 10^4 \text{Па}.$$

Задача 8. По газопроводу течет углекислый газ при давлении $P = 50\,\text{Н}/\text{см}^2$ и температуре $t° = 17°$C. Какова скорость v движения газа по трубе, если за $\tau = 5$ мин через площадь поперечного сечения $S = 6\,\text{см}^2$ протекает $m = 2,5$ кг углекислого газа?

Дано: $P = 50\,\text{Н}/\text{см}^2\,(5 \cdot 10^5\,\text{Н}/\text{м}^2)$, $\tau = 5\,\text{мин}\,(300\,\text{с})$, $t° = 17°$C, $T = 290$ К, $S = 6\,\text{см}^2\,(6 \cdot 10^{-4}\,\text{м}^2)$, $m = 2,5$ кг; v — ?

Решение. Объем, занимаемый газом при данных температуре и давлении, можно определить из уравнения Клапейрона — Менделеева:

$$PV = (m/M)RT,$$

молярная масса углекислого газа CO_2 $M = 0,044$ кг/моль:

$$V = \frac{mRT}{MP}.$$

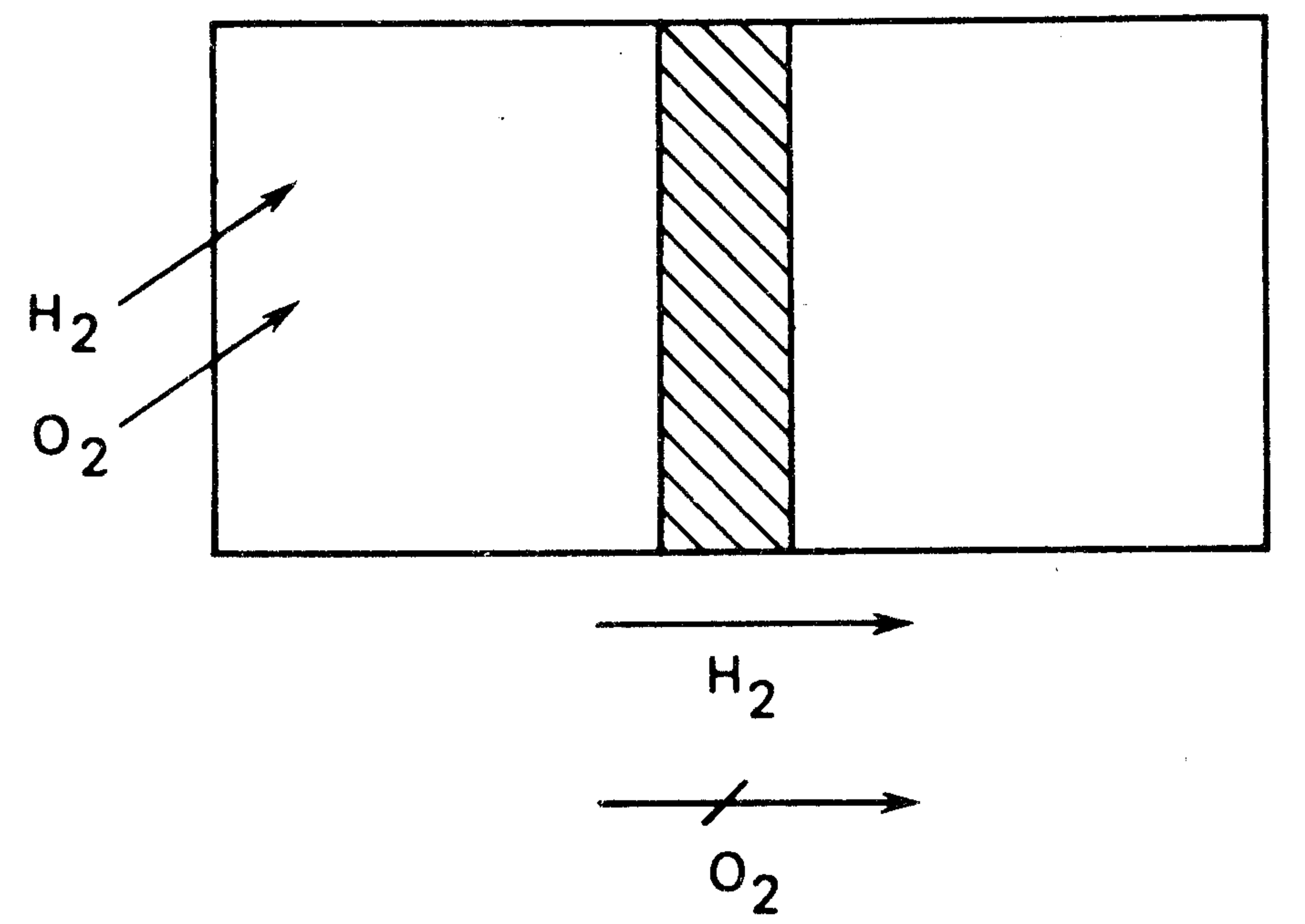


Рис. 8.8.

Этот объем газа проходит через сечение S за время τ, следовательно

$$V = vS\tau,$$

откуда

$$v = \frac{V}{S\tau} = \frac{mRT}{MPS\tau},$$

$$v = \frac{2,5 \cdot 8,31 \cdot 290}{0,044 \cdot 5 \cdot 10^5 \cdot 6 \cdot 10^{-4} \cdot 300} \frac{\text{м}}{\text{с}} = 1,52\,\text{м/с}.$$

Проверим размерность полученного результата:

$$[v] = \frac{\text{кг} \cdot (\text{Дж/моль} \cdot \text{К}) \cdot \text{К}}{(\text{кг/моль}) \cdot (\text{Н/м}^2)\text{м}^2 \cdot \text{с}} = \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

Задача 9. Сосуд разделен пополам полунепроницаемой перегородкой (рис. 8.8), пропускающей водород и не пропускающей кислород. В правую половину сосуда впускает 36 г кислорода и 4 г водорода. Объем сосуда 20 л, температура 27°С. Определить давление в левой и правой половинах сосуда, когда установится равновесие.

Дано: $m_1 = 36\,\text{г}\,(0,036\,\text{кг})$, $m_2 = 4\,\text{г}\,(0,004\,\text{кг})$, $M_1 = 0,032\,\text{кг/моль}$, $M_2 = 0,002\,\text{кг/моль}$, $V = 20\,\text{л}\,(2 \cdot 10^{-2}\,\text{м}^3)$, $t = 27°\text{C}\,(T = 300\,\text{К})$; P_1 — ? P_2 — ?

Решение. В левой половине сосуда будут находиться кислород и водород, в правой только водород (из условия полупроницаемости перегородки). Давление в левой половине сосуда, согласно закону Дальтона, равно

$$P_1 = P_\text{H} + P_\text{O},$$

где P_H — парциальное давление водорода, равное

$$P_\text{H} = (m_2/M_2)(RT/V),$$

P_O — парциальное давление кислорода, равное

$$P_\text{O} = (m_1/M_1)(RT/V/2),$$

откуда

$$P_1 = (RT/V)\left(\frac{m_2}{M_2} + \frac{2m_1}{M_1}\right),$$

$$[P] = \frac{\text{Дж} \cdot \text{К}}{\text{моль} \cdot \text{К} \cdot \text{м}^3}\left(\frac{\text{кг}}{\text{кг/моль}} + \frac{\text{кг}}{\text{кг/моль}}\right) = \text{Па},$$

$$P_1 = \frac{8,31 \cdot 300}{2 \cdot 10^{-2}} \left(\frac{0,004}{0,002} + \frac{0,064}{0,032} \right) \text{Па} = 4,96 \cdot 10^5 \,\text{Па}.$$

Давление в правой половине сосуда определяется только парциальным давлением водорода:

$$P_2 = P_{\text{H}} = \frac{m_2}{M_2} \frac{RT}{V}, \quad P_2 = 2,48 \cdot 10^5 \text{Па}.$$

Задача 10. Во сколько раз изменится подъемная сила воздушного шара, если наполняющий его гелий заменить водородом? Весом оболочки шара пренебречь. Молярная масса воздуха $M = 0,029$ кг/моль.

Дано: $M_{\text{H}} = 0,002$ кг/моль, $M = 0,029$ кг/моль, $M_{\text{He}} = 0,004$ кг/моль; $F_{\text{под H}}/F_{\text{под He}}$ — ?

Решение. На шар действуют две силы: сила тяжести $\mathbf{F}_{\text{т}}$ и сила Архимеда $\mathbf{F}_{\text{выт}}$. Подъемная сила равна

$$F_{\text{под}} = F_{\text{выт}} - F_{\text{т}},$$

где

$$F_{\text{выт}} = \rho V g,$$

ρ — плотность воздуха.

Сила тяжести, действующая на шар, заполненный гелием:

$$F_{\text{т He}} = \rho_{\text{He}} V g,$$

где ρ_{He} — плотность гелия, откуда

$$F_{\text{под He}} = (\rho - \rho_{\text{He}}) V g.$$

Очевидно, что подъемная сила, действующая на шар, заполненный водородом, равна

$$F_{\text{под H}} = (\rho - \rho_{\text{H}}) V g,$$

где ρ_{H} — плотность водорода.

Согласно уравнению Клапейрона — Менделеева, плотность газа (воздуха, гелия, водорода) можно выразить в виде

$$\rho = \frac{M_{\text{эфф}} P}{RT}, \quad \rho_{\text{He}} = \frac{M_{\text{He}} P}{RT}, \quad \rho_{\text{H}} = \frac{M_{\text{H}} P}{RT}.$$

Откуда подъемная сила, действующая на шар, заполненный гелием:

$$F_{\text{под He}} = \frac{(M_{\text{эфф}} - M_{\text{He}}) P V g}{RT},$$

а для шара, заполненного водородом:

$$F_{\text{под H}} = \frac{(M_{\text{эфф}} - M_{\text{H}}) P V g}{RT}.$$

Окончательно

$$\frac{F_{\text{под H}}}{F_{\text{под He}}} = \frac{M_{\text{эфф}} - M_{\text{H}}}{M_{\text{эфф}} - M_{\text{He}}}, \quad \frac{F_{\text{под H}}}{F_{\text{под He}}} = \frac{0,029 - 0,002}{0,029 - 0,004} = \frac{27}{25}.$$

Задача 11. На дне цилиндра, заполненного воздухом, лежит полый стальной шарик радиусом 2 см, массой 0,5 г. До какого минимального давления надо

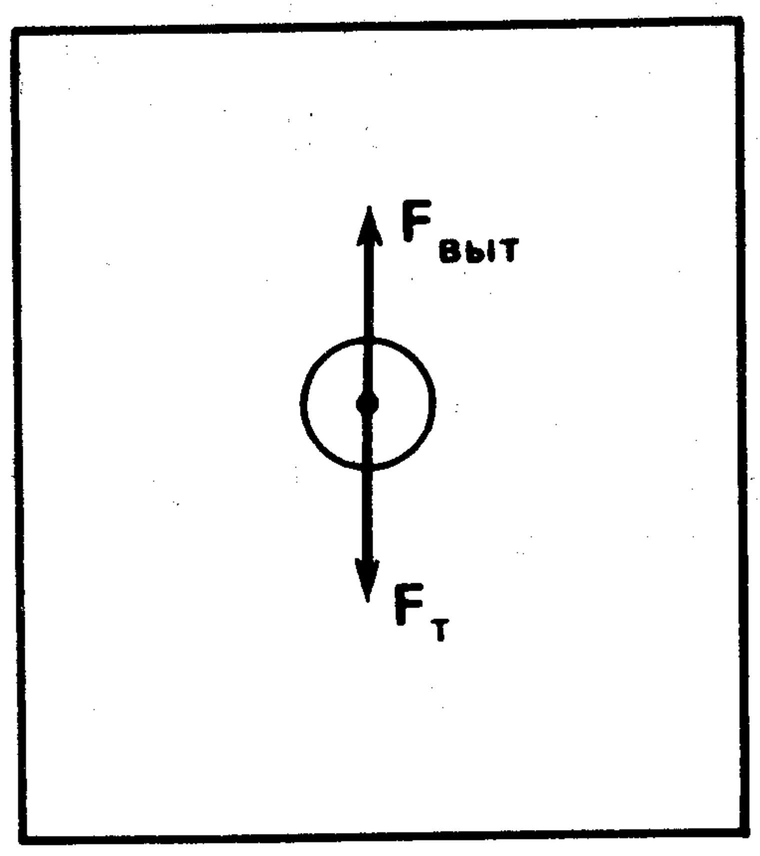


Рис. 8.9.

сжать газ, чтобы шарик поднялся вверх? Температура воздуха 20°С, молекулярная масса 0,029 кг/моль.

Дано: $r = 2\,\text{см}\,(2 \cdot 10^{-2}\,\text{м})$, $m = 0,5\,\text{г}\,(5 \cdot 10^{-4}\,\text{кг})$, $t° = 20°\text{C}\,(T = 293\,\text{К})$, $M_{эфф} = 0,029\,\text{кг/моль}$; P — ?

Решение. На шарик действуют две силы: сила тяжести $\mathbf{F}_т = m\mathbf{g}$ и выталкивающая сила $\mathbf{F}_{выт}$ (рис. 8.9). Шарик начнет подниматься вверх, если

$$F_{выт} \geq mg. \tag{8.13}$$

Выталкивающая сила $F_{выт}$ равна

$$F_{выт} = \rho V g,$$

где ρ — плотность воздуха в цилиндре, V — объем шарика, равный $(4/3)\pi r^3$.

Плотность воздуха ρ можно определить из уравнения Клапейрона — Менделеева:

$$\rho = PM_{эфф}/RT. \tag{8.14}$$

Подставив (8.14) в (8.13), получим

$$\frac{PM_{эфф}}{RT}\frac{4}{3}\pi r^3 \geq m,$$

откуда

$$P \geq \frac{3RTm}{4M_{эфф}\pi r^3},$$

$$[P] = \frac{(\text{Дж/моль} \cdot \text{К})\text{К} \cdot \text{кг}}{\text{кг/моль} \cdot \text{м}^3} = \text{Па},$$

$$P = \frac{3 \cdot 8,31 \cdot 293 \cdot 5 \cdot 10^{-4}}{4 \cdot 0,029 \cdot 3,14 \cdot 8 \cdot 10^{-6}}\text{Па} = 1,25 \cdot 10^6\text{Па}.$$

Задача 12. За сколько ходов поршня с рабочим объемом V можно понизить давление в сосуде объемом V_0 от атмосферного P_0 до P?

Дано: V, V_0, P_0, P; n — ?

Решение. В первый момент давление в рабочем объеме поршня практически равно нулю. Поршень начинает двигаться вверх, открывается клапан, соединяется рабочий объем поршня с объемом сосуда, и газ занимает объем $V + V_0$, давление понижается. Когда поршень идет вниз, рабочий объем изолирован от сосуда и газ удаляется из него. При первом ходе поршня газ расширяется и объем его $V + V_0$, давление газа понижается до P_1. Газ расширяется изотермически согласно закону Бойля — Мариотта:

$$P_0V_0 = P_1(V_0 + V).$$

Давление газа в сосуде становится равным

$$P_1 = P_0V_0/(V_0 + V).$$

При втором ходе давление газа становится равным P_2 и определяется уравнением

$$P_1V_0 = P_2(V_0 + V),$$

$$P_2 = P_1\left(\frac{V_0}{V_0 + V}\right) = P_0\left(\frac{V_0}{V_0 + V}\right)^2.$$

Очевидно, после n ходов давление в сосуде становится равным

$$P_n = P_0\left(\frac{V_0}{V + V_0}\right)^n.$$

Примем P_n равным конечному давлению: $P_n = P$

$$\frac{P}{P_0} = \left(\frac{V_0}{V + V_0}\right)^n.$$

Прологарифмировав, получим

$$\lg(P/P_0) = n\lg[V_0/(V + V_0)],$$

окончательно,

$$n = \lg(P/P_0)/\lg[V_0/(V + V_0)].$$

Задача 13. На дне озера глубиной 20 м температура воды 7°С, на поверхности 25°С. Атмосферное давление 10^5Па. Пузырек воздуха, имеющий объем 1 мм^3, медленно поднимается со дна. Чему равен его объем у поверхности воды?

Дано: $h = 20\,\text{м}$, $t_1^\circ = 7^\circ\text{C}\,(T_1 = 280\,\text{K})$, $t_2^\circ = 25^\circ\text{C}\,(T_2 = 298\,\text{K})$, $P_{\text{атм}} = 10^5\,\text{Па}$, $V_1 = 1\,\text{мм}^3\,(10^{-9}\,\text{м}^3)$, $\rho = 1000\,\text{кг/м}^3$; V_2 — ?

Решение. Так как масса воздуха в пузырьке неизменна, то воздух в пузырьке подчиняется закону Клапейрона:

$$P_1V_1/T_1 = P_2V_2/T_2, \tag{8.15}$$

где P_1, V_1, T_1 — параметры воздуха в пузырьке на дне озера, P_2, V_2, T_2 — параметры на поверхности воды. На глубине h давление воздуха в пузырьке $P_1 = P_{\text{атм}} + \rho gh$, а на поверхности воды $P_2 = P_{\text{атм}}$. Подставляя выражения для P_1 и P_2 в (8.15), получим

$$\frac{(P_{\text{атм}} + \rho gh)V_1}{T_1} = \frac{P_{\text{атм}}V_2}{T_2},$$

откуда

$$V_2 = \frac{(P_{\text{атм}} + \rho gh)T_2V_1}{T_1P_{\text{атм}}}.$$

Окончательно

$$[V] = \frac{[\text{Па} + (\text{кг/м}^3)(\text{м/с}^2)\cdot\text{м}]\cdot\text{К}\cdot\text{м}^3}{\text{К}\cdot\text{Па}} = \text{м}^3.$$

$$V_2 = \frac{(10^5 + 10^3\cdot 9,8\cdot 20)\cdot 298\cdot 10^{-9}}{280\cdot 10^5}\text{м}^3 = 3\cdot 10^{-9}\text{м}^3.$$

Задача 14. В комнате объемом 64 м^3 находится воздух при 17°C? Какая масса воздуха выйдет через форточку, если температура в комнате повышается до 20°C?

Дано: $V = 64\,\text{м}^3$, $t_1^\circ = 17°\text{C}$ $(T_1 = 290\,\text{К})$, $t_2^\circ = 20°\text{C}$ $(T_2 = 293\,\text{К})$, $M = 0,029\,\text{кг/моль}$, $P = 10^5\,\text{Па}$; m — ?

Решение. По условию задачи масса воздуха изменяется, поэтому нельзя пользоваться газовыми законами, но можно записать уравнение Клапейрона — Менделеева для воздуха в комнате при разных температурах:

$$PV = (m_1/M)RT_1, \quad PV = (m_2/M)RT_2,$$

откуда

$$m_1 = \frac{PVM}{RT_1}, \quad m_2 = \frac{PVM}{RT_2}.$$

Следовательно,

$$m = m_1 - m_2 = \frac{PVM}{R}\left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2}\right),$$

$$[m] = \frac{\text{Па}\cdot\text{м}^3\cdot\text{кг/моль}}{\text{Дж/моль}\cdot\text{К}}\left(\frac{1}{\text{К}} - \frac{1}{\text{К}}\right) = \text{кг},$$

$$m = \frac{10^5\cdot 64\cdot 0,029}{8,31}\left(\frac{1}{290} - \frac{1}{293}\right)\text{кг} = 0,79\,\text{кг}.$$

Задача 15. Начертите график зависимости плотности газа от температуры при изобарном процессе и зависимости плотности газа от давления при изотермическом процессе, $m = \text{const}$.

Решение. Согласно уравнению Клапейрона — Менделеева

$$PV = (m/M)RT.$$

Плотность газа $\rho = m/V$, откуда $\rho = PM/RT$. Если $P = \text{const}$, то $\rho = C_1/T$, где

$$C_1 = PM/R = \text{const}.$$

Следовательно, зависимость $\rho(T)$ имеет вид гиперболы (рис. 8.10). Если $T = \text{const}$, то $\rho = C_2P$, где $C_2 = M/RT$, следовательно, плотность изменяется по линейному закону (рис. 8.11).

Задачи для самостоятельного решения

Задача 1. Два сосуда соединены трубкой с краном. В первом сосуде находится 2 кг некоторого газа под давлением $4\cdot 10^5$ Н/м^2, а во втором 3 кг того же газа. Определить, каким было давление во втором сосуде, если после открытия крана

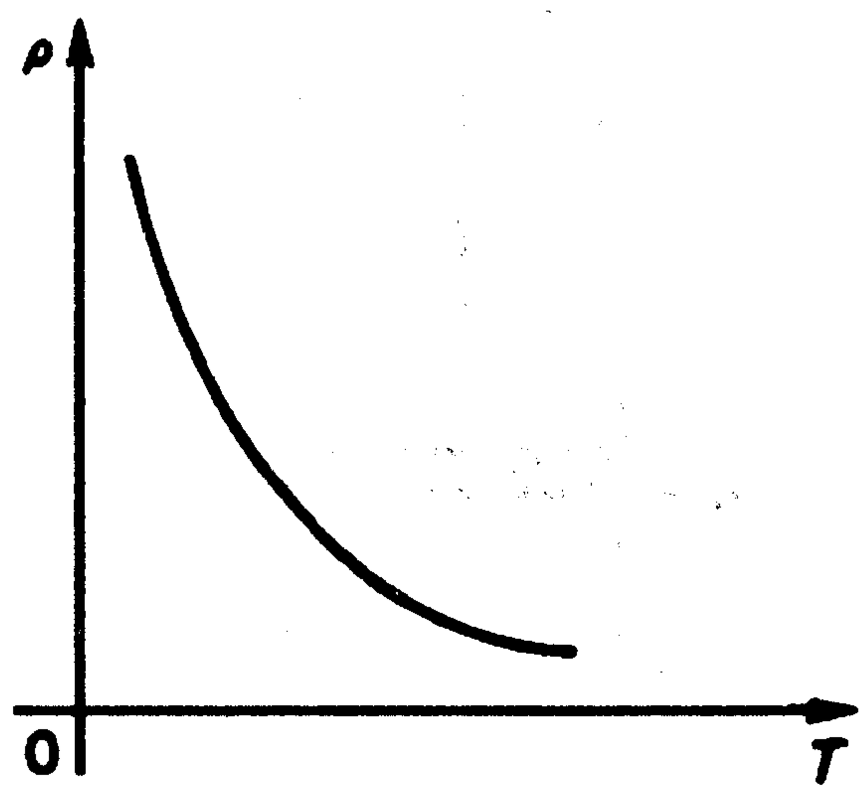


Рис. 8.10.

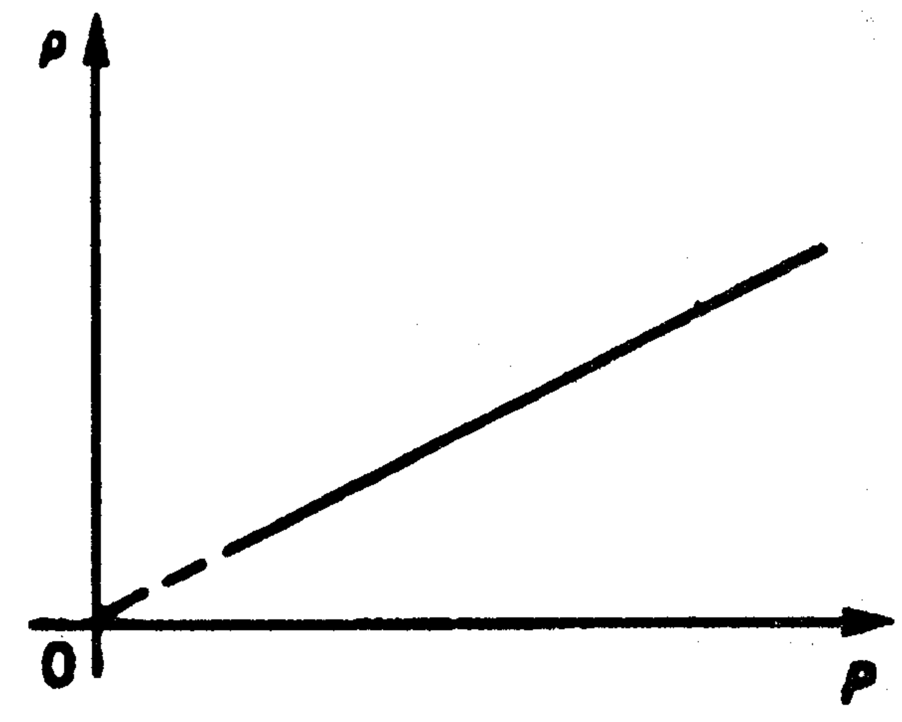


Рис. 8.11.

в обоих сосудах установится давление $P = 6 \cdot 10^5$ Н/м^2. Температура остается постоянной.

Ответ: $P_2 = 9 \cdot 10^5$Н/м^2.

Задача 2. В сосуде объемом 10 л находится 20 г кислорода при температуре 27°С. Чему равно давление в сосуде?

Ответ: $P = 1,56 \cdot 10^5$ Па.

Задача 3. Определить плотность водорода при $t° = 27$°С и атмосферном давлении.

Ответ: 0,081 кг/м^3.

Задача 4. Газ перешел из состояния 1 в состояние 2 (рис. 8.12). Масса газа остается постоянной. Как изменился объем газа?

Ответ: увеличился.

Задача 5. Объем некоторой массы идеального газа при нагревании на 1 К при постоянном давлении увеличился на 1/335 часть первоначального объема. Какова исходная температура газа?

Ответ: $T_1 = 335$ К.

Задача 6. В стеклянную монометрическую трубку, запаянную с одного конца, налита вода. Уровень воды в обоих коленах одинаковый и находится на расстоянии h_0 от верхнего конца. В открытую трубку налит слой масла (плотность $\rho_м$) высотой h. Найдите смещение уровня воды в закрытой трубке при атмосферном давлении $P_{атм}$.

Ответ:

$$x = \frac{[P_{атм} + g(2\rho_в h_0)] - \sqrt{[P_{атм} + g(2\rho_в h_0 + \rho_1 h)]^2 - 8g^2\rho_в\rho_м h_0 h}}{4g\rho_в}.$$

Задача 7. Воздух в подводной лодке на поверхности воды имеет температуру 35°С и давление 10^5 Па. Пренебрегая изменением объема корпуса лодки, определите давление воздуха при ее погружении в слой воды, где температура воздуха в корпусе становится равной 5°С.

Ответ: $0,9 \cdot 10^5$ Па.

Задача 8. Теплоизолированный сосуд разделен теплопроводящей перегородкой на две камеры. Камеры заполняются одинаковым газом, начальная температура и давление которых равны T_1, P_1, T_2 и P_2. Каково будет отношение давлений газа в камерах после того, как теплообмен закончится? Теплоемкостью сосуда и перегородки пренебречь.

Ответ: T_2P_1/T_1P_2.

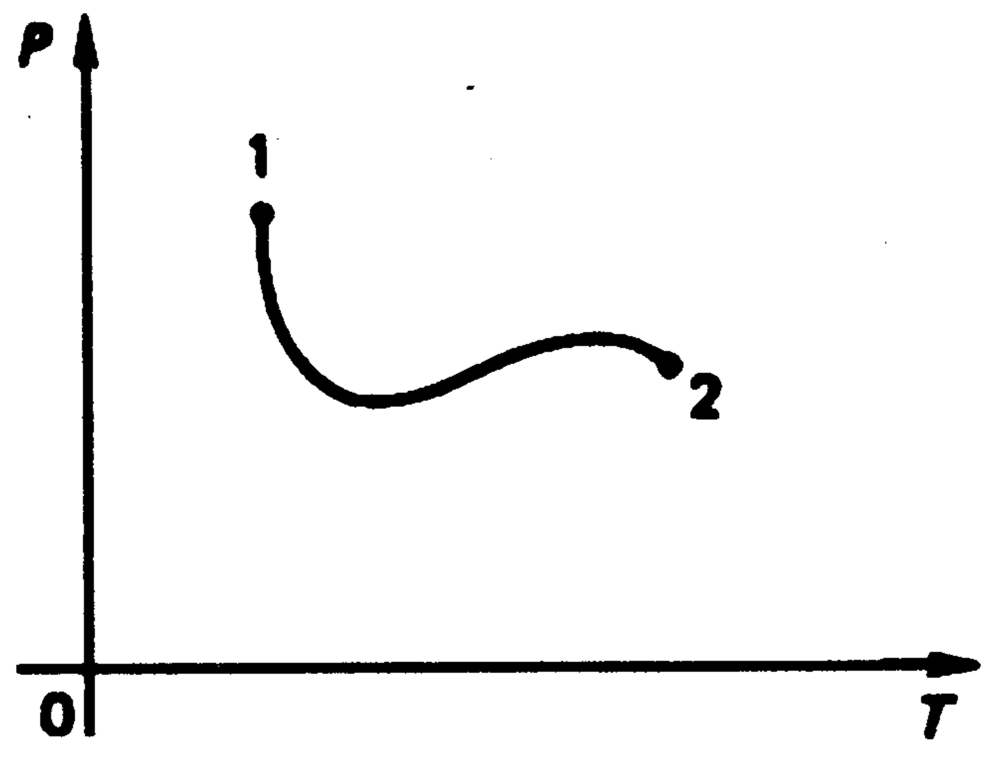


Рис. 8.12.

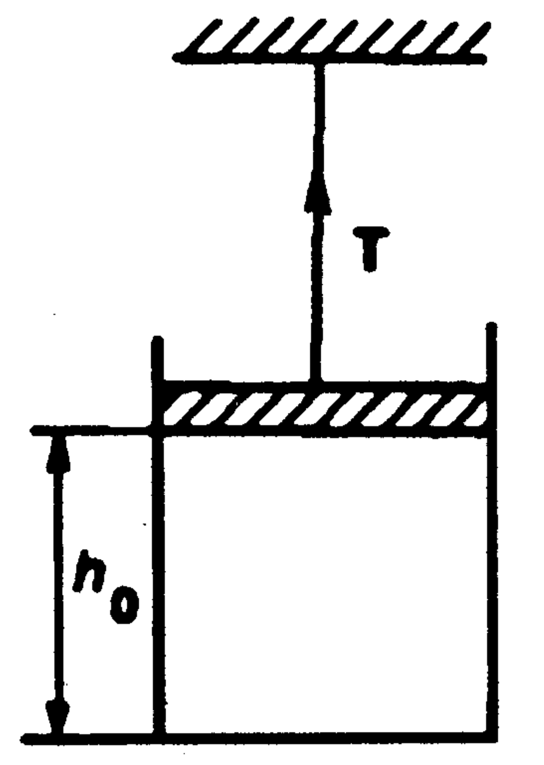


Рис. 8.13.

Задача 9. Газ находится в сосуде при давлении $P = 2 \cdot 10^6$ Па и температуре $t° = 27°$C. После нагревания на 50°C в сосуде осталась половина газа. Определить установившееся давление.

Ответ: $1,16 \cdot 10^6$ Па.

Задача 10. По трубе идет углекислый газ под давлением 4 атм. Какова температура газа в трубе, если за 10 мин протекает 2 кг углекислого газа и площадь сечения трубы 5 см^2? Молекулярная масса углекислого газа 0,044 кг/моль. Скорость движения газа $v = 0,88$ м/с.

Ответ: $T = 280$ K.

Задача 11. Первоначальный объем газа в цилиндре при давлении 120 кПа равен 0,1 м^3. Затем его нагрели до температуры 687 К при прежнем давлении. В результате часть газа вышла из цилиндра. Определите, сколько молей газа осталось в цилиндре.

Ответ: $\simeq 2,1$ моля.

Задача 12. В цилиндрическом сосуде, закрытом подвижным поршнем, находится 1 л воздуха. Масса поршня 700 г, площадь поршня 50 см^2. Какой объем займет воздух в цилиндре, если на поршень положить гирю массой 10 кг? Атмосферное давление 10^5 Па.

Ответ: 835 см^3.

Задача 13. Смесь газов из 3 г водорода, 28 г азота и 10 г углекислого газа заключают в замкнутый объем 30 литров при температуре 27°C. Определить давление смеси газов в этом объеме.

Ответ: $2,3 \cdot 10^5$ Па.

Задача 14. Три баллона соединены трубками с краном. В первом баллоне объемом V_1 находится газ под давлением P_1, во втором — V_2 под давлением P_2, третий объемом V_3 пустой. Определите, какое установится давление после открытия обоих кранов.

Ответ:

$$P = \frac{P_1V_1 + P_2V_2}{V_1 + V_2 + V_3}.$$

Задача 15. В цилиндре под невесомым поршнем находится газ под давлением P, равным внешнему давлению. Снаружи к поршню прикреплена упругая пружина, такая, что если газ из-под поршня полностью откачать, то поршень будет находиться в равновесии у дна цилиндра. Во сколько раз нужно увеличить температуру газа под поршнем, чтобы его объем увеличился в полтора раза?

Ответ: в 2,25 раз.

Задача 16. Резиновый мяч содержит 4 л воздуха, находящегося при температуре 20°C при атмосферном давлении 780 мм рт. ст. Какой объем займет воздух, если мяч будет опущен в воду на глубину 10 м? Температура воды 4°C.

Ответ: 1,96 л.

Задача 17. Найти плотность воздуха при температуре 127°C и давлении 720 мм рт. ст. Плотность воздуха при 0°C и давлении 760 мм рт. ст. равна $1,29\,кг/м^3$.

Ответ: $0,83\,кг/м^3$.

Задача 18. Цилиндрический сосуд сечения S закрыт поршнем массы M. Поршень удерживается на расстоянии h_0 от дна веревкой (рис. 8.13), натяжение которой равно T. Веревка обрывается, после чего поршень движется без трения. На каком расстоянии от дна поршень будет иметь наибольшую скорость? Процесс считать изотермическим. Внешнее давление равно P_0.

Ответ:
$$h = h_0 \frac{P_0 - (Mg/S) - (T/S)}{P_0 + (Mg/S)}.$$

Глава 9

Молекулярно-кинетическая теория газов

Остановимся на общих свойствах молекул газа.

1) Молекула — наименьшая частица вещества, состоящая из атомов и обладающая его основными химическими свойствами. Размеры молекул тем больше, чем больше число атомов в них, и лежат в пределах от 10^{-8} до 10^{-5}см.

2) Молекулы газа находятся в непрерывном хаотическом движении. Слово "хаотическое" показывает, что не существует избранного, преимущественного направления движения молекул, все направления равновероятны.

Хаотическое движение молекул подтверждаются в частности *броуновским движением* — движением очень маленьких частиц, находящихся во взвешенном состоянии в жидкости или газе, под действием ударов молекул, и *диффузией* — проникновением молекул одного вещества в другое. (Например, диффузией обусловлено распространение запахов.)

3) Скорости молекул различны по величине. Одним из опытов, подтверждающих это, является опыт Штерна, в котором использовались два коаксиальных цилиндра радиусами R_1 и R_2, причем внутренний цилиндр имел узкую щель (рис. 9.1). На оси симметрии помещалась посеребренная платиновая проволока. При пропускании тока через проволоку она нагревалась и происходило испарение атомов серебра с поверхности проволоки. На внутренней поверхности внешнего цилиндра появлялся слой серебра в виде тонкой полоски. При вращении цилиндров эта полоска должна была смещаться. Если бы скорости атомов были одинаковы и равны v, то время, за которое атомы проходили бы расстояние $R_2 - R_1$, равнялось бы времени поворота цилиндра на угол $\Delta\varphi$, т. е.

$$\Delta\varphi/\omega = (R_2 - R_1)/v, \tag{9.1}$$

причем слой должен смещаться на $\Delta s = R_2\Delta\varphi$. Из (9.1) следует, что

$$v = (R_2 - R_1)\omega/\Delta\varphi. \tag{9.1a}$$

Таким образом можно определить скорость атомов. Однако след оказался размытым, это означает, что атомы имеют разные скорости.

Одной из основных задач молекулярной физики является установление связи микропараметров газа (скорости молекул, их массы, концентрации) с макропараметрами (давлением, температурой). Объясним, что такое *давление* газа, как оно возникает с точки зрения молекулярной физики. Молекулы ударяются о стенки сосуда и взаимодействуют с ними по закону абсолютно упругого удара.

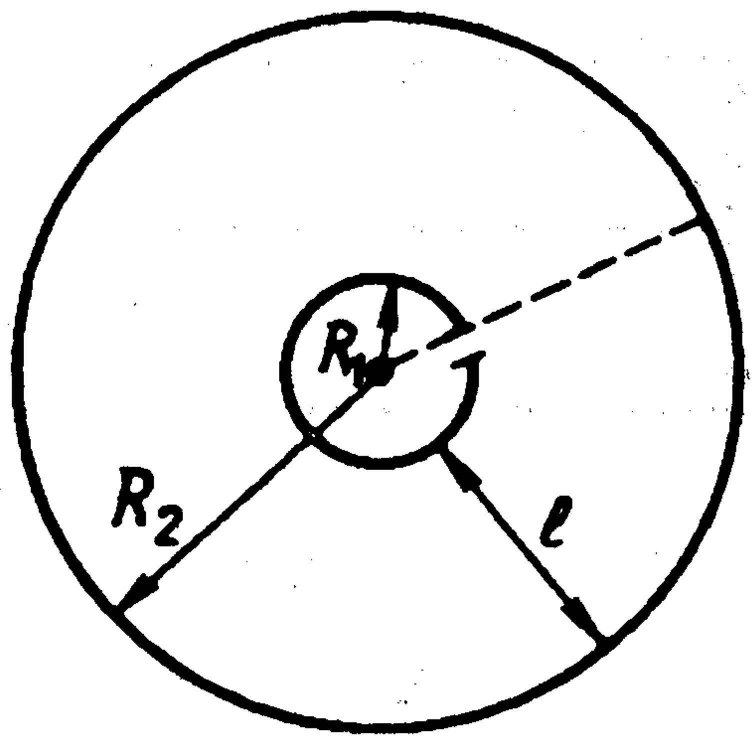


Рис. 9.1.

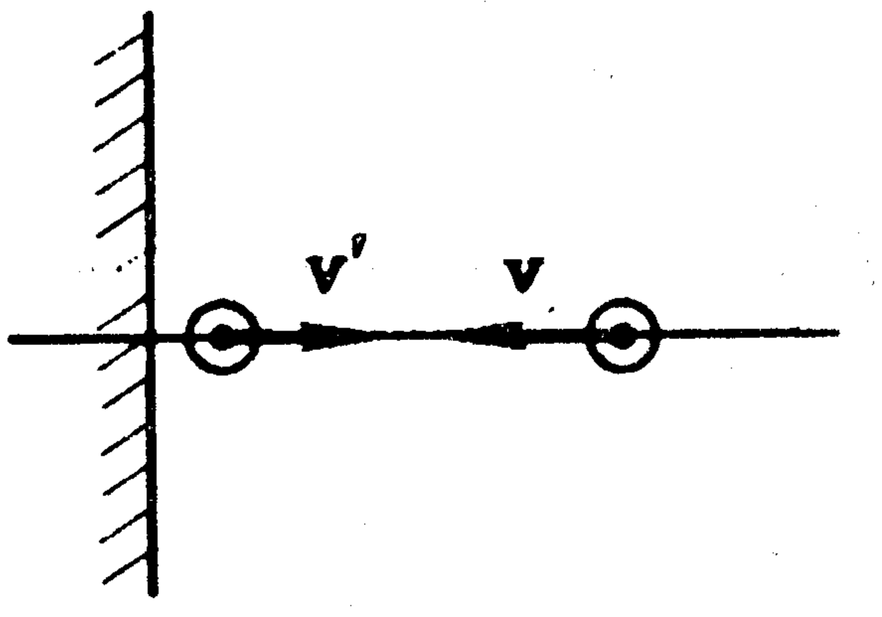


Рис. 9.2.

В результате удара молекула массой m_0, летевшая к стенке со скоростью v, отскакивает от стенки со скоростью v', причем, поскольку удар абсолютно упругий, $v = v'$ (рис. 9.2). Изменение импульса молекулы

$$\Delta p' = p' - p = m_0 v' - (-m_0 v) = 2 m_0 v.$$

Импульс молекулы изменился, это означает, что на молекулу со стороны стенки подействовал импульс силы, по 2-му закону Ньютона равный

$$f' \Delta t_0 = 2 m_0 v,$$

где Δt — время взаимодействия молекулы со стенкой, Δt мало.

По 3-му закону Ньютона на стенку со стороны молекулы подействовал импульс, равный по величине и противоположный по направлению:

$$f_{\text{ст}} \Delta t_0 = -2 m_0 v.$$

Следовательно, давление возникает в результате толчков, которые испытывает стенка со стороны молекул. Сила давления перпендикулярна стенке сосуда. Если молекула летит под углом к стенке, то, как следует из рис. 9.3, изменение проекции импульса на ось x есть $\Delta p_x = 2 m_0 v_x$, изменение проекции импульса на ось y есть $\Delta p_y = 0$. Следовательно,

$$f_x \Delta t_0 \neq 0, \quad f_y \Delta t = 0,$$

т. е. в результате удара независимо от того, как летит молекула, на стенку действует сила, направленная перпендикулярно стенке.

Вывод основного уравнения молекулярно-кинетической теории

Сделаем ряд вспомогательных предположений:

1) Газ идеальный (определение идеального газа см. в гл. 8),

2) Молекулы можно разделить на группы. Пусть N_1 молекул имеют скорость v_1, N_2 — скорость $v_2, \ldots, N_n$ — скорость v_n. Концентрация молекул первой группы $n_1 = N_1/V$, второй — $n_2 = N_2/V$, $n_n = N_n/V$, где V — объем сосуда. Очевидно $N_1 + N_2 + \ldots + N_n = N$, где N — общее число молекул,

$$n_1 + n_2 + \ldots + n_n = n,$$

где n — концентрация молекул в сосуде. Это предположение, строго говоря, неверно, так как в силу непрерывного хаотического движения число молекул,

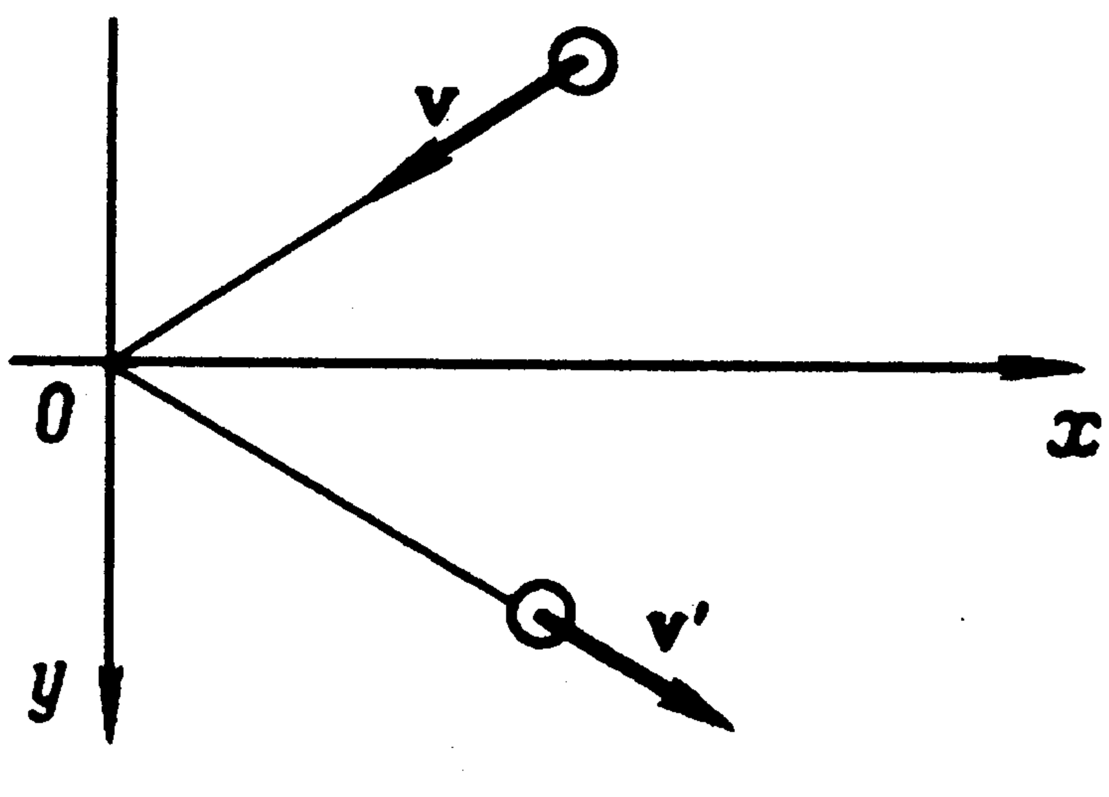


Рис. 9.3.

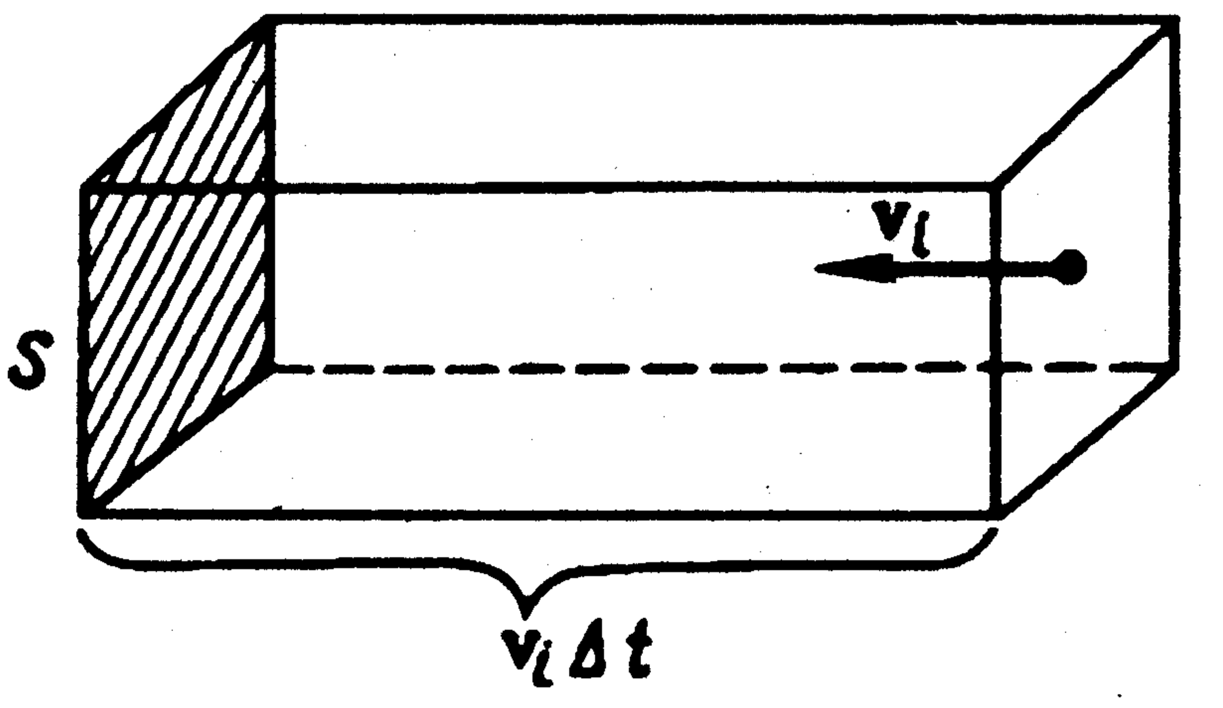


Рис. 9.4.

имеющих данную скорость, может непрерывно изменяться. Можно указать число молекул, скорости которых изменяются в некотором интервале скоростей, например, ΔN_1 молекул, скорости которых изменяются от v_1 до $v_1 + v_2$, ΔN_2 молекул, скорости которых изменяются в пределах от v_2 до $v_2 + \Delta v$ и т. д. Однако при выводе основного уравнения молекулярно-кинетической теории некорректность этого предположения не играет существенной роли.

3) Направления движения молекул равновероятны. Пусть молекулы движутся по трем взаимно-перпендикулярным направлениям. В среднем в каждом направлении движется $N/6$ частиц.

Рассмотрим молекулы i-й группы, движущиеся вдоль оси x. В результате удара о стенку одной молекулы этой группы на стенку действует импульс силы:

$$f_{\text{ст}i}\Delta t_0 = 2m_0v_i.$$

За некоторый промежуток времени Δt о стенку площадью S ударится не одна молекула, а Z_i молекул:

$$Z_i = n_iSv_i\Delta t/6,$$

т. е. все молекулы, движущиеся по направлению к стенке (т. е. 1/6) и находящиеся в объеме $Sv_i\Delta t$ (рис. 9.4).

Итак, средний импульс силы, подействовавший на стенку в результате удара о нее молекул i-й группы, за время Δt равен:

$$F_i\Delta t = (2/6)n_iSm_0v_i^2\Delta t.$$

Давление равно $P = F/S$, отсюда давление на стенку, оказываемое молекулами i-группы, есть

$$P_i = F_i/S = n_im_0v_i^2/3.$$

На стенку налетают молекулы всех групп, следовательно, суммарное давление равно

$$P = (1/3)m_0\sum_i n_iv_i^2.$$

Введем понятие средне-квадратичной скорости:

$$v^2_{\text{ср кв}} = \frac{N_1v_1^2 + N_2v_2^2 + \ldots + N_nv_n^2}{N}.$$

Разделим числитель и знаменатель на объем сосуда:

$$v^2_{\text{ср кв}} = \frac{n_1v_1^2 + n_2v_2^2 + \ldots + n_nv_n^2}{n} = \sum_i \frac{n_iv_i^2}{n},$$

откуда

$$P = nm_0 v^2_{\text{ср кв}}/3. \tag{9.2}$$

Средняя кинетическая энергия молекулы равна

$$\overline{E} = m_0 v^2_{\text{ср кв}}/2, \tag{9.3}$$

таким образом,

$$P = (2/3)n\overline{E} \tag{9.4}$$

есть основное уравнение молекулярно-кинетической теории. Давление газа пропорционально концентрации молекул и средней кинетической энергии поступательного движения молекулы.

Из уравнения Клапейрона — Менделеева следует:

$$P = nkT. \tag{9.5}$$

Приравняем выражения (9.4) и (9.5) и получим для $\overline{E}$:

$$\overline{E} = (3/2)kT. \tag{9.6}$$

Абсолютная температура — мера кинетической энергии поступательного движения молекул. Если $T \to 0$, то $\overline{E} \to 0$. *Абсолютный нуль температуры* — это температура, при которой прекращается поступательное движение молекул. Для одноатомного газа формула (9.6) определяет полную механическую энергию молекулы.

Выразим средне-квадратичную скорость через T:

$$v_{\text{ср кв}} = \sqrt{3kT/m_0}.$$

Если бы все молекулы газа двигались со средне-квадратичной скоростью, то давление и температура такого газа были бы такими же, как у реального газа. Средне-квадратичная скорость определяет термодинамические параметры — давление и температуру.

Примеры решения задач

Задача 1. Вычислить массу молекулы воды ($M_{H_2O} = 0,018$ кг/моль).

Дано: $M_{H_2O} = 0,018$ кг/моль, $N_A = 6,02 \cdot 10^{23}$ моль$^{-1}$; m_{H_2O} — ?

Решение. Масса молекулы равна отношению молярной массы к числу Авогадро:

$$m_{H_2O} = \frac{M_{H_2O}}{N_A} = \frac{0,018}{6,02 \cdot 10^{23}}\text{кг} = 3 \cdot 10^{-26}\text{кг}.$$

Задача 2. В опыте Штерна (см. введение) источник атомов серебра создает узкий пучок, который падает на внутреннюю поверхность неподвижного цилиндра радиуса $R = 30$ см и образует на ней пятно. Цилиндр начинает вращаться с угловой скоростью $\omega = 100$ рад/с. Определить скорость атомов серебра, если пятно отклонилось на угол $\varphi = 0,314$ рад от первоначального положения.

Дано: $R = 30$ см (0,3 м), $\omega = 100$ рад/с, $\varphi = 0,314$ рад; v — ?

Решение. Согласно (9.1),

$$v = \frac{R\omega}{\varphi} = \frac{0,3 \cdot 100 \cdot 3,14}{0,314}\frac{\text{м}}{\text{с}} = 300\,\text{м/с}.$$

Задача 3. Оцените число молекул воздуха N, попадающих на $1\,\text{см}^2$ стены комнаты за 1 с. Давление $P_{\text{атм}} = 1\cdot 10^5\,\text{Па/м}^2$, $t^\circ = 27^\circ\text{C}$, масса моля воздуха $M = 0{,}029$ кг/моль.

Дано: $S = 1\,\text{см}^2\,(1\cdot 10^{-4}\,\text{м}^2), t = 1\,\text{с}, P_{\text{атм}} = 1\cdot 10^5\,\text{Па/м}^2, t = 27^\circ\text{C}; T = 300\,\text{К}$; N — ?

Решение. Согласно уравнению Клапейрона — Менделеева,

$$P = nkT.$$

Следовательно, концентрация молекул воздуха

$$n = P/kT.$$

Число молекул, ударяющихся о стенку за 1 с, есть

$$N = nv_{\text{ср кв}}S/6,$$

Средне-квадратичная скорость равна

$$v_{\text{ср кв}} = \sqrt{3RT/M}.$$

Окончательно:

$$N = \frac{P}{kT}\frac{1}{6}\sqrt{\frac{3RT}{M}}S = \frac{P}{6}\sqrt{\frac{3R}{TM}}S,$$

$$[N] = \frac{\text{Па}}{\text{Дж/К}}\sqrt{\frac{\text{Дж}}{\text{моль}\cdot\text{К}\cdot\text{К}\cdot\text{кг/моль}}}\text{м}^2 = \frac{1}{\text{с}},$$

$$N = \frac{1\cdot 10^5}{6\cdot 1{,}38\cdot 10^{-23}}\sqrt{\frac{3\cdot 8{,}31}{300\cdot 0{,}029}}10^{-4} = 2\cdot 10^{23}\text{с}^{-1}.$$

Задача 4. Определить плотность кислорода ρ_{O} при давлении $2\cdot 10^5$ Па, если средне-квадратичная скорость его молекул равна $1\cdot 10^3$ м/с.

Дано: $P = 2\cdot 10^5\,\text{Па}, v_{\text{ср кв}} = 1\cdot 10^3\,\text{м/с}; \rho_{\text{O}}$ — ?

Решение.

$$P = nm_{\text{O}}v^2_{\text{ср кв}}/3,$$

где n — концентрация молекул. Очевидно, что $\rho = m_{\text{O}}n$, где m_{O} — масса молекулы. Окончательно имеем:

$$P = \rho_{\text{O}}v^2_{\text{ср кв}}/3,$$

или

$$\rho_{\text{O}} = \frac{3P}{v^2_{\text{ср кв}}}; \quad [\rho] = \frac{\text{Па}}{\text{м}^2/\text{с}^2} = \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}.$$

Вычислим значение плотности:

$$\rho_{\text{O}} = \frac{3\cdot 2\cdot 10^5}{10^6}\frac{\text{кг}}{\text{м}^3} = 0{,}6\,\text{кг/м}^3.$$

Задача 5. Средняя энергия молекулы идеального газа равна $E = 6{,}4\cdot 10^{-21}$Дж. Давление газа $P = 4$ мПа. Найти число молекул газа в единице объема.

Дано: $E = 6{,}4\cdot 10^{-21}\,\text{Дж}, P = 4\,\text{мПа}\,(4\cdot 10^{-3}\,\text{Па}); n$ — ?

Решение. Средняя энергия поступательного движения идеального газа
$$E = (3/2)kT.$$
Давление $P = nkT$, где n — концентрация молекул, k — постоянная Больцмана и T — абсолютная температура газа. Решая совместно эти два уравнения, получаем
$$n = \frac{P}{kT} = \frac{3}{2}\frac{P}{E};$$
$$[n] = \frac{\text{Па}}{\text{Дж}} = \frac{\text{Н}}{\text{м}^2 \cdot \text{Н} \cdot \text{м}} = \frac{1}{\text{м}^3}.$$
Подстановка в расчетную формулу числовых данных задачи дает
$$n = \frac{3 \cdot 4 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 6,4 \cdot 10^{-21}} \frac{1}{\text{м}^3} = 9,38 \cdot 10^{17} \text{м}^{-3}.$$

Задача 6. Два одинаковых сосуда, содержащих одинаковое число молекул азота, соединены краном. В первом сосуде $v_{\text{ср кв}\,1} = 400\,\text{м/с}$, во втором сосуде $v_{\text{ср кв}\,2} = 500$ м/с. Кран открывают. Чему будет равна средне-квадратичная скорость молекул после того, как установится равновесие?

Дано: $v_{\text{ср кв}\,1} = 400\,\text{м/с}$, $v_{\text{ср кв}\,2} = 500\,\text{м/с}$; $v_{\text{ср кв}}$ — ?

Решение. Разные скорости молекул в сосудах объясняются разными температурами азота в них. Так как по условию задачи число молекул, имеющих скорость v_1, равно числу молекул, имеющих скорость v_2 ($N_1 = N_2$), то средне-квадратичная скорость равна
$$v^2_{\text{ср кв}} = \frac{N_1 v_1^2 + N_2 v_2^2}{N_1 + N_2} = \frac{v_1^2 + v_2^2}{2}.$$
Отсюда
$$v_{\text{ср кв}} = \sqrt{\frac{v_1^2 + v_2^2}{2}} \frac{\text{м}}{\text{с}} = 453\,\text{м/с}.$$

Задача 7. Откаченная лампа накаливания объемом $V = 10\,\text{см}^3$ имеет трещину, в которую проникает 10^6 частиц газа за 1 с. Сколько времени понадобится, чтобы в лампе установилось нормальное давление? Температура 0°C.

Дано: $V = 10\,\text{см}^3\,(10^{-5}\,\text{м}^3)$, $N = 10^6\text{с}^{-1}$, $P = 1,013 \cdot 10^5\,\text{Па}$, $T = 273\,\text{К}$; t — ?

Решение. Определим, сколько молекул газа N_0 должно быть в лампе при нормальном давлении: $N_0 = n_0 V$, где n_0 — концентрация молекул, определяемая из уравнения:
$$P = n_0 kT, \quad n_0 = P/kT.$$
Число молекул будет равно
$$N_0 = n_0 V = PV/kT.$$
Следовательно, считая скорость проникновения молекул в сосуд постоянной, определим t:
$$t = N_0/N = PV/kTN,$$
$$t = \frac{1,013 \cdot 10^5 \cdot 10^{-5}}{1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 273 \cdot 10^6}\text{с} = 2,69 \cdot 10^{14}\text{с},$$
$$t = 8,53 \cdot 10^6 \text{лет}.$$

Проверим размерность полученного результата:

$$[t] = \frac{\text{Па} \cdot \text{м}^3}{(\text{Дж/К}) \cdot \text{К} \cdot \text{с}^{-1}} = \frac{\text{кг} \cdot \text{м}^4 \cdot \text{с}^2 \cdot \text{К} \cdot \text{с}}{\text{м} \cdot \text{с}^2 \cdot \text{кг} \cdot \text{м}^3 \cdot \text{К}} = \text{с}.$$

Задача 8. На пути молекулярного пучка, состоящего из молекул кислорода, стоит зеркальная стенка. Найти давление, испытываемое этой стенкой, если скорость молекул в пучке $v = 10^3$ м/с, концентрация $n = 10^{17}\text{м}^{-3}$. Рассмотреть случаи:

1) скорость молекул перпендикулярна стенке;
2) стенка движется навстречу потоку со скоростью $v_{\text{ст}} = 500$ м/с;
3) скорость молекул направлена под углом $60°$ к неподвижной стенке.

Дано: $v = 10^3$ м/с, $n = 10^{17}\,\text{м}^{-3}$, $v_{\text{ст}} = 500$ м/с, $\alpha = 60°$; P — ?

Решение. Давление на стенку обусловлено ударами молекул. В первом случае изменение импульса молекулы равно $2m_0v$, так что на стенку действует импульс силы $f\Delta t = 2m_0v$. За промежуток времени Δt о стенку ударяется $N = n_0v\Delta tS$ молекул, где S — площадь стенки, следовательно, импульс силы, действующий на стенку за Δt, равен

$$f\Delta t = N2m_0v,$$

или

$$f\Delta t = n2m_0v^2S\Delta t.$$

Отсюда

$$P = 2m_0v^2n,$$

$$[P] = \text{кг} \cdot \frac{\text{м}^2}{\text{с}^2} \cdot \frac{1}{\text{м}^3} = \frac{\text{Н}}{\text{м}^2} = \text{Па}.$$

Во втором случае относительно стенки молекула движется со скоростью $v_1' = v + v_{\text{ст}}$. Молекула взаимодействует со стенкой упруго, следовательно, скорость, с которой она отскакивает от стенки, относительно стенки равна

$$v_2' = -v_1'. \qquad (9.6а)$$

Скорость молекулы относительно неподвижной системы отсчета есть u и связана со скоростью v_2':

$$v_2' = v_{\text{ст}} - u.$$

Подставив v_2' в (9.6а), имеем

$$v + v_{\text{ст}} = -v_{\text{ст}} + u,$$

откуда

$$u = v + 2v_{\text{ст}}.$$

Изменение скорости молекулы равно

$$\Delta v = v + 2v_{\text{ст}} - (-v) = 2(v + v_{\text{ст}}).$$

Изменение импульса молекулы равно $2m_0(v + v_{\text{ст}})$, следовательно,

$$P = 2m_0(v + v_{\text{ст}})^2n.$$

В третьем случае скорость молекул направлена под углом α, поэтому при ударе изменяется только x-компонента скорости, $\Delta v_y = 0$ и, соответственно, $f_y\Delta t = 0$. Итак,

$$\Delta P_x = 2m_0v\sin\alpha, \quad f_x\Delta t = 2m_0v\sin\alpha.$$

Очевидно, что

$$f_x\Delta t = n2m_0 v\cos\alpha(v\cos\alpha)S\Delta t = 2m_0 nv^2\cos^2\alpha S\Delta t,$$
$$P = 2nm_0 v^2\cos\alpha.$$

Масса молекулы кислорода равна

$$m_0 = M/N_A,$$

где M — молярная масса, N_A — число Авогадро. Окончательно,

$$1)\quad P = 2\frac{M}{N_A}nv^2 = 2\frac{0,032}{6,02\cdot 10^{23}}\cdot 10^{17}\cdot 2,25\cdot 10^6\,\text{Па} = 0,011\,\text{Па},$$

$$2)\quad P = 2\frac{M}{N_A}n(v+v_c)^2 = 2\frac{0,032}{6,02\cdot 10^{23}}\cdot 10^{17}\cdot 2,25\cdot 10^6\text{Па} = 0,024\,\text{Па},$$

$$3)\quad P = 2\frac{M}{N_A}nv^2\cos^2 60^\circ = 2,7\cdot 10^{-3}\,\text{Па}.$$

Задача 9. Два сосуда, содержащие два разных газа, соединены трубкой с краном. Давление в сосудах P_1 и P_2, число молекул N_1 и N_2. Определить давление в сосудах, если открыть кран. Температура постоянна.

Дано: P_1, P_2, N_1, N_2; P — ?

Решение. Давление в первом сосуде определяется выражением

$$P_1 = nkT,$$

где

$$n_1 = N_1/V_1,$$

следовательно,

$$P_1 = (N_1/V_1)kT, \tag{9.7}$$

а во втором сосуде

$$P_2 = (N_2/V_2)kT. \tag{9.8}$$

Искомое давление в сосудах после того как откроют кран равно

$$P = \frac{N_1+N_2}{V_1+V_2}kT. \tag{9.9}$$

Из (9.7) и (9.8) выразим V_1 и V_2:

$$V_1 = \frac{N_1 kT}{P_1}, \quad V_2 = \frac{N_2 kT}{P_2}$$

и подставим в (9.9). Тогда

$$P = \frac{N_1+N_2}{N_1P_2+N_2P_1}P_1P_2.$$

Задача 10. При комнатной температуре четырехокись азота частично диссоциирует в двуокись азота:

$$N_2O_4 \rightleftharpoons 2NO_2.$$

В сосуд объемом $V = 250\,\text{см}^3$ вводится 0,9 г жидкости N_2O_4 при 0°C. Когда температура возрастает до 27° C жидкость испаряется, а давление становится равным $P = 960$ мм рт. ст. Какая доля x четырехокиси азота при этом диссоциирует?

Дано: $P = 960$ мм рт. ст. $(1,31 \cdot 10^4$ Па$)$, $V = 250$ см^3 $(2,5 \cdot 10^{-4}$ м$^3)$, $m = 0,9$ г $(0,9 \cdot 10^{-3}$ кг$)$, $t_1^\circ = 27°$C, $T = 300$ К, $t_0^\circ = 0°$C, $T_0 = 273$ К, $x\%$ — ?

Решение. Воспользовавшись уравнением состояния идеального газа $P = nkT$, найдем число образовавшихся молекул NO_2:

$$N = nV = PV/kT.$$

Масса молекулы NO_2 равна M/N_A, где M — молярная масса NO_2, равная 0,046 кг/моль. Следовательно, суммарная масса диссоциировавших молекул равна

$$m_1 = \frac{M}{N_A}N = \frac{M}{N_A}\frac{PV}{kT},$$

$$[m] = \frac{(\text{кг/моль}) \cdot (\text{Н/м}^2) \cdot \text{м}^3}{(1/\text{моль}) \cdot (\text{Дж/К}) \cdot \text{К}} = \text{кг},$$

$$m_1 = \frac{0,046 \cdot 1,31 \cdot 10^4 \cdot 2,5 \cdot 10^{-4}}{6,02 \cdot 10^{23} \cdot 1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 300}\text{кг} = 6 \cdot 10^{-5}\text{кг}.$$

Окончательно

$$x\% = \frac{m_1}{m}100\% = \frac{0,06}{0,9}100\% = 6,7\%.$$

Задача 11. С какой скоростью растет толщина покрытия стенки серебром при напылении, если атомы серебра, обладая энергией $E = 10^{-17}$ Дж, производят давление на стенку $P = 0,1$ Па? Атомная масса серебра $A = 1,108$ г/моль, его плотность $\rho = 10,5$ г/см^3.

Дано: $E = 10^{-17}$ Дж, $P = 0,1$ Па, $A = 1,108$ кг/моль, $\rho = 10,5$ г/см^3 $(10,5 \cdot 10^3$ кг/м$^3)$; $\Delta l/\Delta t$ — ?

Решение. Если за время Δt толщина слоя серебра стала равной Δl, то скорость роста толщины покрытия есть $\Delta l/\Delta t$. Объем напыленного слоя $\Delta V = S\Delta l$, где S — площадь поверхности стенки. Этот объем можно выразить иначе:

$$\Delta V = \frac{m}{\rho} = \frac{m_0 N}{\rho},$$

где m — масса серебряного покрытия, напыленного за время Δt, m_0 — масса молекулы, N — число молекул. Определим суммарную массу молекул серебра, осевших на стенку.

Изменение импульса молекулы, осевшей на стенку со скоростью v, равно импульсу силы, подействовавшей на стенку со стороны молекулы:

$$f\Delta t = m_0\Delta v = m_0(0 - v) = -m_0 v.$$

На стенку подействует импульс силы $f_{\text{ст}}\Delta t = +m_0 v$. Если на стенку за время Δt осядет N молекул, то импульс силы, подействовавший на стенку в результате ударов о нее N молекул, будет

$$F\Delta t = N v m_0.$$

Давление на стенку есть $P = F/S$, или

$$P = N v m_0 / S\Delta t. \tag{9.10}$$

Средняя кинетическая энергия молекулы равна

$$\overline{E} = m_0 v^2/2, \quad v = \sqrt{2\overline{E}/m_0}.$$

Подставив выражение для скорости в (9.10), получим

$$P = N\sqrt{2\overline{E}m_0}/S\Delta t.$$

Отсюда имеем

$$N = PS\Delta t/\sqrt{2m_0\overline{E}},$$

$$\Delta l = \frac{m_0 P\Delta t S}{\sqrt{2m_0\overline{E}}\rho S} = \frac{m_0 P\Delta t}{\rho\sqrt{2m_0\overline{E}}},$$

откуда

$$\frac{\Delta l}{\Delta t} = \frac{\sqrt{m_0}P}{\sqrt{2\overline{E}}\rho}. \tag{9.11}$$

Масса атома серебра $m_0 = A/N_A$. Подставив это выражение в (9.11), получим

$$\frac{\Delta l}{\Delta t} = \sqrt{\frac{A}{N_A \cdot 2\overline{E}}}\frac{P}{\rho};$$

$$\left[\frac{\Delta l}{\Delta t}\right] = \sqrt{\frac{\text{кг/моль}}{(1/\text{моль})(\text{кг}\cdot\text{м}^2/\text{с}^2)}}\frac{\text{кг}\cdot\text{м}}{\text{с}^2\cdot\text{м}^2\cdot\text{кг/м}^3} = \frac{\text{м}}{\text{с}},$$

$$\frac{\Delta l}{\Delta t} = 9\cdot 10^{-10}\,\text{м/с}.$$

Задача 10. Кристаллы поваренной соли NaCl кубической системы состоят из чередующихся ионов Na и Cl. Определить наименьшее расстояние между их центрами. Молярная масса поваренной соли $M = 0,0595$ кг/моль, плотность $\rho = 2,2\,\text{г/см}^3$.

Дано: $M = 0,0595\,\text{кг/моль}$, $\rho = 2,2\,\text{г/см}^3\,(2,2\cdot 10^3)$; d — ?

Решение. Объем ячейки кристаллической решетки, в центре которой находится один ион, равен d^3 (рис. 9.5). Таким образом, отношение объема вещества к объему, занимаемому одним ионом, равно числу ионов в этом веществе. Число ионов в 1 м^3 равно

$$N = (\rho/M)N_A.$$

Следовательно, объем, занимаемый одним ионом, есть

$$d^3 = M/\rho N_A.$$

Окончательно имеем

$$d = (M/\rho N_A)^{1/3} = \left(\frac{0,0595}{2,2\cdot 10^3\cdot 6,02\cdot 10^{23}}\right)^{1/3} = 3,5\cdot 10^{-8}\,\text{см}.$$

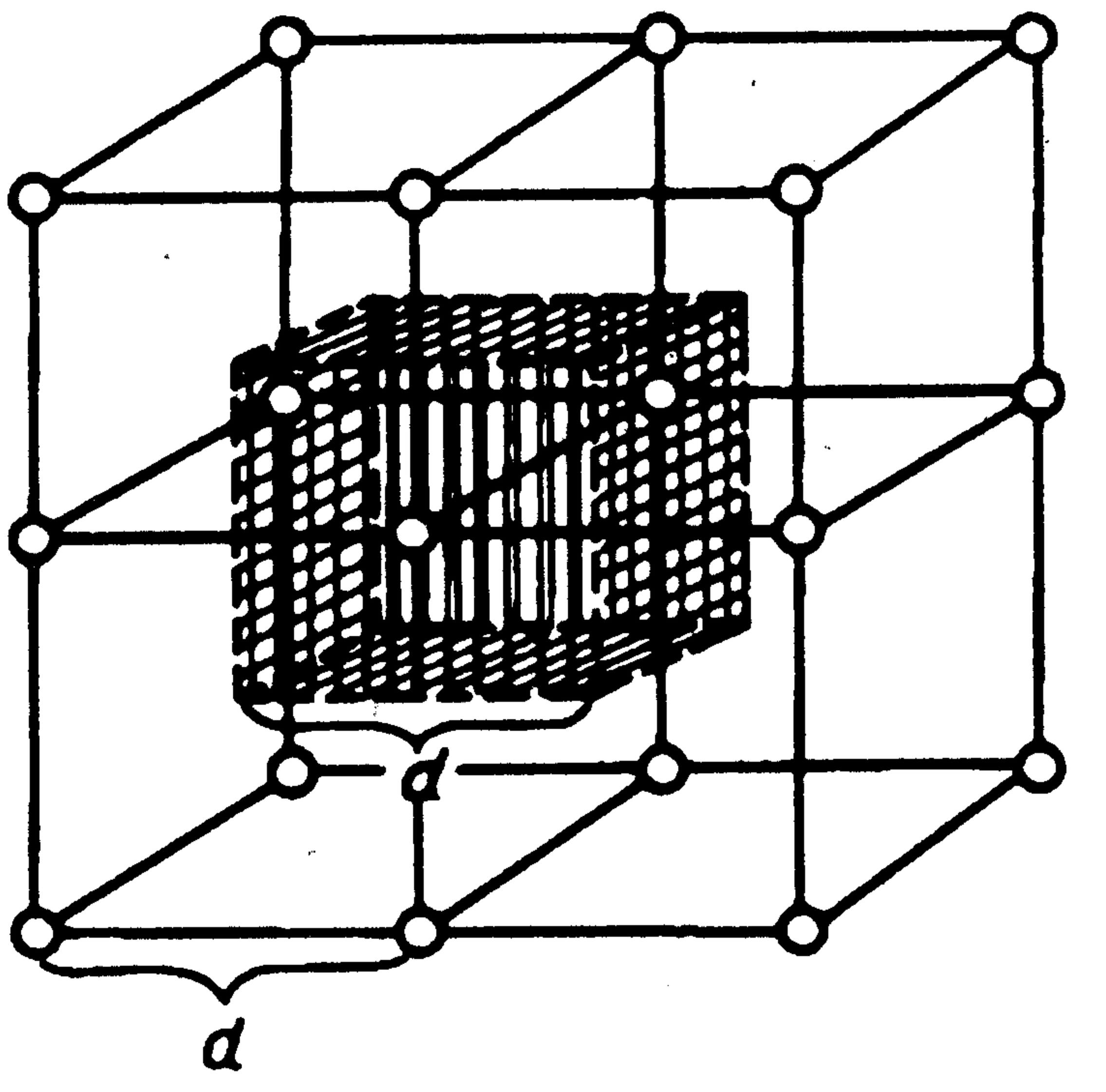


Рис. 9.5.

Задачи для самостоятельного решения

Задача 1. Вычислите массу молекулы углекислого газа CO_2.

Ответ: $7,3 \cdot 10^{-26}$ кг.

Задача 2. Температура воздуха в комнате изменилась от 7°C до 27°C. На сколько процентов уменьшилось число молекул в комнате?

Ответ: на 7%.

Задача 3. В сосуде находится газ под давлением $P = 1,5 \cdot 10^5$ Па. Концентрация молекул в сосуде $n_0 = 2 \cdot 10^{25}\text{м}^{-3}$. Определить температуру газа.

Ответ: $t = 273°$C.

Задача 4. В двух сосудах, заполненных газом с молярной массой $M = 0,044$ кг/моль, и соединенных трубкой с краном, давления равны $P_1 = 1 \cdot 10^5$ Па и $P_2 = 4 \cdot 10^5$ Па. Температура газа в сосудах $t_1^\circ = 17°$C и $t_2^\circ = 127°$C. Объемы сосудов $V_1 = 10$ л и $V_2 = 20$ л. Какова средне-квадратичная скорость молекул, если открыть кран.

Ответ:

$$v_{\text{ср кв}} = \sqrt{\frac{(3R/M)(P_1V_1 + P_2V_2)}{(P_1V_1/T_1) + (P_2V_2/T_2)}}.$$

Задача 5. Ампула объемом $V = 1\,\text{см}^3$, содержащая воздух при нормальных условиях, оставлена в космосе, где давление равно нулю. В ампуле пробито отверстие. Через какой промежуток времени давление в ампуле упадет до нуля? Через отверстие каждую секунду вылетает 10^8 молекул.

Ответ: $t = 2,7 \cdot 10^{11}$ с ≈ 8500 лет.

Задача 6. Кубическая кристаллическая решетка железа содержит один атом железа на элементарный куб, повторяя который, можно получить всю решетку кристалла. Определить расстояние между ближайшими атомами железа. Плотность железа $\rho = 7,9\,\text{г/см}^3$, молярная масса $M = 56$ кг/моль.

Ответ: $d = 2,3 \cdot 10^{-8}$ м.

Задача 7. Какова средне-квадратичная скорость молекул воздуха (кислорода, азота) при комнатной температуре?

Ответ: $v_1 = 480$ м/с, $v_2 = 510$ м/с.

Глава 10
Первое начало термодинамики

Первое начало термодинамики[1] — одна из частных формулировок закона сохранения энергии для систем, в которых существенную роль играют тепловые процессы.

1. *Внутренняя энергия* системы складывается из кинетической энергии хаотического теплового движения молекул и потенциальной энергии их взаимодействия. Каждая система обладает внутренней энергией.

Внутреннюю энергию идеального газа составляет только кинетическая энергия теплового движения молекул. Средняя кинетическая энергия теплового движения молекулы одноатомного газа (энергия поступательного движения):

$$\overline{E} = (3/2)kT.$$

(см. гл. 9). Внутренняя энергия газа равна

$$U = N(3/2)kT,$$

где N — число молекул газа:

$$N = (m/M)N_A,$$

откуда

$$U = (3/2)(m/M)RT \tag{10.1}$$

($kN_A = R$ — универсальная газовая постоянная). Внутренняя энергия газа является функцией его абсолютной температуры T. Изменение внутренней энергии зависит от начального и конечного состояний системы и не зависит от процесса, с помощью которого система переходит из первого во второе состояние. Если газ состоит из сложных молекул (двух-, трех- и многоатомных), то внутренняя энергия также прямо пропорциональна T, но коэффициент пропорциональности будет другим. Сложные молекулы одновременно участвуют в поступательном и во вращательном движениях, поэтому их средняя кинетическая энергия будет больше.

2. *Количество теплоты* Q — это количество энергии, получаемой или отдаваемой системой при теплообмене. Если привести в контакт два тела с разными температурами, то от более нагретого тела менее нагретому будет передано количество теплоты Q, т. е. более нагретое тело отдает часть своей энергии.

---

[1] Употребляется также термин "первый закон термодинамики".

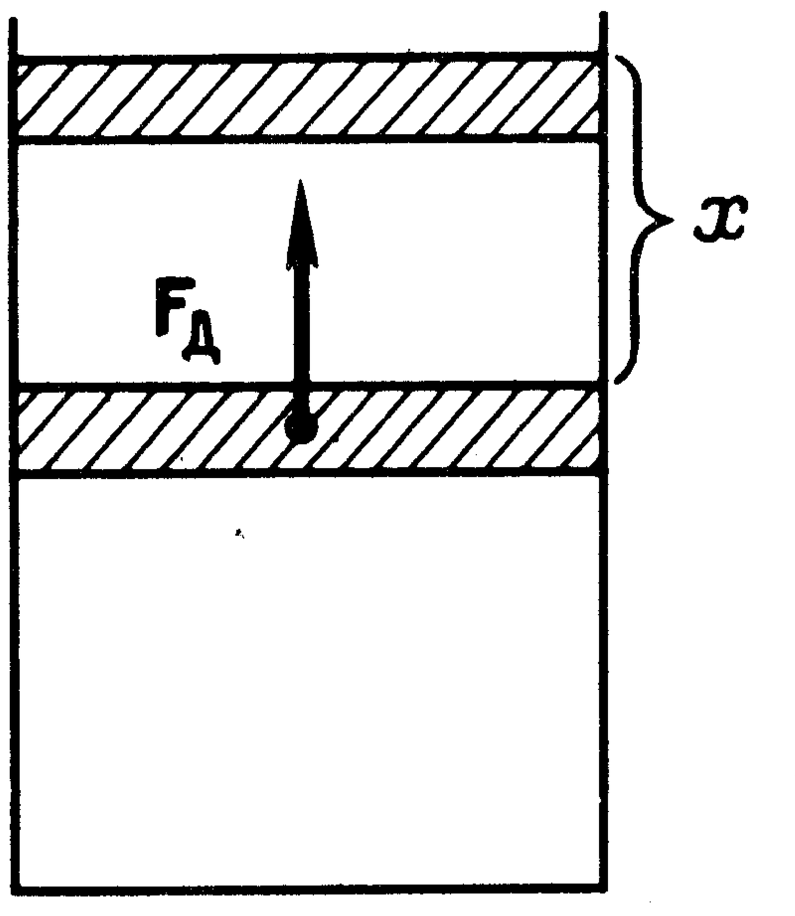


Рис. 10.1.

Для изменения температуры различных тел одинаковой массы на одну и ту же величину требуется разное количество теплоты

$$Q = cm\Delta T,$$

где c — удельная теплоемкость.

Удельная теплоемкость численно равна количеству теплоты, которое необходимо сообщить 1 кг вещества для изменения его температуры на 1 К. Количество теплоты, необходимое для изменения температуры термодинамической системы, зависит от процесса, поэтому и теплоемкость одного и того же вещества различна при разных процессах.

3. *Работа газа.* Если газ находится под поршнем массой m и площадью сечения S, то давление газа определяется атмосферным давлением и давлением поршня:

$$P = P_{атм} + mg/S.$$

Давление остается постоянными при нагревании или охлаждении газа, изменяется объем (рис. 10.1).

Если газ расширяется и поршень поднимается на Δx, то работа силы давления положительна и равна

$$A = F_д \Delta x = PS\Delta x.$$

Так как

$$S\Delta x = V_2 - V_1,$$

это произведение равно изменению объема газа, и работа газа равна

$$A = P(V_2 - V_1). \tag{10.2}$$

В случае расширения работа газа положительна, в случае сжатия — отрицательна. (Когда мы говорим о работе газа, мы имеем в виду, что работу совершает сила давления газа.)

Если газ совершает положительную работу, то работа внешней силы отрицательна, так как условие равновесия поршня $\mathbf{F}_д + \mathbf{F}_{внеш} = 0$.

Работа силы давления при расширении газа

$$A = F_д \Delta x \cos 0° = PS\Delta x,$$

работа внешней силы

$$A' = F_{внеш} \Delta x \cos 180° = -F_{внеш} \Delta x,$$

откуда $A = -A'$.

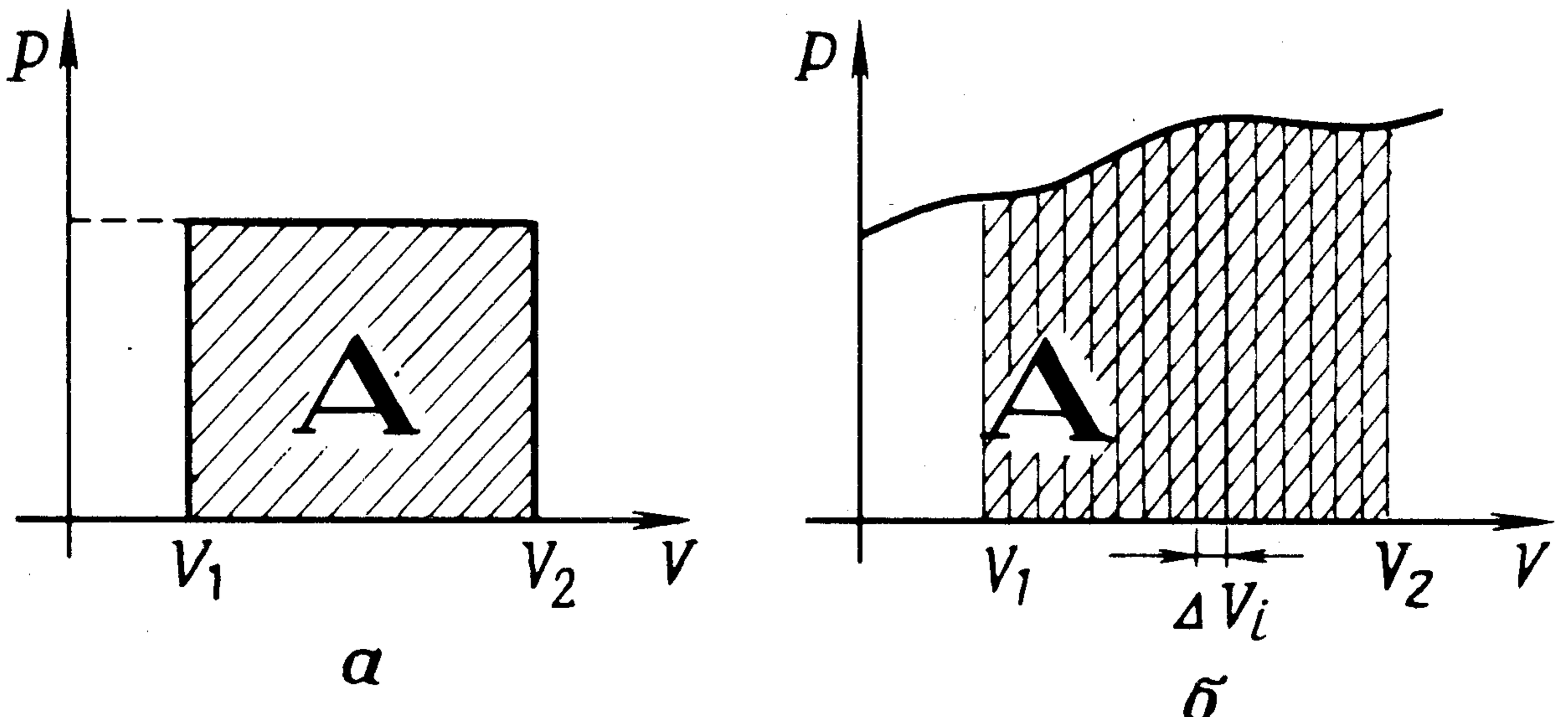


Рис. 10.2.

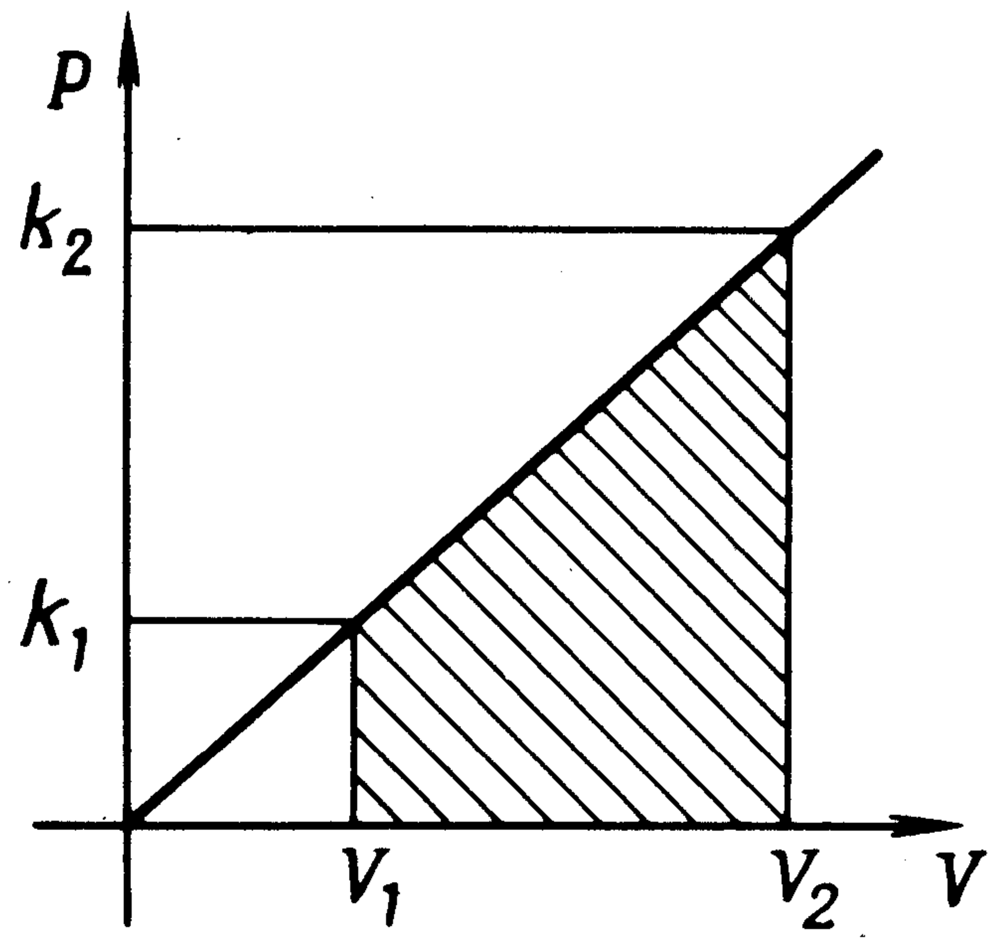


Рис. 10.3.

На рис. 10.2 изображена зависимость $P(V)$ при $P = \text{const}$. Из рис. 10.2,*а*, и из формулы (10.2) следует, что работа газа численно равна площади прямоугольника. Если давление изменяется по более сложному закону (рис. 10.2,*б*), то, разделяя изменение объема на малые интервалы ΔV_i, в пределах каждого из которых давление остается примерно постоянным, и суммируя площади прямоугольников, получим, что работа газа численно равна площади криволинейной трапеции $A = \sum_i A_i = \sum_i P_i \Delta V_i$. Например, если $P = kV$, где k — постоянный коэффициент, то работа газа при расширении от объема V_1 до объема V_2 равна (рис. 10.3)

$$A = \frac{kV_1 + kV_2}{2}(V_2 - V_1) = \frac{k(V_2^2 - V_1^2)}{2}.$$

Из сказанного следует, что работа всегда зависит от характера процесса.

Первое начало термодинамики формулируется следующим образом:

Изменение внутренней энергии системы при переходе ее из одного состояния в другое равно сумме количества теплоты, сообщенного системе, и работы внешних сил, совершаемой над системой, т. е.

$$\Delta U = Q + A'.$$

Работа внешних сил равна работе системы с обратным знаком:

$$A' = -A,$$

откуда

$$Q = \Delta U + A. \tag{10.3}$$

Первое начало термодинамики можно также сформулировать следующим образом: количество теплоты, сообщаемое системе, расходуется на изменение внутренней энергии системы и на совершение системой механической работы.

Рассмотрим известные процессы в газах в рамках первого закона термодинамики.

1. Изотермический процесс ($T = \text{const}$). Так как температура остается постоянной, то не изменяется внутреняя энергия газа:

$$Q = A,$$

т. е. все количество теплоты, сообщаемое системе, идет на совершение механической работы.

Если газ отдает тепло ($Q < 0$), газ сжимается, работа внешних сил при этом $A' > 0$. Удельная теплоемкость при изотермическом процессе

$$c_T = Q/m\Delta T \to \infty.$$

(Изотермически газ нагреть нельзя.)

2.*Изобарный процесс* ($P = \text{const}$). В этом случае, если $Q > 0$, то газ и нагревается и совершает механическую работу:

$$Q = \Delta U + A, \quad A = P\Delta V.$$

Согласно уравнению Клапейрона — Менделеева

$$A = P\Delta V = (m/M)R\Delta T$$

(работа при изобарном процессе). Для одноатомного газа имеем

$$\Delta U = \frac{3}{2}\frac{m}{M}R\Delta T,$$

следовательно,

$$Q = \frac{m}{M}R\Delta T\left(\frac{3}{2}+1\right) = \frac{5}{2}\frac{m}{M}R\Delta T,$$

откуда теплоемкость газа при постоянном давлении (для одноатомного газа) равна

$$c_P = \frac{Q}{m\Delta T} = \frac{5}{2}\frac{R}{M}.$$

3. *Изохорный процесс* ($V = \text{const}$). При изохорном процессе механическая работа газом не совершается. Следовательно,

$$Q = \Delta U,$$

т. е. все количество теплоты идет на изменение внутренней энергии. Удельная теплоемкость при $V = \text{const}$ для одноатомного газа равна

$$c_V = \frac{Q}{m\Delta T} = \frac{\Delta U}{m\Delta T} = \frac{3}{2}\frac{R}{M}.$$

Следовательно, $c_P > c_V$, или

$$c_P = c_V + R/M. \tag{10.4}$$

Отсюда очевиден физический смысл R. Универсальная газовая постоянная R численно равна работе, которую совершает 1 моль идеального газа при изобарическом нагревании на 1 К.

4. *Адиабатический процесс* — процесс, происходящий без теплообмена с окружающей средой:

$$Q = 0,$$

следовательно, $\Delta U = -A$. Если газ расширяется адиабатически, $A > 0$, $\Delta U < 0$, то происходит охлаждение газа; если газ адиабатически сжимается, $A < 0$, $\Delta U > 0$, то газ нагревается. Теплоемкость при адиабатическом процессе равна

$$c_{\text{ад}} = Q/m\Delta T = 0.$$

Очевидно, что адиабатический процесс на опыте при отсутствии идеальной теплоизоляции должен быть осуществлен достаточно быстро, чтобы за это время не успел произойти теплообмен с окружающей средой.

При адиабатном расширении газа уменьшение давления происходит быстрее, чем при изотермическом процессе:

$$P = nkT.$$

При изотермическом расширении уменьшение давления происходит только за счет уменьшения концентрации ($T = \text{const}$), при адиабатическом уменьшается концентрация и понижается температура (см. задачу 1, рис. 10.7).

С точки зрения первого начала термодинамики возможны все процессы, при которых сохраняется энергия. Например, не запрещается переход тепла от менее нагретого тела к более нагретому, только при этом необходимо, чтобы количество теплоты, отданное одним телом, было передано полностью другому телу. На самом деле это невозможно. Все процессы имеют направленность, *второе начало термодинамики* определяет условия, при которых возможны превращения энергии из одних видов в другие, т. е. указывает направленность процесса. Одна из формулировок второго начала термодинамики: невозможен самопроизвольный переход теплоты от менее нагретого тела к более нагретому.

Второе начало термодинамики формулируется также следующим образом: невозможно создание вечного двигателя второго рода, т. е. периодически действующего устройства, которое позволяло бы полностью превращать количество теплоты, сообщенное системе, в механическую работу, часть теплоты должна быть передана холодильнику.

Принципиальная схема тепловой машины изображена на рис. 10.4. Тепловая машина (двигатель) состоит из нагревателя, рабочего тела и холодильника. Коэффициент полезного действия тепловой машины

$$\eta = \frac{A}{Q_1}100\% = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1}100\%, \tag{10.5}$$

где Q_1 — количество теплоты, передаваемое нагревателем рабочему телу, Q_2 — количество теплоты, передаваемое рабочим телом холодильнику.

Опишем работу тепловой машины. Если рабочее тело (например, сосуд с поршнем) получает тепло, то газ начинает расширяться — газ совершает положительную механическую работу. Например, при изотермическом процессе (рис. 10.5) работа равна площади заштрихованной фигуры 1–2–V_2–V_1. Тепловая машина работает циклически. Цикл — это последовательность процессов, в результате которой система возвращается в исходное состояние. Если система возвращается в исходное состояние по кривой 2 – С – 1, то суммарная работа газа за цикл будет равна нулю. Следовательно, возвращение в исходное состояние должно осуществляться по кривой, проходящей ниже 1 – С – 2, чтобы работа за цикл была больше нуля. Коэффициенты полезного действия первых тепловых машин были очень малы.

Французский инженер Сади Карно показал, что самым выгодным был бы тепловой двигатель, работающий по циклу, состоящему из двух изотерм и двух адиабат (рис. 10.6), причем, все процессы обратимы. Кривая 1 – 2 — изотермический процесс, при котором $Q_1 = A_1$, все тепло, сообщенное рабочему телу, переходит в механическую работу. Кривая 3 – 4 — изотермическое сжатие газа, при котором $Q_2 = A_2$, 2–3, 4–1 — адиабаты, при этих процессах теплообмена не происходит. Цикл Карно обратим, т. е. его можно провести как в прямом, так и в обратном направлении через одни и те же промежуточные состояния и при этом не происходит изменений в окружающих телах. Процесс 1 – 2, например,

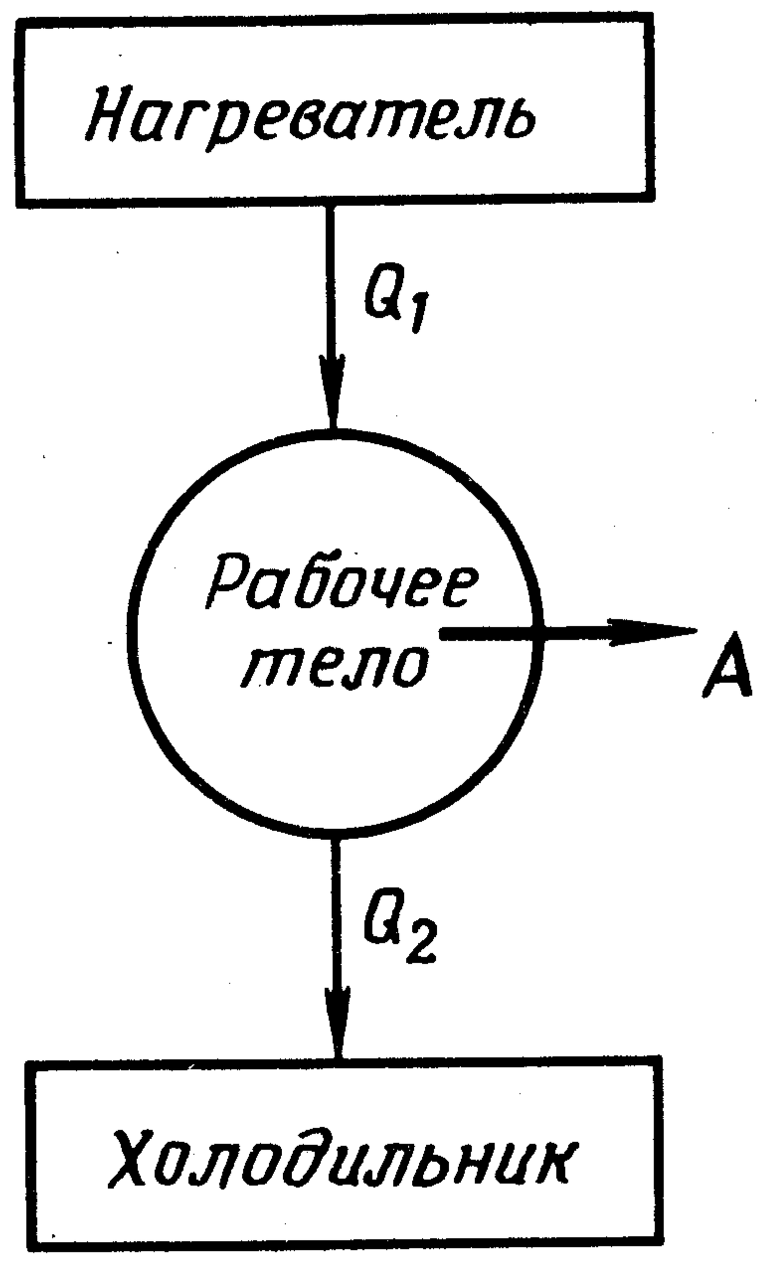


Рис. 10.4.

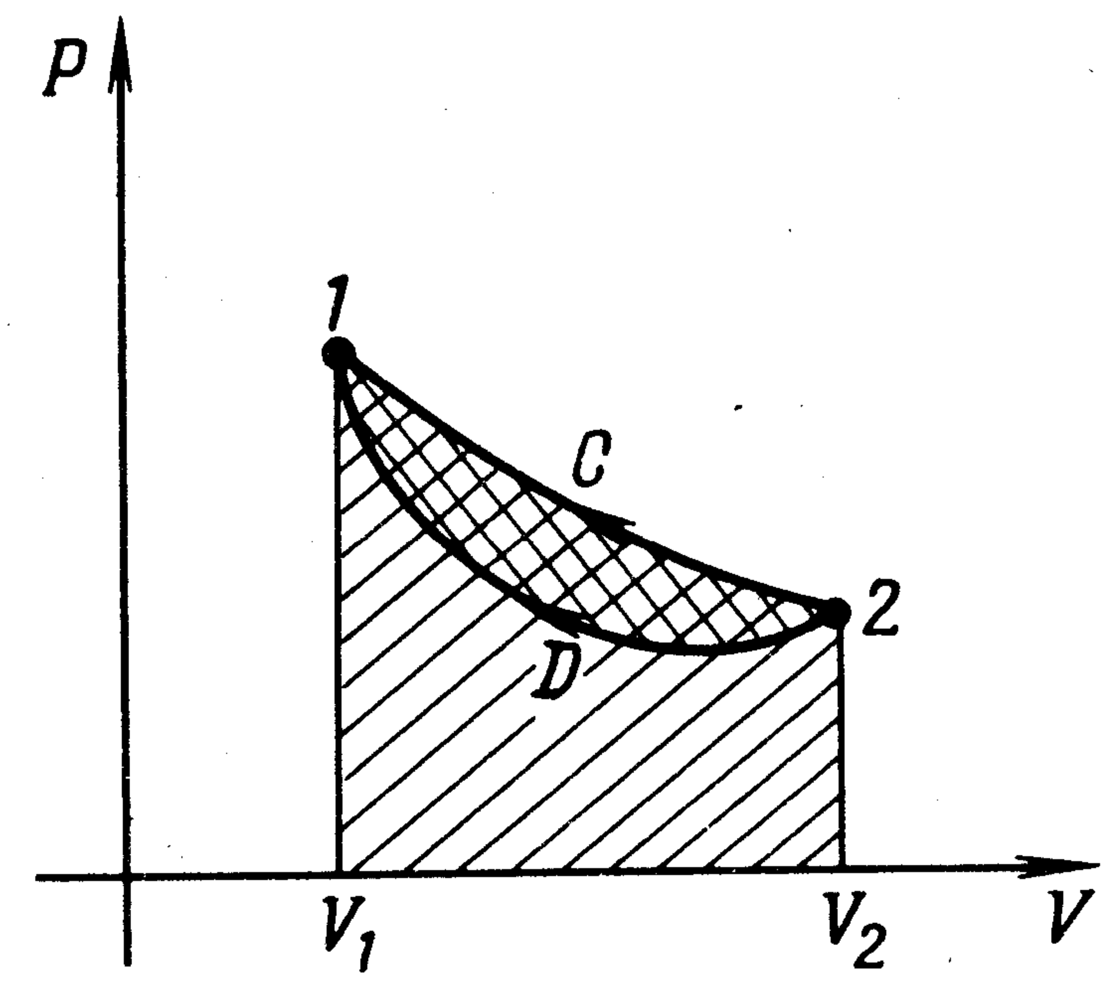


Рис. 10.5.

является обратимым, так как при расширении система получает количество теплоты Q_1, при изотермическом сжатии по кривой $2-1$ она отдает количество теплоты, также равное Q_1.

Обратимых процессов в природе не существует. Работа "идеальной" тепловой машины Карно на самом деле реализована быть не может. Коэффициент полезного действия "идеального" теплового двигателя (машины) равен

$$\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1} 100\%. \tag{10.6}$$

Коэффициент полезного действия любого теплового двигателя, работающего в том же диапазоне температур, всегда меньше $\eta_{\text{ид}}$, т. е.

$$\frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} \leq \frac{T_1 - T_2}{T_1}.$$

Перепишем (10.6) в виде

$$\eta_{\text{ид}} = (1 - T_2/T_1)100\%,$$

откуда ясно, что кпд можно повысить при уменьшении температуры холодильника или увеличении температуры нагревателя. В качестве холодильника обычно используется окружающий воздух, поэтому как правило идут по пути увеличения температуры нагревателя, работая с перегретым паром. Например, для паровой турбины с $T_1 = 800$ К, $T_2 = 300$ К имеем $(\text{кпд})_{\text{ид}} = 62\%$. У реальных турбин кпд порядка 40%. Заметим, что кпд идеальной тепловой машины не зависит от рабочего вещества (газ, пар), а зависит только от температур нагревателя и холодильника, что позволило ввести абсолютную температурную шкалу, называемую *шкалой Кельвина*. Введение любой эмпирической шкалы связано с рабочим телом (ртутные, спиртовые термометры и т. д.). О работе холодильной системы см. задачу 6.

Примеры решения задач

Задача 1. Газ расширяется от объема V_1 до объема V_2 один раз изотермически, второй изобарически и третий адиабатически. При каком процессе газ

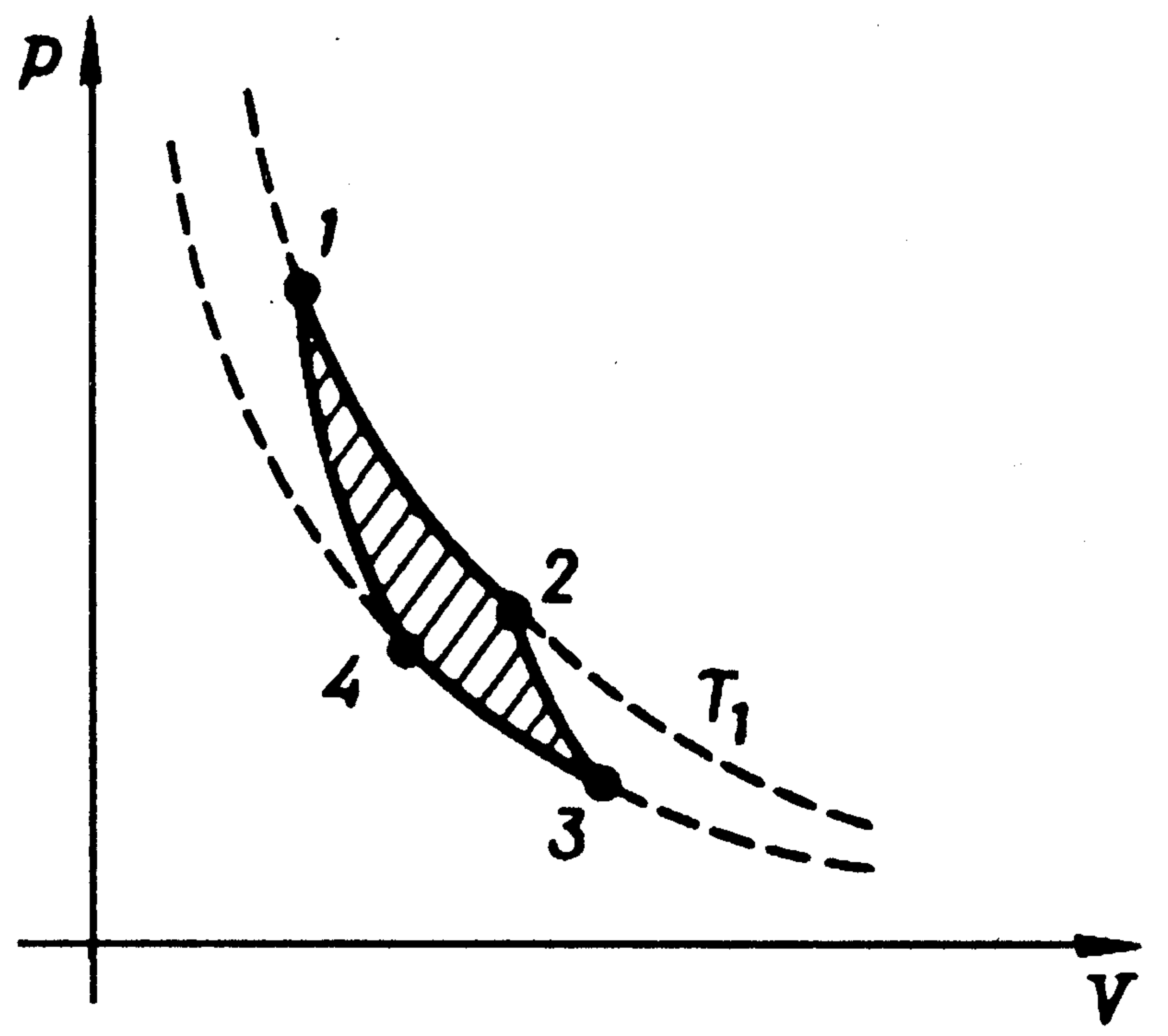


Рис. 10.6.

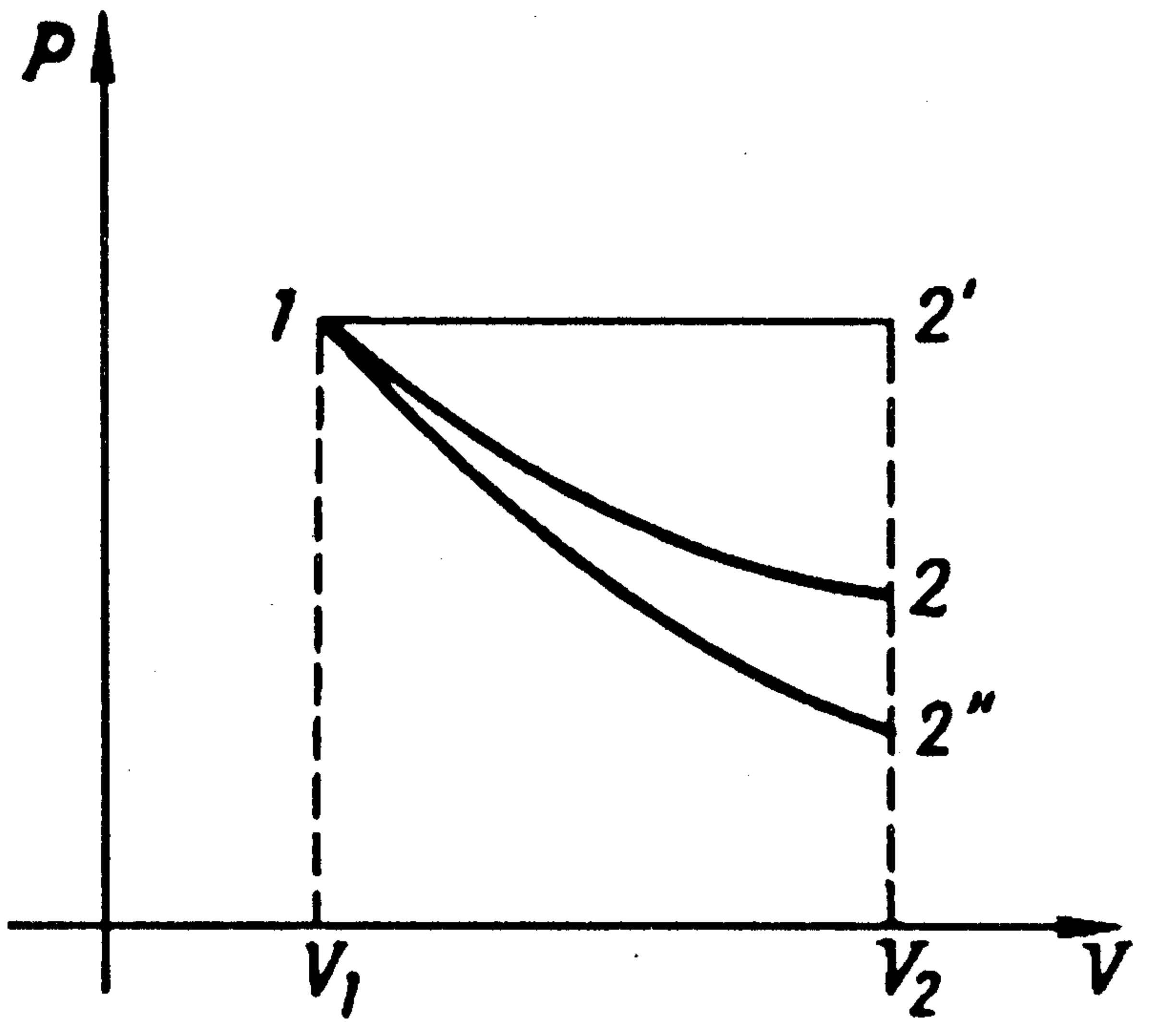


Рис. 10.7.

совершает большую работу и газу передается большее количество теплоты?

Дано: $1 - 2' - T = \mathrm{const}$, $1 - 2 - P = \mathrm{const}$, $1 - 2'' - Q = 0$. Сравнить A_1, A_2, A_3, Q_1, Q_2, Q_3.

Решение. На диаграмме $P - V$ (рис. 10.7) изобразим все три процесса. Работа численно равна площади криволинейной трапеции. Из рис. 10.7 очевидно, что работа при изобарном процессе будет максимальной, при адиабатном минимальной, т. е.

$$A_2 > A_1 > A_3.$$

Температура газа в состоянии $2'$ больше, чем в состоянии 2, а температура в состоянии 2 больше, чем в состоянии $2''$ ($T_{2'} > T_2 > T_{2''}$). В этом легко убедиться, начертив изотермы, проходящие через точки $2'$ и $2''$. При процессе $1 - 2'$ $\Delta U > 0$, при $1 - 2$ $\Delta U = 0$. Очевидно, что поскольку $Q = \Delta U + A$ (первое начало термодинамики), то $Q_2 > Q_1 > Q_3$ $(Q_3 = 0)$.

Задача 2. Пусть азот нагревается при постоянном давлении. Зная, что масса азота $m = 280$ г, количество затраченного тепла равно $Q = 600$ Дж и $c_V = 745$ Дж/кг $\cdot$ К, найти повышение температуры азота.

Дано: $m = 280\,\text{г}\,(0{,}28\,\text{кг})$, $c_V = 745\,\text{Дж/кг}\cdot\text{К}$, $Q = 600\,\text{Дж}$, $M = 0{,}028\,\text{кг}$; T — ?

Решение. Согласно первому началу термодинамики,

$$Q = \Delta U + A.$$

Изменение внутренней энергии равно

$$\Delta U = c_V m \Delta T,$$

работа при изобарном процессе

$$A = P\Delta V = (m/M)R\Delta T.$$

Следовательно,

$$Q = m\Delta T(c_V + R/M),$$

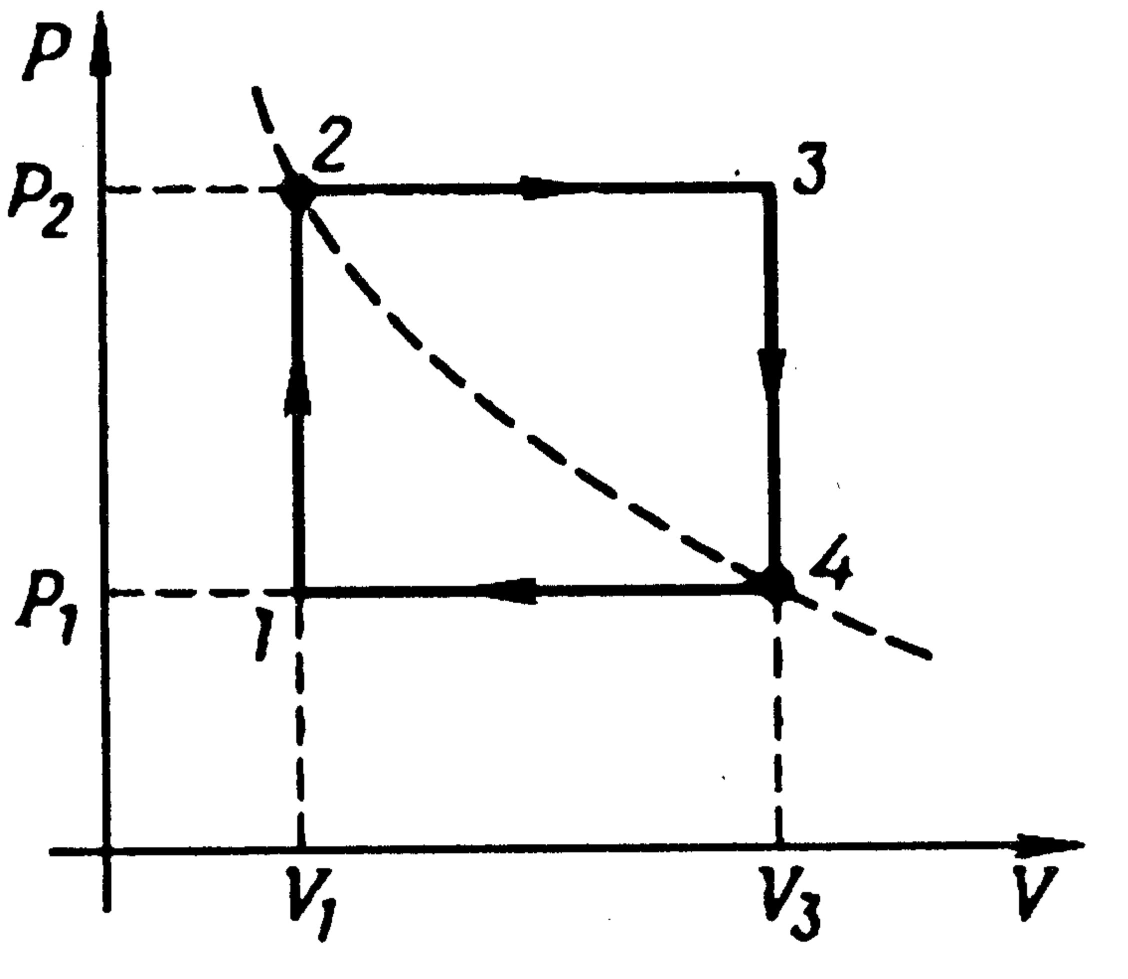


Рис. 10.8.

откуда

$$\Delta T = \frac{Q}{m(c_V + R/M)},$$

$$[\Delta T] = \frac{\text{Дж}}{\text{кг}[(\text{Дж/К}) + (\text{Дж/моль} \cdot \text{К} \cdot \text{кг/моль})]} = \text{К},$$

$$T = \frac{600}{0,28(745 + 8,31/0,028)}\text{К} = 2,1\,\text{К}.$$

Задача 3. Один моль газа совершает цикл, состоящий из двух изохор и двух изобар (рис. 10.8). Температуры, соответствующие состояниям 1 и 3, — T_1 и T_3 соответственно. Определить работу, совершенную газом за цикл, если известно, что точки 2 и 4 лежат на одной изотерме.

Дано: T_1, T_3, $m = M$; A — ?

Решение. Состояние 1 характеризуется параметрами P_1, V_1, T_1, состояние 2 — P_2, V_1, T_2, состояние 3 — P_2, V_3, T_3, состояние 4 — $P_1\,V_3, T_4\,(T_4 = T_2)$. Из рисунка очевидно, что

$$A = (P_2 - P_1)(V_3 - V_1), \tag{10.7}$$

так как работа за цикл численно рана площади прямоугольника 1, 2, 3, 4.

Поскольку $T_1 = T_2$,

$$P_2 V_1 = P_1 V_3. \tag{10.8}$$

Из уравнения Клапейрона — Менделеева для 1 моля газа следует:

$$P_1 V_1 = RT_1 \quad (m/M = 1),$$

$$P_2 V_3 = RT_3,$$

откуда

$$\left(\frac{P_1}{P_2}\right)\left(\frac{V_1}{V_3}\right) = \frac{T_1}{T_3}.$$

Как следует из (10.8),

$$P_1/P_2 = V_1/V_3,$$

тогда

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{V_1}{V_3} = \sqrt{\frac{T_1}{T_3}}.$$

Подставив найденные выражения в формулу (10.7), выполним преобразования:

$$A = P_2V_3\left(1 - \frac{P_1}{P_2}\right)\left(1 - \frac{V_1}{V_3}\right) = RT_3\left(1 - \sqrt{T_1/T_3}\right)^2.$$

Задача 4. Для нагревания 10 г неизвестного газа на 1 К при постоянном давлении требуется 9,12 Дж, при постоянном объеме 6,49 Дж. Что это за газ?

Дано: $Q_P = 9,12$ Дж, $Q_V = 6,49$ Дж, $m = 10$ г $(0,01$ кг$)$, $\Delta T = 1$ К; M — ?

Решение. Количество теплоты, требуемое для нагревания газа, зависит от условий нагревания:

$$Q_x = c_x m\Delta T.$$

При $P = \text{const}$

$$Q_P = c_P m\Delta T,$$

при $V = \text{const}$

$$Q_V = c_V m\Delta T,$$

откуда

$$c_P = \frac{Q_P}{m\Delta T}, \quad c_V = \frac{Q_V}{m\Delta T}.$$

В то же время из (10.4) следует, что

$$c_P - c_V = R/M,$$

следовательно,

$$\frac{Q_P - Q_V}{m\Delta T} = \frac{R}{M},$$

и окончательно

$$M = \frac{Rm\Delta T}{Q_P - Q_V},$$

$$[M] = \frac{(\text{Дж/моль}\cdot\text{К})\cdot\text{кг}\cdot\text{К}}{\text{Дж} - \text{Дж}} = \frac{\text{кг}}{\text{моль}},$$

$$M = \frac{8,31\cdot 10^{-2}\cdot 1}{2,63}\,\frac{\text{кг}}{\text{моль}} = 0,032\text{кг/моль}.$$

Следовательно, нагреваемый газ — кислород.

Задача 5. Воздух, занимающий при давлении $P = 200$ кПа объем $V_1 = 200$ л, изобарически нагрели до температуры $T_2 = 500$ К. Масса воздуха $0,58$ кг масса моля $M_{\text{эфф}} = 0,029$ кг/моль. Определить работу воздуха.

Дано: $T_2 = 500$ К, $P = 200$ кПа $(2\cdot 10^5$ Па$)$, $V_1 = 200$ л $(2\cdot 10^{-1}$ м$^3)$, $m = 0,58$ кг, $M_{\text{эфф}} = 0,029$ кг/моль; A — ?

Решение. Запишем для газа в начальном состоянии уравнение Клапейрона–Менделеева:

$$PV_1 = (m/M)RT_1,$$

откуда

$$T_1 = \frac{PV_1M}{mR}.$$

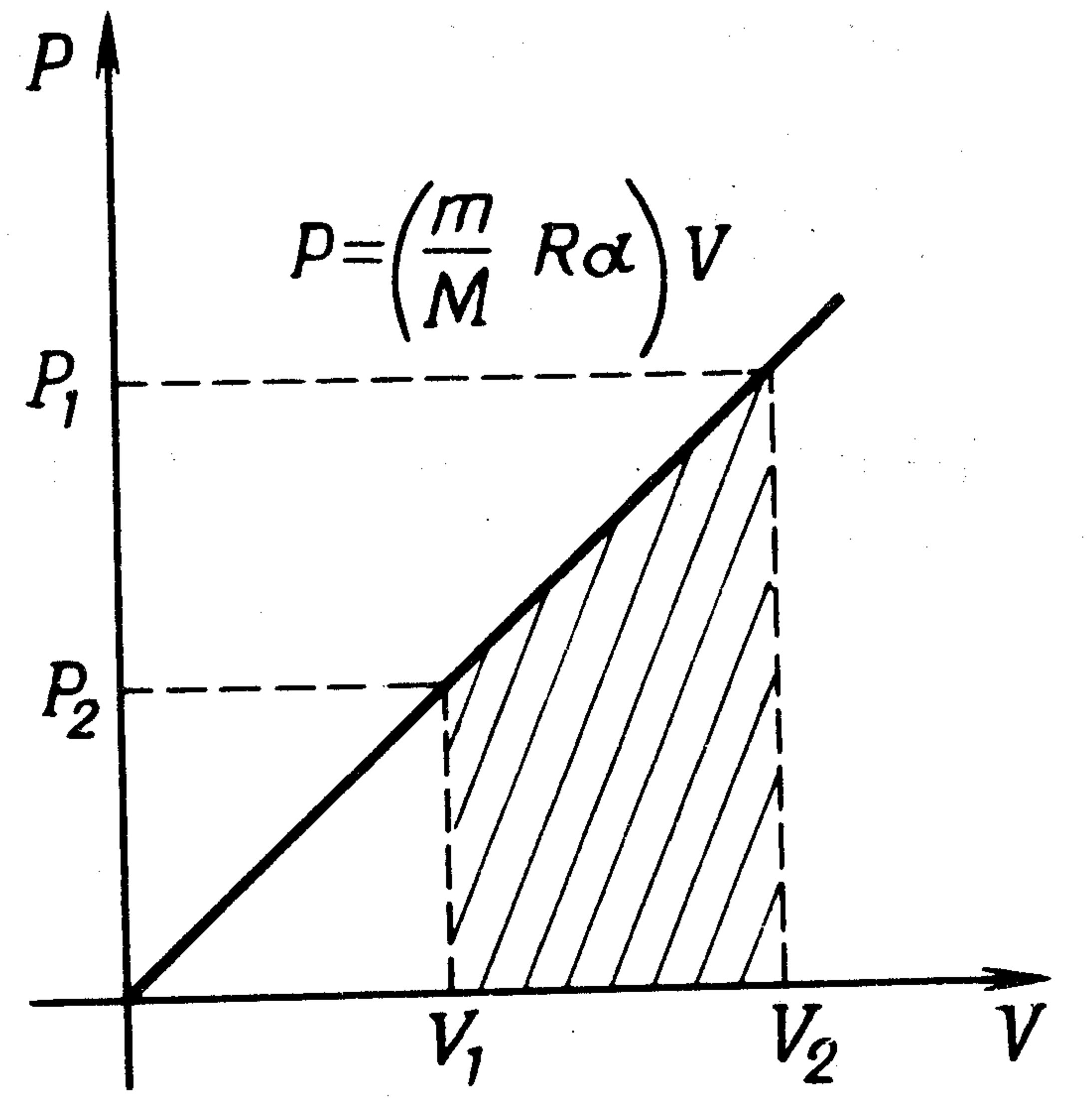


Рис. 10.9.

При изобарическом расширении работа равна

$$A = (m/M)R\Delta T = (m/M)R(T_2 - T_1).$$

Подставив выражение для T_1, получим

$$A = (m/M)RT_2 - PV_1,$$

откуда

$$[A] = \frac{\text{кг} \cdot (\text{Дж/моль} \cdot \text{К})}{\text{кг/моль}} - (\text{Н/м}^2) \cdot \text{м}^3 = \text{Дж} + \text{Н} \cdot \text{м} = \text{Дж},$$

$$A = (0,58/0,029)8,31 \cdot 500 - 2 \cdot 10^5 \cdot 2 \cdot 10^{-1} = 4,3 \cdot 10^4\text{Дж}.$$

Задача 6. Найти выражение для работы идеального газа в политропном процессе при нагревании от температуры T_1 до T_2, если объем газа меняется с температурой по закону $T = \alpha V^2$. Политропным называется процесс, происходящий по закону $PV^n = \text{const}$. Теплоемкость любого политропного процесса остается постоянной.

Дано: $T_1, T_2, T = \alpha V^2$; A — ?

Решение. По условию газ подчиняется закону

$$T = \alpha V^2. \tag{10.9}$$

Поскольку газ идеальный, подставив (10.9) в уравнение Клапейрона — Менделеева, получим

$$P = \frac{mRT}{MV} = \frac{m}{M}\frac{R\alpha V^2}{V} = \frac{m}{M}R\alpha V. \tag{10.10}$$

Работу можно вычислить графически (рис. 10.9). Так как давление линейно зависит от объема, то работа численно равна площади трапеции (заштрихованная область):

$$A = (1/2)(P_1 + P_2)(V_2 - V_1). \tag{10.11}$$

Подставив в (10.11) давление, определяемое формулой (10.10), получим

$$A = \frac{(\alpha mR/M)V_1 + (\alpha mR/M)V_2}{2}(V_2 - V_1) = \frac{\alpha mR}{2M}(V_2^2 - V_1^2).$$

Так как по условию $V_2^2 = T_2/\alpha$ и $V_1^2 = T_1/\alpha$, то окончательно имеем

$$A = \frac{1}{2}\frac{m}{M}R(T_2 - T_1).$$

Задача 7. В котле паровой машины температура равна 160°C, а температура холодильника 10°C. Какую максимальную работу можно теоретически получить от машины, если в топке, коэффициент полезного действия которой 60%, сожжено 200 кг угля с удельной теплотой сгорания $2,9 \cdot 10^7$ Дж/кг?

Дано: $T_1 = 160°C\,(433\,К)$, $T_2 = 10°C\,(283\,К)$, $q = 2,9 \cdot 10^7$ Дж/кг, $\eta = 60\%$, $m = 200$ кг; A — ?

Решение. Максимальную работу может произвести идеальная тепловая машина, работающая по циклу Карно, кпд которой

$$\eta = (T_1 - T_2)/T_1, \tag{10.12}$$

где T_1 и T_2 — абсолютные температуры нагревателя и холодильника. Для любой тепловой машины кпд определяется по формуле

$$\eta = A/Q_1,$$

где A — работа, совершаемая тепловой машиной, Q_1 — теплота, полученная машиной от нагревателя. Из условия задачи ясно, что Q_1 — это часть тепла, выделившегося при сгорании топлива:

$$Q_1 = \eta_1 mq.$$

Окончательно имеем

$$\frac{T_1 - T_2}{T_1} = \frac{A}{\eta_1 mq},$$

откуда

$$A = \eta_1 mq(1 - T_2/T_1),$$

$$[A] = \text{кг}\frac{\text{Дж}}{\text{кг}}\frac{\text{К}}{\text{К}} = \text{Дж},$$

$$A = 0,6 \cdot 200 \cdot 2,9 \cdot 10^7(1 - 283/433)\text{Дж} = 1,2 \cdot 10^9\,\text{Дж}.$$

Задача 8. Паровая машина мощности $N = 14,7$ кВт потребляет за 1 ч работы $m = 8,1$ кг угля с удельной теплотой сгорания $q = 3,3 \cdot 10^7$ Дж/кг. Температура котла 200°C, холодильника 58°C. Найдите кпд этой машины и сравните его с кпд идеальной тепловой машины.

Дано: $m = 8,1$ кг, $N = 14,7 \cdot 10^3$ Вт, $q = 3,3 \cdot 10^7$ Дж/кг, $T_1 = 473$ К, $T_2 = 331$ К, $t = 1$ ч (3600 с); η — ? $\eta_{\text{ид}}$ — ?

Решение. Кпд тепловой машины равен отношению производимой механической работы A к затраченному количеству теплоты Q_1, выделяющемуся при сгорании угля:

$$Q_1 = mq.$$

Произведенная за это же время работа равна

$$A = Nt,$$

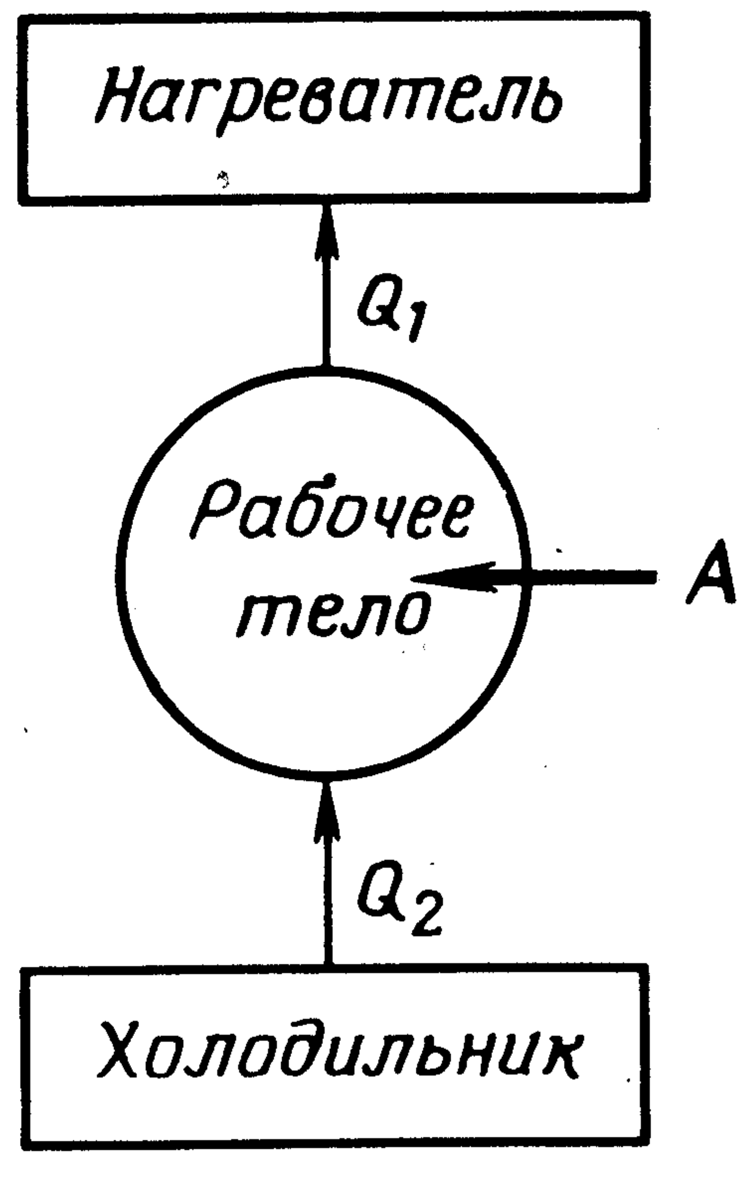


Рис. 10.10.

таким образом,

$$\eta = A/Q_1 = Nt/qm,$$

$$\eta = \frac{14,7 \cdot 10^3 \cdot 3600}{3,3 \cdot 10^7 \cdot 8,1} = 0,198,$$

или в процентах

$$\eta \approx 20\%,$$

$$\eta_{\text{ид}} = \frac{T_1 - T_2}{T_1} 100\% = 30\%,$$

$$\eta < \eta_{\text{ид}}.$$

Итак, коэффициент полезного действия идеальной тепловой машины, как следовало ожидать, больше кпд реальной машины.

Задача 9. Идеальная тепловая машина с кпд η работает по обратному циклу. Какое максимальное количество теплоты можно забрать от холодильника, совершив механическую работу A?

Дано: η, A; Q_2 — ?

Решение. Поскольку холодильная машина работает по обратному циклу, то для перехода тепла от менее нагретого тела к более нагретому необходимо, чтобы внешние силы совершили положительную работу (рис. 10.10). Принципиальная схема холодильной машины: от холодильника отбирается количество теплоты Q_2, внешними силами совершается работа и нагревателю передается Q_1. Следовательно,

$$\eta = \frac{A}{Q_1} = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1},$$

откуда

$$Q_2 = Q_1(1 - \eta), \quad Q_1 = A/\eta.$$

Окончательно имеем

$$Q_2 = (A/\eta)(1 - \eta).$$

Задачи для самостоятельного решения

Задача 1. Для изобарного нагревания 800 молей газа на 500 К газу сообщили количество теплоты $9,4 \cdot 10^6$ Дж. Определить работу газа и приращение его внутренней энергии.

Ответ: $3,3 \cdot 10^6$ Дж; $6,1 \cdot 10^6$ Дж.

Задача 2. В цилиндрическом сосуде с площадью основания 250 см^2 находится 10 г азота, сжатого поршнем, на котором лежит гиря массой 12,5 кг. Какую работу совершит газ при нагревании его от 25 до 625°C. Атмосферное давление равно 1 атм.

Ответ: 1779 Дж.

Задача 3. Два моля идеального (одноатомного) газа, находящегося при 0°C, сначала изохорически перевели в состояние, в котором давление в два раза больше первоначального, а затем изобарически в состояние, в котором объем в два раза больше первоначального. Найти изменение внутренней энергии газа.

Ответ: $\Delta U = 20$ кДж.

Задача 4. В цилиндре под поршнем находится некоторая масса воздуха. На его нагревание при постоянном давлении затрачено 5 кДж. Найти работу, произведенную при этом газом. Теплоемкость воздуха при постоянном давлении $c_P = 10^3$ Дж/кг · К, молекулярная масса 29 г/моль.

Ответ: $1,43 \cdot 10^3$ Дж.

Задача 5. В паровой турбине для получения пара с температурой 250°C сжигают 0,35 кг дизельного топлива. При этом пар совершает работу 1 кВт-ч. Температура холодильника 30°C. Вычислить кпд турбины и максимальный кпд. Удельная теплота сгорания дизельного топлива 42 МДж/кг.

Ответ: 24%, 42%.

Задача 6. В цилиндре двигателя находится газ, для нагревания которого сжигают 2 кг нефти с удельной теплотой сгорания $4,3 \cdot 10^7$ Дж/кг. Расширяясь, газ совершает работу 10 кВт-ч. Насколько изменилась внутренняя энергия газа? Чему равен кпд установки?

Ответ: $5 \cdot 10^7$ Дж; 42%.

Задача 7. Двигатель автомобиля развивает мощность 25 кВт. Найти кпд двигателя, если при скорости 60 км/ч двигатель потребляет 12 л бензина на 100 км пути. Плотность бензина 700 кг/м^3. При сгорании 1 кг бензина выделяется $4,5 \cdot 10^7$ Дж теплоты.

Ответ: $\sim 40\%$.

Задача 8. Найти расход на 100 км пробега автомобиля, если мощность его мотора при скорости 720 км/ч равна 50 кВт, а кпд равен 25%. Теплотворная способность бензина $4,5 \cdot 10^7$ Дж/кг.

Ответ: 22,2 кг.

Задача 9. Один моль водорода, первоначально имевший температуру 0°C, нагревается при постоянном давлении. Какое количество теплоты необходимо сообщить газу, чтобы его объем удвоился? Какая работа будет совершена газом?

Ответ: $Q = 7,94$ кДж, $A = 2,25$ кДж.

Задача 10. 1 м^3 водорода при 0°C находится в цилиндрическом сосуде, закрытом сверху легко скользящим поршнем массы 1 т и сечения 0,5 м^2. Атмосферное давление 97,3 кПа. Какое количество теплоты потребуется на нагревание водорода до 300°C? Найдите изменение его внутренней энергии.

Ответ: $Q = 450$ кДж, $\Delta U = 320$ кДж.

Глава 11
Реальный газ. Влажность

При давлениях, больших 10–15 атм, концентрация молекул возрастает, среднее расстояние между молекулами уменьшается и силы взаимодействия — силы притяжения — начинают влиять на поведение газа. Возрастание концентрации приводит также к тому, что объем свободного пространства, в котором движутся молекулы, оказывается меньше объема сосуда на величину, равную собственному объему молекул. Поэтому уравнения, полученные для идеального газа, несправедливы. Рассмотрим сильно разреженный газ и начнем при постоянной температуре постепенно уменьшать объем (рис. 11.1). Зависимость давления от объема на участке кривой 1–2 сходна с изотермой идеального газа.

Однако начиная с состояния 2 при дальнейшем уменьшении объема давление будет оставаться постоянным и равным давлению насыщенного пара ($P_{\text{нп}}$). При уменьшении объема на участке 2–3 происходит превращение пара в жидкость. Состояние 3 соответствует жидкости, так как весь пар перейдет в жидкость. Дальнейшее уменьшение объема вызовет резкое увеличение давления, так как жидкость слабосжимаема. Итак, на участке 1–2 система находится в однофазном состоянии — пар (или газ, газ — это ненасыщенный пар некоторой жидкости), участок 2–3 соответствует двухфазному состоянию пар и жидкость и участок 3–4 — однофазному состоянию — жидкость. На рис. 11.2 изображены изотермы реального газа при разных температурах

$$T_1 < T_2 < T_3 < T_4 < \ldots < T_n.$$

Точка K — точка перегиба на кривой, соответствующей температуре T_5 ($T_5 = T_{\text{кр}}$). Точка K соответствует критическому состоянию вещества, при котором исчезает граница между жидкостью и паром. В критической точке плотность жидкости равна плотности пара. Каждому веществу соответствует своя критическая температура ($T_{\text{кр}}$ гелия равно 4 К, воды — 373 К.) Очевидно, что сжижение газов может осуществляться только при температуре ниже критической. Из рис. 11.2 следует, что заштрихованная область соответствует двухфазной области насыщенный пар — жидкость. Штриховая линия отделяет эту область от однофазных областей: пар и жидкость. Из рис. 11.2 видно, что давление насыщенного пара не зависит от объема, а зависит только от температуры. При повышении температуры давление насыщенного пара увеличивается. Если сосуд с жидкостью изолировать от внешней среды (рис. 11.3), то постепенно пар над жидкостью становится насыщенным: количество молекул, переходящих из жидкости в пар, равно количеству молекул, переходящих из пара в жидкость. Насыщенный пар находится в динамическом равновесии с жидкостью. Равнове-

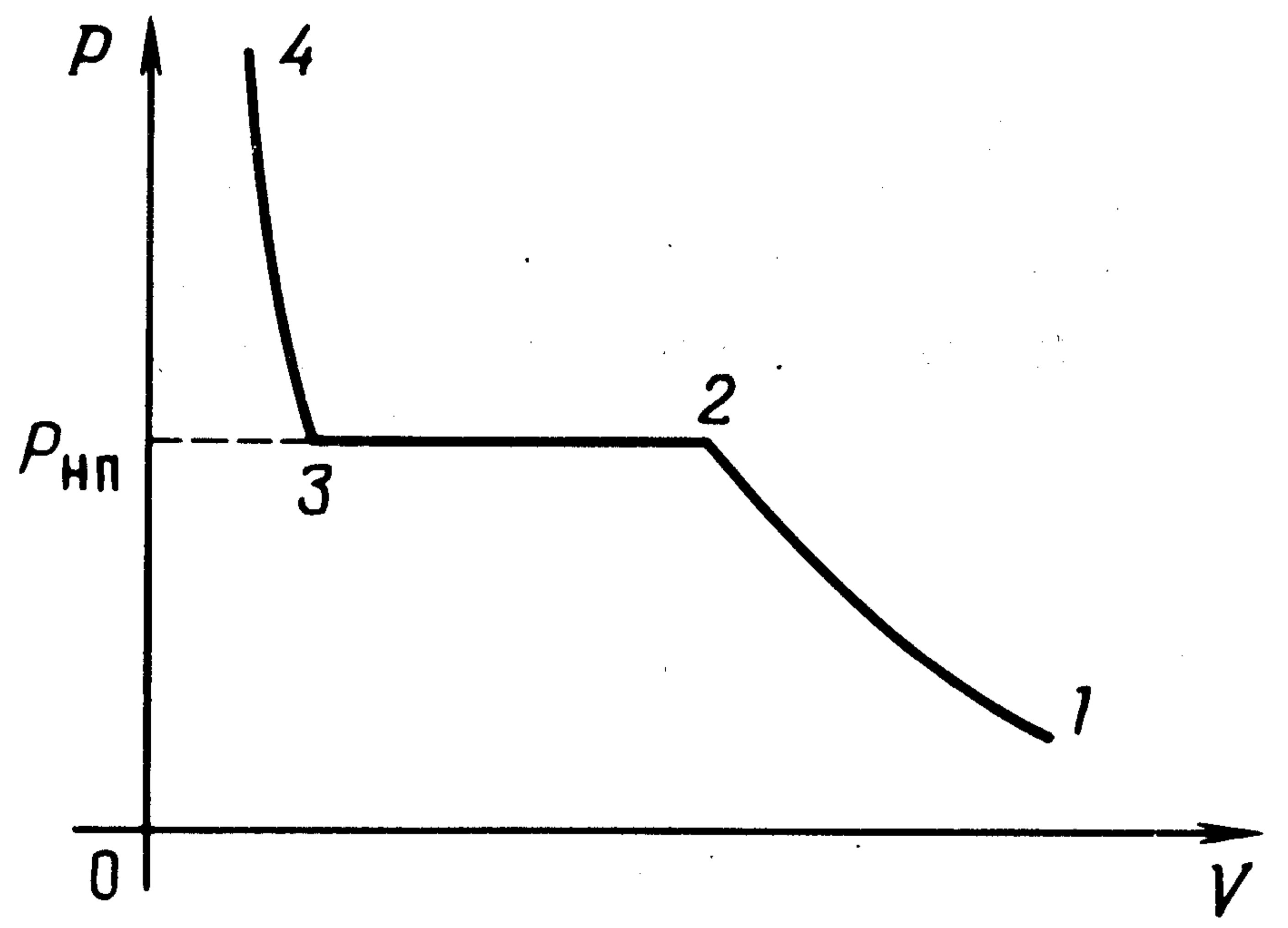


Рис. 11.1.

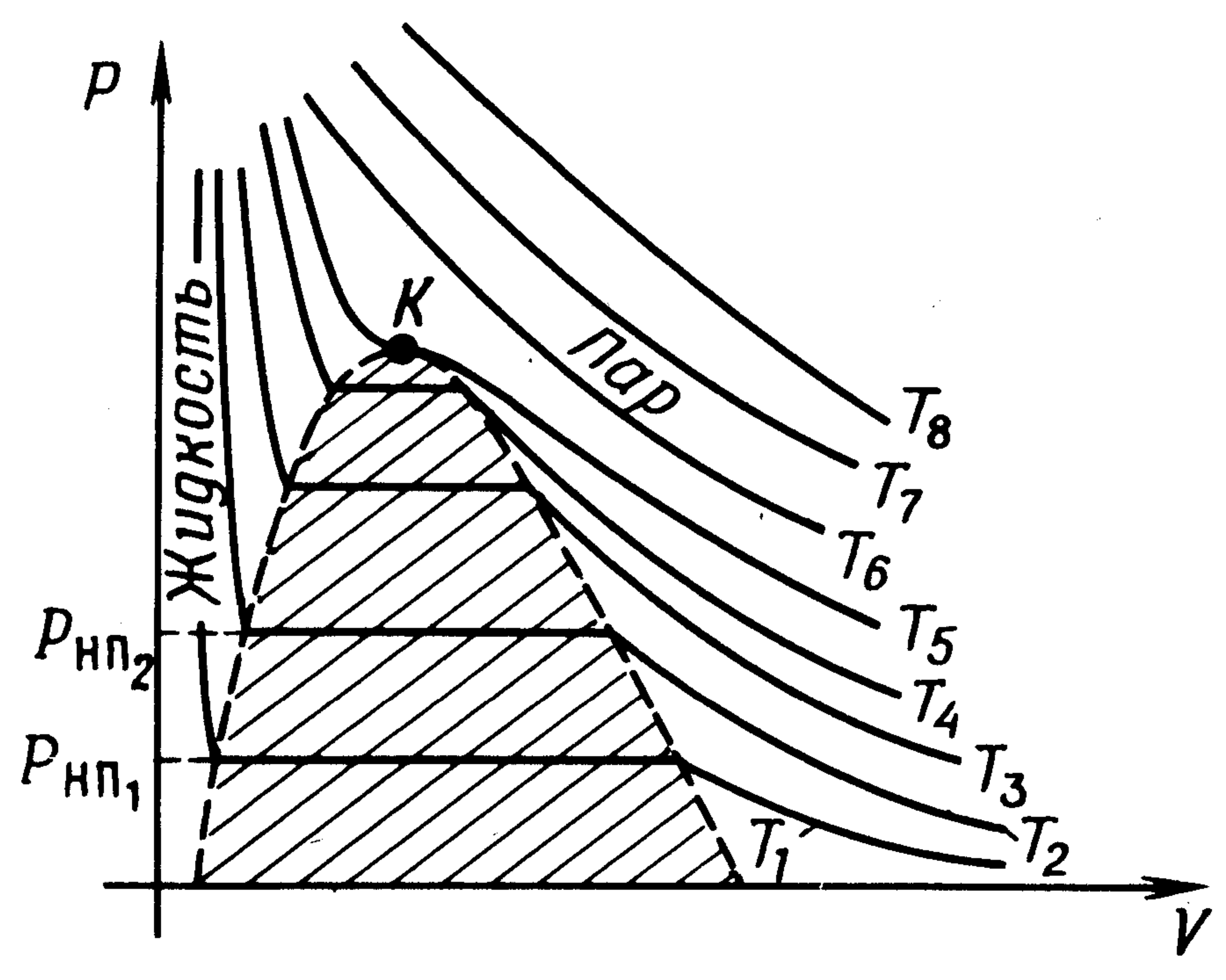


Рис. 11.2.

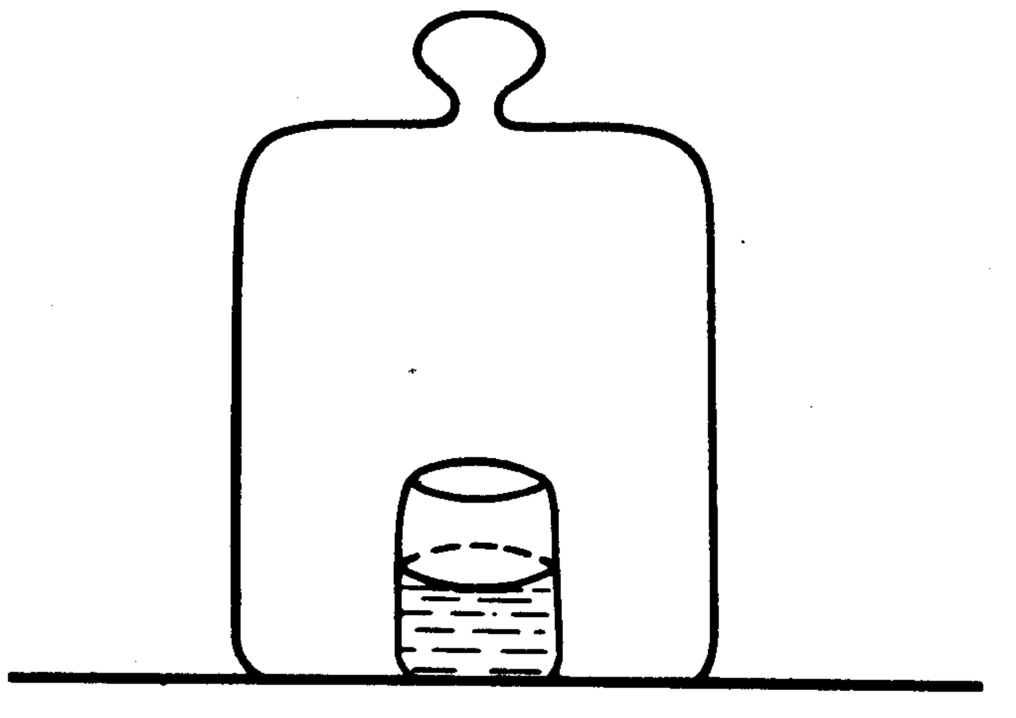


Рис. 11.3.

сие может быть нарушено, если жидкость нагреть (или охладить) или изменить давление пара над жидкостью. Насыщенный пар не подчиняется газовым законам: при постоянном объеме концентрация зависит от температуры и поэтому нет линейной зависимости между P и T, однако уравнение $P = (\rho/M)/RT$ справедливо, т. е., зная давление, можно определить плотность пара.

В воздухе содержится водяной пар. Давление воздуха складывается из парциальных давлений сухого воздуха $P_{с.в.}$ и паров воды $P_п$, т. е. атмосферное давление равно

$$P_{атм} = P_{с.в.} + P_п.$$

Обычно при комнатных температурах $P_п \ll P_{с.в.}$, поэтому часто считается $P_{атм} \approx P_{с.в.}$. Количество пара в воздухе описывается абсолютной и относительной влажностью. *Абсолютная влажность* определяется количеством паров воды в воздухе, т. е. плотностью $\rho_п$. *Относительная влажность* определяется отношением плотности пара к плотности насыщенного пара $\rho_{н.п.}$ при той же температуре, или отношением парциального давления пара к давлению насыщенного пара $P_{н.п.}$ при той же температуре:

$$\varphi = \frac{P_п}{P_{н.п.}} 100\% = \frac{\rho_п}{\rho_{н.п.}} 100\%. \tag{11.1}$$

Относительная влажность обычно измеряется в процентах. Охлаждение ненасыщенного пара при постоянном давлении приводит к тому, что пар становится насыщенным. Температура, при которой ненасыщенный пар при данной абсолютной влажности становится насыщенным, называется *точкой росы*.

Примеры решения задач

Задача 1. В комнате объемом 40 м^3 температура воздуха 20°С, его относительная влажность $\varphi_1 = 20\%$. Сколько надо испарить воды, чтобы относительная влажность φ_2 достигла 50%? Известно, что при 20°С давление насыщающих паров $P_{\text{н.п.}}$=2330 Па.

Дано: $V = 40\,\text{м}^3$, $\varphi_1 = 20\%, \varphi_2 = 50\%$, $T = 293\,\text{К}$, $P_{\text{н.п.}} = 2330\,\text{Па}$; m — ?

Решение. Относительная влажность равна

$$\varphi = \frac{P_{\text{п}}}{P_{\text{н.п.}}}100\%,$$

отсюда

$$\varphi_1 = \frac{P_{\text{п}1}}{P_{\text{н.п.}}}100\%, \quad \varphi_2 = \frac{P_{\text{п}2}}{P_{\text{н.п.}}}100\%.$$

Давления пара при относительных влажностях φ_1 и φ_2 равны

$$P_{\text{п}1} = \frac{\varphi_1 P_{\text{н.п.}}}{100\%}, \quad P_{\text{п}2} = \frac{\varphi_2 P_{\text{н.п.}}}{100\%}.$$

Плотность связана с давление равенством $\rho = (MP/RT)$, откуда

$$\rho_1 = \frac{MP_{\text{п}1}}{RT}, \quad \rho_2 = \frac{MP_{\text{п}2}}{RT}.$$

Массы воздуха в комнате при влажностях φ_1 и φ_2 равны

$$m_1 = \rho_1 V = \frac{MP_{\text{п}1}}{RT}V, \quad m_2 = \rho_2 V = \frac{MP_{\text{п}2}}{RT}V.$$

Масса воды, которую надо испарить, равна

$$m = m_2 - m_1 = \frac{MV}{RT}(P_{\text{п}2} - P_{\text{п}1}) = \frac{MP_{\text{н.п.}}V}{RT100\%}(\varphi_2 - \varphi_1),$$

$$[m] = \frac{(\text{кг/моль})(\text{кг}\cdot\text{м})/(\text{с}^2\cdot\text{м}^2)\text{м}^3}{\text{кг}\cdot\text{м}^2\cdot\text{К}/(\text{с}^2\cdot\text{моль}\cdot\text{К})} = \text{кг},$$

$$m = \frac{0,018\cdot 2330\cdot 40}{8,31\cdot 293\cdot 100}(50-20)\text{кг} = 0,208\text{кг}.$$

Задача 2. В комнате при температуре 15° относительная влажность $\varphi_1 = 10\%$. Как изменится относительная влажность, если температура в комнате повысится на 10°С? Давление насыщенного пара при 15°С $P_{\text{н.п.}1} = 12,8$ мм рт. ст., при $t_2 = 25$°С, $P_{\text{н.п.}2} = 23,8$ мм рт. ст.

Дано: $\varphi_1 = 10\%$, $t_1 = 15$°С, $t_2 = 25$°С, $P_{\text{н.п.}1} = 12,8$ мм рт. ст., $P_{\text{н.п.}2} = 23,8$ мм рт. ст., $\Delta\varphi$ — ?

Решение. Так как пар ненасыщенный, то парциальное давление пара изменяется по закону Шарля: $P_1/T_1 = P_2/T_2$. Из этого уравнения можно определить давление ненасыщенного пара P_2 при T_2: $P_2 = P_1T_2/T_1$. Влажность при T_1 равна

$$\varphi_1 = \frac{P_1}{P_{\text{н.п.}1}}100\%. \tag{11.2}$$

Давление насыщенного пара $P_{\text{н.п.}1}$ при температуре 15°С равно $P_{\text{н.п.}1} = 12,8$ мм рт. ст. Относительная влажность при $t_2 = 25$°С равна

$$\varphi_2 = \frac{P_2}{P_{\text{н.п.}2}}100\% = \frac{P_1}{P_{\text{н.п.}2}}\frac{T_2}{T_1}100\%. \tag{11.3}$$

Из (11.2) имеем

$$P_1 = \frac{\varphi_1 P_{\text{н.п.}1}}{100\%},$$

следовательно,

$$\varphi_2 = \frac{\varphi_1 P_{\text{н.п.}1} T_2}{P_{\text{н.п.}2} T_1} = \frac{10 \cdot 12,8}{23,8}\frac{298}{288}\% = 5,6\%.$$

Задача 3. При температуре $T = 20$°С и давлении 760 мм рт. ст. воздух имеет влажность 100%. На сколько процентов он легче сухого воздуха той же температуры при том же давлении? Масса моля сухого воздуха $M = 29$ кг/кмоль, а давление насыщенного пара при 20°С $P_{\text{н.п.}} = 2,33 \cdot 10^3$ Па.

Дано: $\varphi = 100\%$, $T = 293$ К, $P = 760$ мм рт. ст. $(1,013 \cdot 10^5)$ Па, $M = 29$ кг/кмоль, $P_{\text{н.п.}} = 2,33 \cdot 10^3$ Па; $x\%$ — ?

Решение. Масса сухого воздуха при давлении P равна

$$m = MPV/RT,$$

масса влажного воздуха, находящегося при том же давлении, равна:

$$m_1 = m_{\text{с}} + m_{\text{п}},$$

где $m_{\text{с}}$ — масса газов входящих в состав воздуха, $m_{\text{п}}$ — масса пара. Давление влажного воздуха равно сумме парциальных давлений сухого воздуха и пара:

$$P = P_{\text{с}} + P_{\text{п}},$$

причем $P_{\text{п}} = P_{\text{н.п.}}$, так как $\varphi = 100\%$, а давление газов во влажном воздухе

$$P_{\text{с}} = P - P_{\text{п}}.$$

Масса сухой компоненты во влажном воздухе равна

$$m_{\text{с}} = \frac{M(P - P_{\text{н.п.}})V}{RT},$$

а масса пара во влажном воздухе

$$m_{\text{п}} = \frac{P_{\text{н.п.}} V M_{\text{п}}}{RT}.$$

Таким образом, m_1, масса влажного воздуха, равна

$$m_1 = \frac{[M(P - P_{\text{н.п.}}) + P_{\text{н.п.}} M_{\text{п}}]V}{RT}.$$

Вес воздуха в данном случае равен силе тяжести, т. е. $P = mg$ и $P_1 = m_1 g$, поэтому

$$x = \frac{m - m_1}{m}100\% =$$
$$= \frac{(MPV/RT) - [M(P - P_{\text{н.п.}}) + P_{\text{н.п.}} M_{\text{п}}](V/RT)}{MPV/RT}100\% =$$
$$= \frac{P_{\text{н.п.}}(M - M_{\text{п}})100\%}{MP}; \quad x = 0,9\%.$$

Задача 4. Найдите среднее расстояние между молекулами насыщенного водяного пара при $t = 30°$С. Давление насыщенного пара при температуре 30° равно $P_{\text{н.п.}} = 4,2 \cdot 10^4$ Па.

Дано: $t° = 30°\text{C}$, $P_{\text{н.п.}} = 4,2 \cdot 10^4\,\text{Па}$; $d_{\text{ср}}$ — ?

Решение. Поскольку

$$P = nkT,$$

концентрация молекул пара равна

$$n = P/kT.$$

Объем, приходящийся на одну молекулу, составляет

$$V_M = 1/n = kT/P.$$

Следовательно, расстояние между молекулами

$$d = \sqrt[3]{kT/P} = 3,2 \cdot 10^{-13}\text{м}, \quad [d] = \sqrt[3]{\frac{\text{Н} \cdot \text{м} \cdot \text{К}}{\text{К} \cdot \text{Н}/\text{м}^2}} = \text{м}.$$

Задача 5. В сосуд объема $V = 10^{-2}\,\text{м}^3$, наполненный сухим воздухом при давлении $P_0 = 10^5$ Па и температуре 0°С, вводят $m = 3$ г воды. Сосуд нагревают до 100°С. Каково давление влажного воздуха в сосуде при этой температуре?

Дано: $m = 3\text{г}\,(3 \cdot 10^{-3}\,\text{кг})$, $V = 10^{-2}\,\text{м}^3$, $P_0 = 10^5\,\text{Па}$, $T_0 = 273\,\text{К}$, $T = 373\,\text{К}$; P — ?

Решение. Давление влажного воздуха равно сумме парциальных давлений сухого воздуха и пара:

$$P = P_{\text{в}} + P_{\text{п}}.$$

Предположим, что вся вода испарилась, давление паров определим из уравнения

$$P_{\text{п}} = \frac{m}{M}\frac{RT}{V} = \frac{0,003 \cdot 8,31 \cdot 373}{0,018 \cdot 10^{-2}}\text{Па} = 5,2 \cdot 10^4\text{Па}.$$

Давление пара меньше, чем давление насыщенного пара при 100°С ($P_{\text{н.п.}} = 1,013 \cdot 10^5\text{Па}$), поэтому наше предположение о том, что вся вода испарилась, справедливо. Давление воздуха при нагревании увеличивается по закону Шарля:

$$P_{\text{в}} = \frac{P_0}{T_0}T = \frac{10^5}{273} \cdot 373\,\text{Па} = 1,37 \cdot 10^5\text{Па}.$$

Таким образом, $P = P_{\text{в}} + P_{\text{п}} = 1,89 \cdot 10^5$ Па.

Задача 6. В комнате объемом 64 м^3 при температуре 20°С относительная влажность составляет 60%. Определите массу паров в воздухе комнаты. Давление насыщенных паров воды при 20°С равна 2,33 кПа.

Дано: $V = 64\,\text{м}^3$, $T = 293\,\text{К}$, $\varphi = 60\%$, $P_{\text{н.п.}} = 2,33\,\text{кПа}\,(2,33 \cdot 10^3\,\text{Па})$, $M = 0,018\,\text{кг/моль}$, m — ?

Решение. Найдем давление паров воды:

$$P = P_{\text{н.п.}}(\varphi/100\%) = 0,6P_{\text{н.п.}}$$

Для определения массы водяных паров воспользуемся уравнением Клапейрона — Менделеева:

$$PV = (m/M)/RT,$$

откуда

$$m = \frac{PVM}{RT} = \frac{0,6P_{\text{н.п.}}VM}{RT}.$$

Подставим в последнюю формулу величины, заданные в условии задачи:

$$m = \frac{0,6 \cdot 2,33 \cdot 10^3 \cdot 64 \cdot 0,018}{8,31 \cdot 293}\text{кг} = 0,66\,\text{кг}.$$

Задача 7. Одно и то же количество паров воды содержится при одной и той же температуре в воздухе, занимающем объемы 50 и 40 м^3. Разность относительных влажностей воздуха в этих объемах равна 10%. Плотность насыщенного пара при этой температуре 0,023 кг/м^3. Найти массу паров воды в каждом объеме.

Дано: $V_1 = 50\,\text{м}^3$, $V_2 = 40\,\text{м}^3$, $\varphi_2 - \varphi_1 = 10\%$, $\rho_{\text{н.п.}} = 0,023\,\text{кг/м}^3$; m — ?

Решение. Плотность водяных паров в первом объеме $\rho_1 = m/V_1$, во втором $\rho_2 = m/V_2$. По условию задачи

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \left(\frac{\rho_2}{\rho_{\text{н.п.}}} - \frac{\rho_1}{\rho_{\text{н.п.}}}\right) \times 100\% = 10\%,$$

следовательно,

$$\rho_2 - \rho_1 = 0,1\rho_{\text{н.п.}},$$

откуда

$$\frac{m}{V_2} - \frac{m}{V_1} = 0,1\rho_{\text{н.п.}},$$

или

$$m = 0,1\rho_{\text{н.п.}} \Big/ \left(\frac{1}{V_2} - \frac{1}{V_1}\right). \qquad (11.4)$$

Подставляя числовые данные задачи в (11.4), получаем

$$[m] = \frac{\text{кг/м}^3}{\text{м}^{-3} - \text{м}^{-3}} = \text{кг},$$

$$m = \frac{0,1 \cdot 0,023}{1/40 - 1/50}\text{кг} = 0,46\,\text{кг}.$$

Задача 8. В сосуде объемом V находится воздух при температуре 20°С и влажности 40%. Найти относительную влажность воздуха, если его нагреть до температуры 100°С, а объем уменьшить в четыре раза. Давление насыщенного водяного пара при 20°С равно $2,33 \cdot 10^3$ Па.

Дано: $T = 293\,\text{К}$, $T_1 = 373\,\text{К}$, $\varphi = 40\%$, $V_1 = V/4$, $P_{\text{н.п.}} = 2,33 \cdot 10^3\,\text{Па}$; φ_1 — ?

Решение. Найдем давление воздуха при 20°С:

$$P = \varphi P_{\text{н.п.}}.$$

Так как ненасыщенные водяные пары подчиняются газовым законам, то из уравнения

$$PV/T = P_1V_1/T_1$$

найдем:

$$P_1 = \frac{PVT_1}{TV_1} = \frac{PVT_1 4}{TV} = \frac{4PT_1}{T}.$$

Таблица 11.1

Давление насыщенного пара						
Температура, °C	18	15	13	10	8	5
Давление: мм рт. ст.	15,5	12,0	11,2	9,2	8,0	6,6
Па	$2,07 \cdot 10^4$	$1,6 \cdot 10^4$	$1,5 \cdot 10^4$	$1,23 \cdot 10^4$	$1,07 \cdot 10^4$	$8,8 \cdot 10^3$

При температуре 100°C (температура кипения воды) давление насыщенного пара равно атмосферному давлению $P_{\text{атм}} = 10^5$ Па. Тогда относительная влажность равна

$$\varphi_1 = (P_1/P_{\text{атм}})100\%.$$

Окончательно имеем

$$\varphi_1 = \frac{4\varphi P_{\text{н.п.}} T_1 100\%}{TP}.$$

Подставив числовые данные задачи, получим

$$\varphi_1 = \frac{4 \cdot 0,4 \cdot 2,33 \cdot 10^3 \cdot 373 \cdot 100\%}{293 \cdot 10^5} = 4,75\%.$$

Задача 10. Относительная влажность воздуха в помещении 60%, температура 18°C. До какой температуры надо охладить металлический предмет, чтобы его поверхность "запотела"?

Дано: $\varphi = 60\%$, $T = 291$ K, $P_{\text{н.п.}} = 2 \cdot 10^4$ Па; T_2 — ?

Решение. Относительная влажность воздуха

$$\varphi = (P/P_{\text{н.п.}})100\%.$$

Для конденсации пара необходимо, чтобы он стал насыщенным, т. е. температура достигла точки росы. Давление пара при 18°C должно стать равным давлению насыщенного пара при искомой температуре:

$$P = \frac{\varphi P_{\text{н.п.}}}{100\%} = 1,24 \cdot 10^4 \text{Па}.$$

Давление насыщенного пара равно $P_{\text{н.п.}} = 1,23 \cdot 10^4$ Па при t_2°C = 10°C (находится по таблице). Следовательно, $t_2^\circ \simeq 10$°C.

Задачи для самостоятельного решения

Задача 1. Смешали 5 м^3 воздуха с относительной влажностью 22% при температуре 15°C и 3 м^3 воздуха с относительной влажностью 46% при температуре 28°C. Определить относительную влажность смеси, если ее объем 8 м^3.

Ответ: 37%.

Задача 2. Температура воздуха вечером была 18°C, относительная влажность 65%. Ночью температура воздуха понизилась до 9°C. Была ли роса? Если была, то сколько водяного пара конденсировалось из 1 м^3 воздуха? При 18°C плотность насыщенного пара равна 15,4 г/м^3, при 9°C — 8,8 г/м^3.

Ответ: Была; 1,2 г/м^3.

Задача 3. Какое количество росы выпадает из $1\,м^3$ воздуха при изотермическом уменьшении его объема в 5 раз, если температура воздуха $10°C$, а относительная влажность 60%? Плотность насыщенного водяного пара при $10°C$ равна $9,43\,г/м^3$.

Ответ: $3,77\,г/м^3$.

Задача 4. В комнате объемом $V = 50\,м^3$ относительная влажность воздуха $\varphi_1 = 40\%$. Если испарить дополнительно 60 г воды, то относительная влажность будет 50%. Определить температуру воздуха в комнате. Давление насыщенного пара при $20°C$ равно 17,5 мм рт. ст.

Ответ: $20°C$.

Задача 5. Определите отношение плотностей сухого воздуха и воздуха с относительной влажностью $\varphi = 50\%$, давление равно атмосферному ($P_{атм} = 10^5\,Па$) и температура $20°C$. Отношение молярных масс пара и воздуха $M_п/M_в = 0,6$. Давление насыщенного пара при этой температуре $P_{н.п.} = 23$ кПа.

Ответ: $\rho_1/\rho_2 = 1,005$.

Задача 6. В герметически закрытом сосуде объемом $V = 1,1$ л находится $m = 0,1$ кг кипящей воды и пары воды при температуре $100°C$. (Воздуха в сосуде нет.) Найти массу пара.

Ответ: 0,6 г.

Задача 7. В помещение надо подать $2 \cdot 10^4\,м^3$ воздуха при температуре $18°C$ и относительной влажности 50%, забирая его с улицы при температуре $10°C$ и относительной влажности 60%. Сколько воды надо дополнительно испарить в подаваемый воздух? Плотность насыщенного пара при $10°\,C - 9,4 \cdot 10^{-3}\,кг/м^3$, при $18°\,C - 15,4 \cdot 10^{-3}\,кг/м^3$.

Ответ: 41,2 кг.

Глава 12
Свойства жидкости

Силы взаимодействия между молекулами жидкости больше, чем силы взаимодействия между молекулами газа. Рассмотрим молекулу 1 (рис. 12.1), находящуюся на поверхности жидкости, и молекулу 2, находящуюся внутри жидкости. Молекула 2 со всех сторон равномерно окружена молекулами и результирующая сила, действующая на нее со стороны окружающих ее молекул, равна нулю. Концентрация молекул в жидкости больше, чем в газе, поэтому сила, действующая на молекулу 1 со стороны окружающих ее молекул, отлична от нуля и направлена внутрь жидкости. Следовательно, переход молекулы из толщи жидкости в поверхностный слой сопровождается совершением работы против указанной силы, т. е. молекулы на поверхности обладают большей потенциальной энергией. Всякая система стремится прийти в состояние с минимальной потенциальной энергией, поэтому поверхность жидкости стремится сжаться, на поверхности жидкости должно оставаться как можно меньше молекул. Поэтому свободно летящая капля жидкости имеет сферическую форму, так как при данном объеме площадь поверхности сферы минимальна. Пусть пленка жидкости натянута на рамку, одна сторона которой подвижна (рис. 12.2). Для удержания в покое подвижной стороны рамки должна действовать сила $\mathbf{F}$, направленная в сторону, противоположную силе поверхностного натяжения $\mathbf{F}_\text{п}$, стремящейся уменьшить площадь поверхности пленки. *Сила поверхностного натяжения* направлена по касательной к поверхности жидкости и прямо пропорциональна длине стороны рамки l:

$$F = 2\alpha l,$$

где α — коэффициент поверхностного натяжения, который равен силе поверхностного натяжения, действующей на единицу длины контура, ограничивающего поверхность жидкости, коэффициент 2 появляется потому, что у пленки 2 поверхности:

$$\alpha = F/2l. \tag{12.1}$$

При увеличении площади поверхности жидкости внешними силами должна быть совершена работа

$$A = 2\alpha l x = \alpha \Delta S,$$

где ΔS — изменение площади поверхности. Отсюда

$$\alpha = A/\Delta S, \tag{12.2}$$

т. е. *коэффициент поверхностного натяжения* численно равен работе, которую надо совершить, чтобы увеличить площадь поверхности жидкости на единицу.

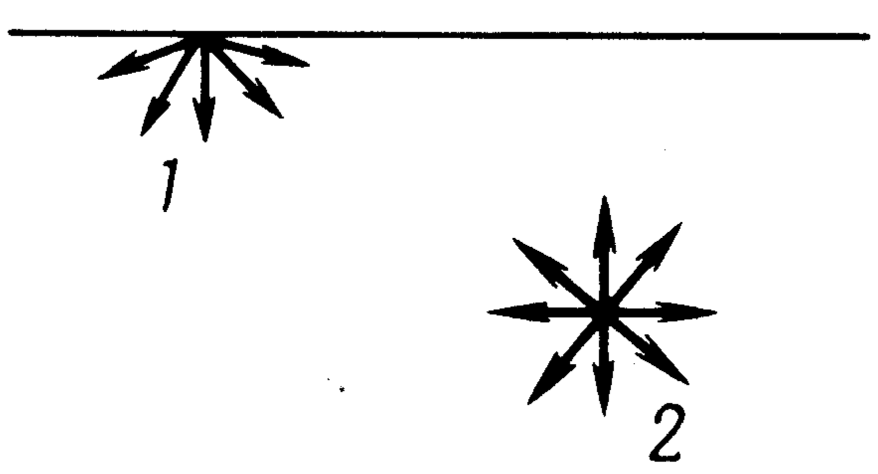


Рис. 12.1.

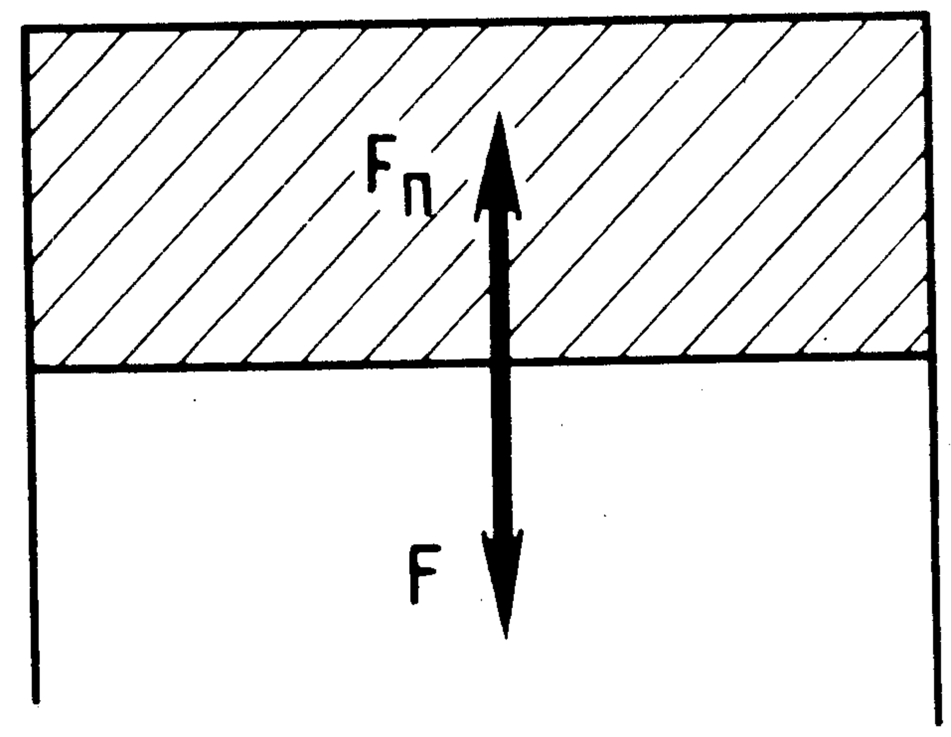


Рис. 12.2.

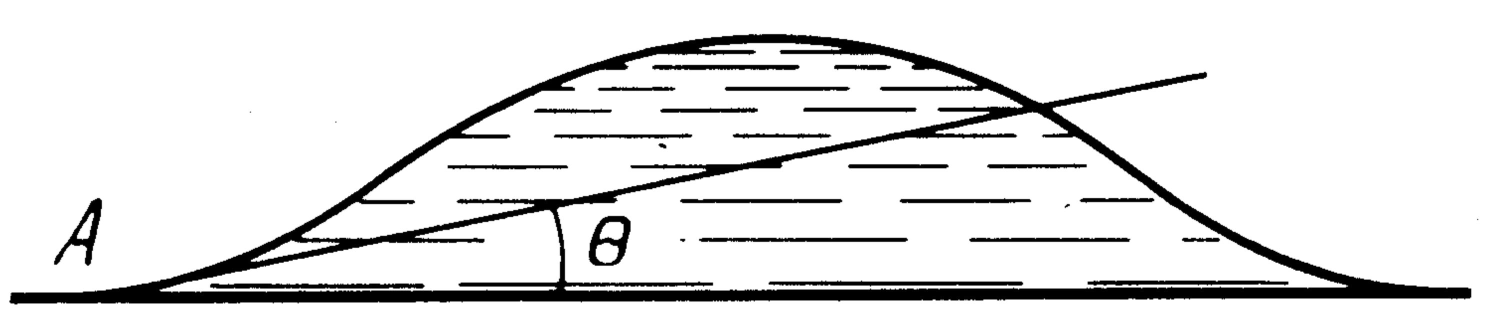


Рис. 12.3.

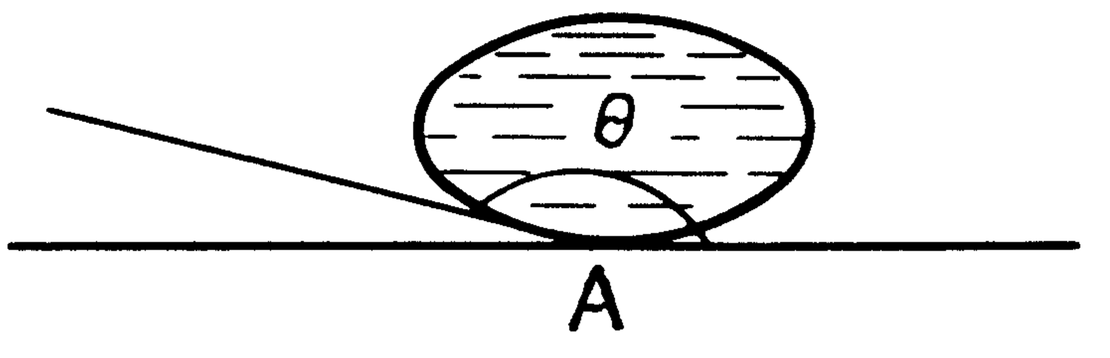


Рис. 12.4.

На поверхности твердого тела форма капли может быть разной. Капля может растекаться по поверхности твердого тела (рис. 12.3), это означает, что сила взаимодействия между молекулами жидкости меньше, чем между молекулами жидкости и твердого тела, в этом случае жидкость смачивает поверхность твердого тела. Угол θ (краевой угол) между плоскостью, касательной к поверхности жидкости в точке A, и поверхностью твердого тела меньше $\pi/2$. Капля может собираться на поверхности твердого тела (рис. 12.4). В этом случае силы взаимодействия между молекулами жидкости больше, чем между молекулами жидкости и твердого тела ($\theta > \pi/2$), т. е. жидкость не смачивает поверхность твердого тела. Если $\theta = 0$, то наблюдается полное (идеальное) смачивание. Наличие поверхностного натяжения объясняет форму поверхности в тонких трубках — капиллярах. Если капилляр радиуса r_0 опустить в жидкость, смачивающую поверхность капиллярной трубки, то жидкость стремится растечься по поверхности и поднимается. Высоту подъема жидкости можно оценить из условия равновесия столбика жидкости (рис. 12.5). На столбик жидкости действуют сила тяжести и сила поверхностного натяжения, направленная по касательной к поверхности к каждому элементу контура. В силу симметрии сила поверхностного натяжения равна

$$F_{\text{п.н.}} = \alpha 2\pi r_0 \cos\theta$$

и направлена вверх. Сила тяжести равна

$$F_{\text{т}} = mg = \rho h \pi r_0^2 g.$$

Из условия равновесия имеем

$$\alpha 2\pi r_0 \cos\theta = \rho h \pi r_0^2 g,$$

отсюда

$$h = 2\alpha\cos\theta/\rho g r_0. \tag{12.3}$$

Если капилляр опустить в жидкость, не смачивающую поверхность капилляра, то жидкость опускается в капилляре, поскольку сила поверхностного натяжения будет направлена вниз (рис. 12.6). Высота, на которую опустится жидкость

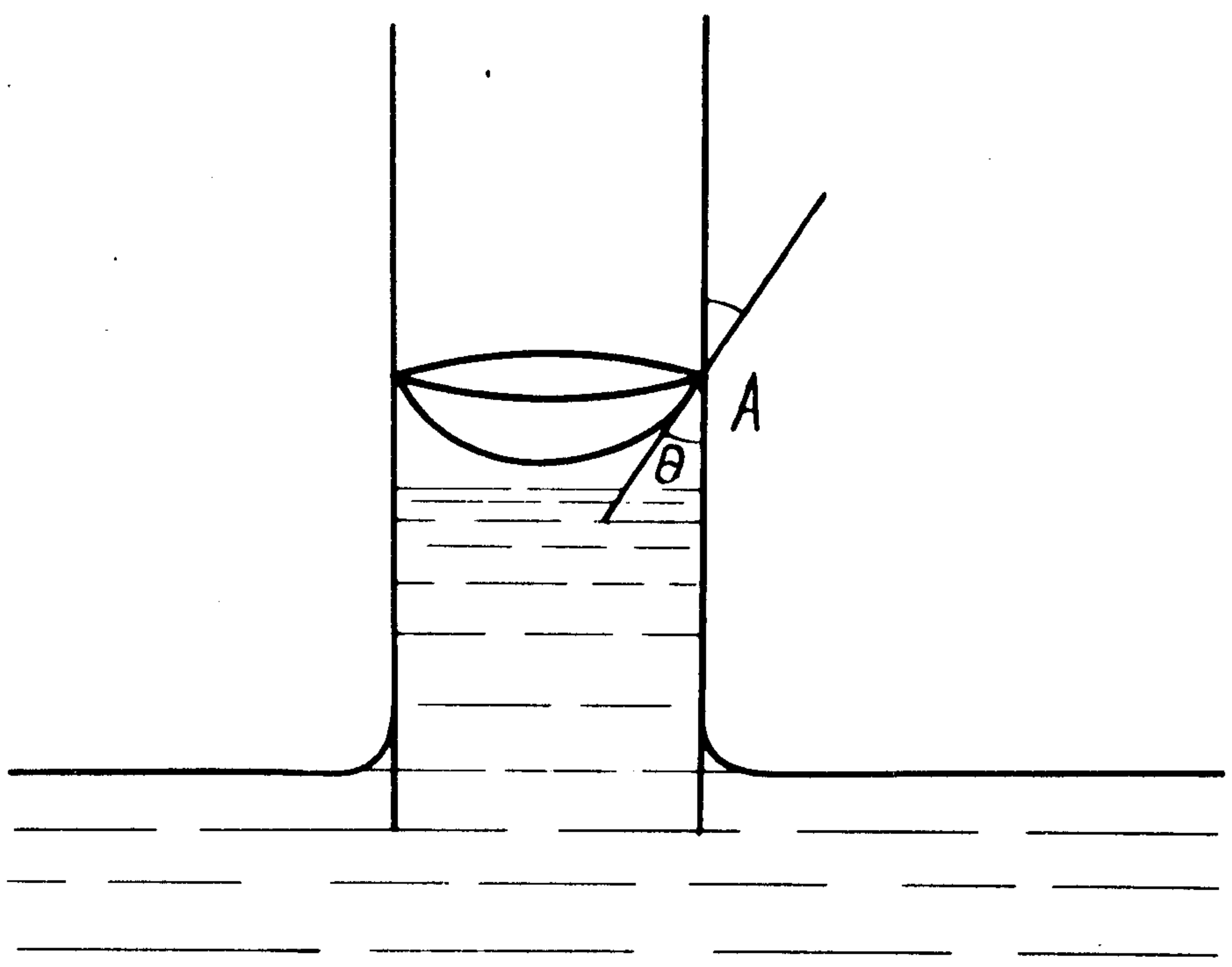


Рис. 12.5.

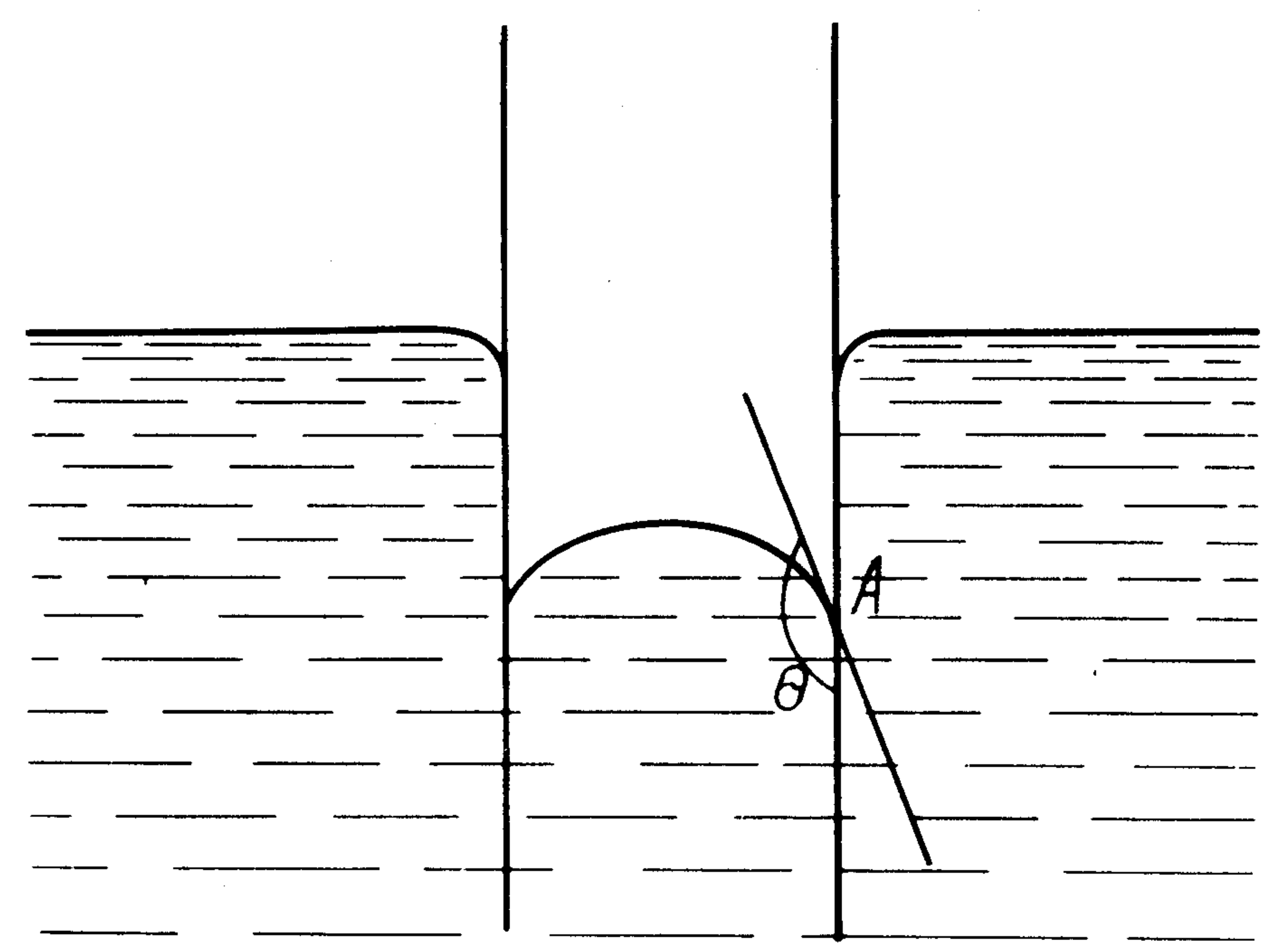


Рис. 12.6.

в капилляре, также может быть рассчитана по формуле (12.3). Давление жидкости под искривленной поверхностью отличается от давления под горизонтальной поверхностью жидкости. Выделим на искривленной поверхности правильную фигуру $ABCD$ (рис. 12.7). Поверхность имеет два радиуса кривизны R_1 и R_2 — радиусы кривизны поверхности жидкости в двух взаимно перпендикулярных плоскостях. На выделенную часть поверхности действуют силы $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$, $\mathbf{F}_3$, $\mathbf{F}_4$. Вследствие симметрии $F_{1x} = F_{2x}$, следовательно, сумма проекций сил на ось x равна нулю. Сумма проекций на ось y равна

$$F_y = F_{1y} + F_{2y},$$

в силу симметрии $F_{1y} = F_{2y}$, следовательно, $F_y = 2F_{1y}$. Из подобия треугольников $F_{1x}F_1M$ и MOO_1 следует

$$\frac{MO}{R_1} = \frac{F_{1y}}{F_1}, \quad F_{1y} = F_1 MO/R_1.$$

Сила F_1 определяется силой поверхностного натяжения, действующей на сторону AB:

$$F_1 = \alpha l_{AB},$$

откуда

$$F_y = 2F_{1y} = 2\alpha l_{AB} MO/R_1 = \alpha \Delta S/R_1.$$

Добавочное давление в жидкости, обусловленное кривизной поверхности радиуса R_1, равно

$$\Delta P_1 = F_y/\Delta S = \alpha/R_1.$$

Добавочное давление, обусловленное кривизной поверхности радиуса R_2, есть

$$\Delta P_2 = \alpha/R_2.$$

Суммарное добавочное давление равно

$$\Delta P = \Delta P_1 + \Delta P_2 = \alpha \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) \tag{12.4}$$

(формула Лапласа). Радиус кривизны считается положительным, если центр кривизны находится в жидкости. На рис. 12.7 R_1 и $R_2 > 0$. Радиус кривизны

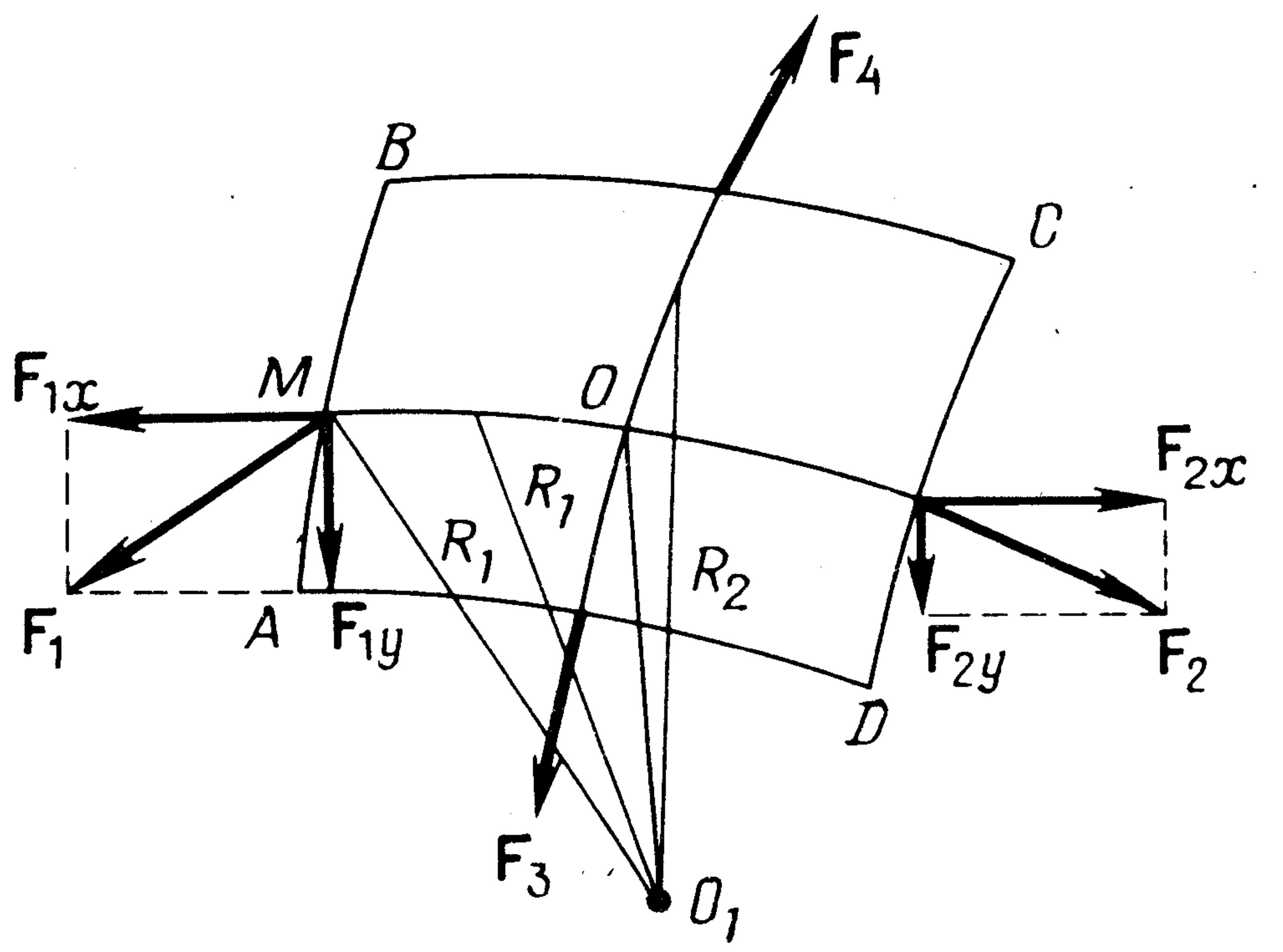


Рис. 12.7.

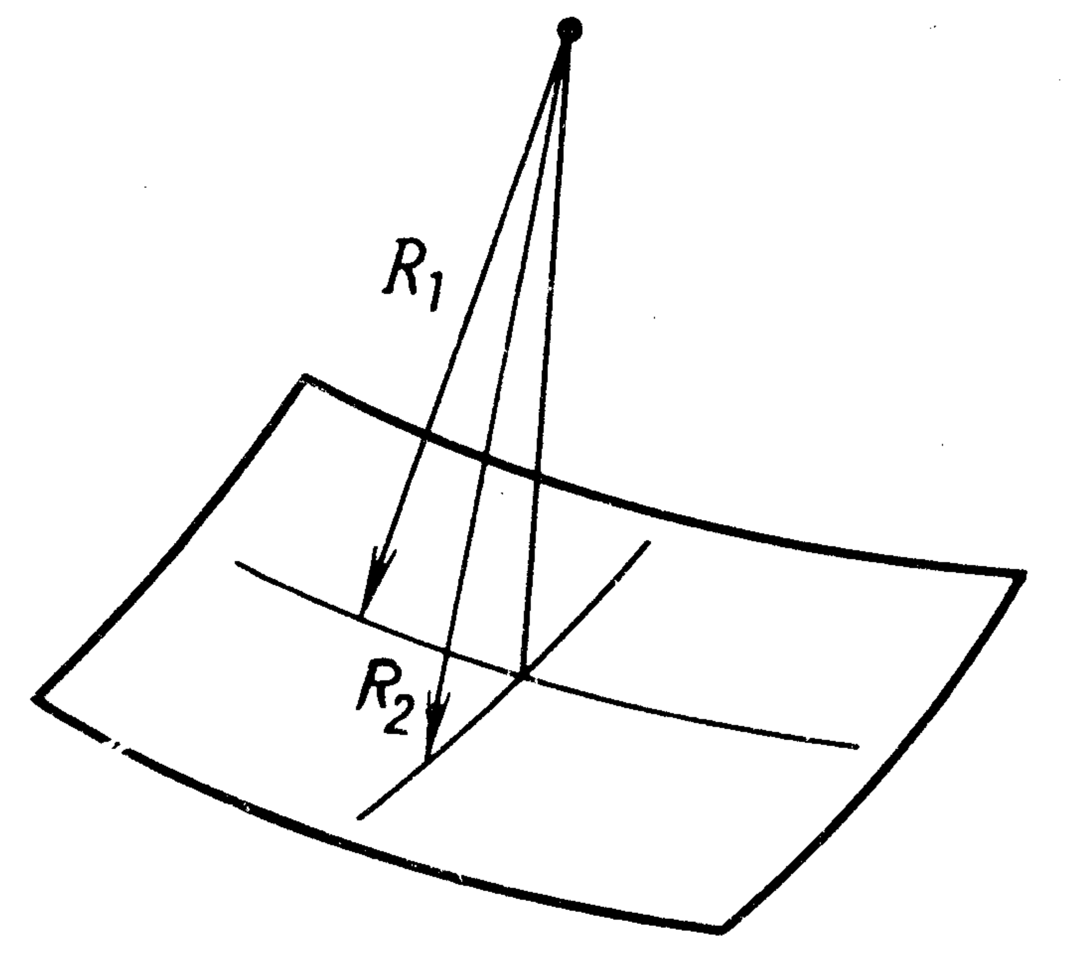


Рис. 12.8.

считается отрицательным, если центр кривизны находится вне жидкости. На рис. 12.8 $R_1 < 0$ и $R_2 < 0$.

Можно рассчитать высоту подъема жидкости в капилляре по формуле (12.4). Если капилляр смачивается жидкостью (рис. 12.9), то поверхность жидкости в капилляре имеет отрицательные радиусы кривизны

$$R_1 = R_2 = R < 0,$$

тогда

$$\Delta P = 2\alpha/R < 0.$$

Следовательно, давление в точке A меньше, чем в точке B. Так как давление в капилляре должно быть равно давлению на том же уровне в сосуде (закон сообщающихся сосудов), то жидкость поднимается в капилляре для компенсации уменьшения давления на высоту h:

$$\Delta P = 2\alpha/R = \rho g h, \tag{12.5}$$

где R — радиус кривизны поверхности жидкости в капилляре:

$$R = r_0/\cos\theta,$$

где r_0 — радиус капилляра, θ — краевой угол. Тогда уравнение (12.5) преобразуется к виду

$$2\alpha\cos\theta/r_0 = \rho g h,$$

откуда

$$h = 2(\alpha/\rho g r_0)\cos\theta,$$

что совпадает с (12.3).

Если жидкость не смачивает поверхность капилляра, то поверхность жидкости в капилляре будет выпуклой $R_1 = R_2 = R > 0$ и $\Delta P > 0$. По закону сообщающихся сосудов жидкость в капилляре опускается.

Примеры решения задач

Задача 1. С какой минимальной высоты должна упасть капля радиуса R, чтобы она разбилась на n одинаковых маленьких капель? Коэффициент поверхностного натяжения α, плотность жидкости ρ. Температура жидкости не изменяется.

Дано: R, n, ρ, α; h — ?

Решение. При образовании n капель полная площадь поверхности жидкости увеличивается на ΔS:

$$\Delta S = n4\pi r^2 - 4\pi R^2,$$

где r — радиус маленькой капли. Для увеличения площади поверхности должна быть совершена работа

$$A = \alpha 4\pi(r^2 n - R^2). \tag{12.6}$$

Эта работа равна увеличению потенциальной энергии поверхностного слоя жидкости, которое будет происходить за счет уменьшения потенциальной энергии капли, обусловленной силой тяжести:

$$E_{\text{п}} = mgh.$$

Масса капли равна

$$m = \rho(4/3)\pi R^3.$$

Объем жидкости сохраняется, поэтому

$$(4/3)\pi R^3 = n(4/3)\pi r^3,$$

откуда

$$r = R/n^{1/3}.$$

Подставим эти выражения в равенство (12.6):

$$E_{\text{п}} = A,$$
$$\rho(4/3)\pi R^3 gh = \alpha 4\pi R^2(n^{1/3} - 1),$$

откуда

$$h = 3\alpha(n^{1/3} - 1)/\rho Rg.$$

Проверим размерность полученного результата:

$$[h] = \frac{\text{Н} \cdot \text{м}^3 \cdot \text{с}^2}{\text{м} \cdot \text{кг} \cdot \text{м} \cdot \text{м}} = \frac{\text{кг} \cdot \text{м}^4 \cdot \text{с}^2}{\text{м}^3 \cdot \text{с}^2 \cdot \text{кг}} = \text{м}.$$

Задача 2. Найдите коэффициент поверхностного натяжения жидкости α, если петля из резиновой нити длины l и жесткости k, положенная на пленку этой жидкости, растянулась по окружности радиуса R, после того как пленка была проколота внутри петли (рис. 12.10).

Дано: l, R, k; α — ?

Решение. После прокалывания пленки сила поверхностного натяжения, действующая на нить изнутри, станет равна нулю, так что на нее будет действовать сила поверхностного натяжения только со стороны внешнего слоя жидкости.

Рассмотрим половину нити (рис. 12.10). На нее действуют силы натяжения $\mathbf{F}_1$ и $\mathbf{F}_2$, равные

$$F_1 = F_2 = k\Delta l,$$

где Δl — удлинение нити, равное $(2\pi R - l)$. В силу симметрии очевидно, что суммарная сила поверхностного натяжения направлена вдоль y.

Рассмотрим два симметричных элемента 1 и 2. Силы, действующие на эти элементы, равны $\Delta F_{\text{п}1} = \Delta F_{\text{п}2} = 2\alpha\Delta l$. Проекции этих сил на ось x равны по

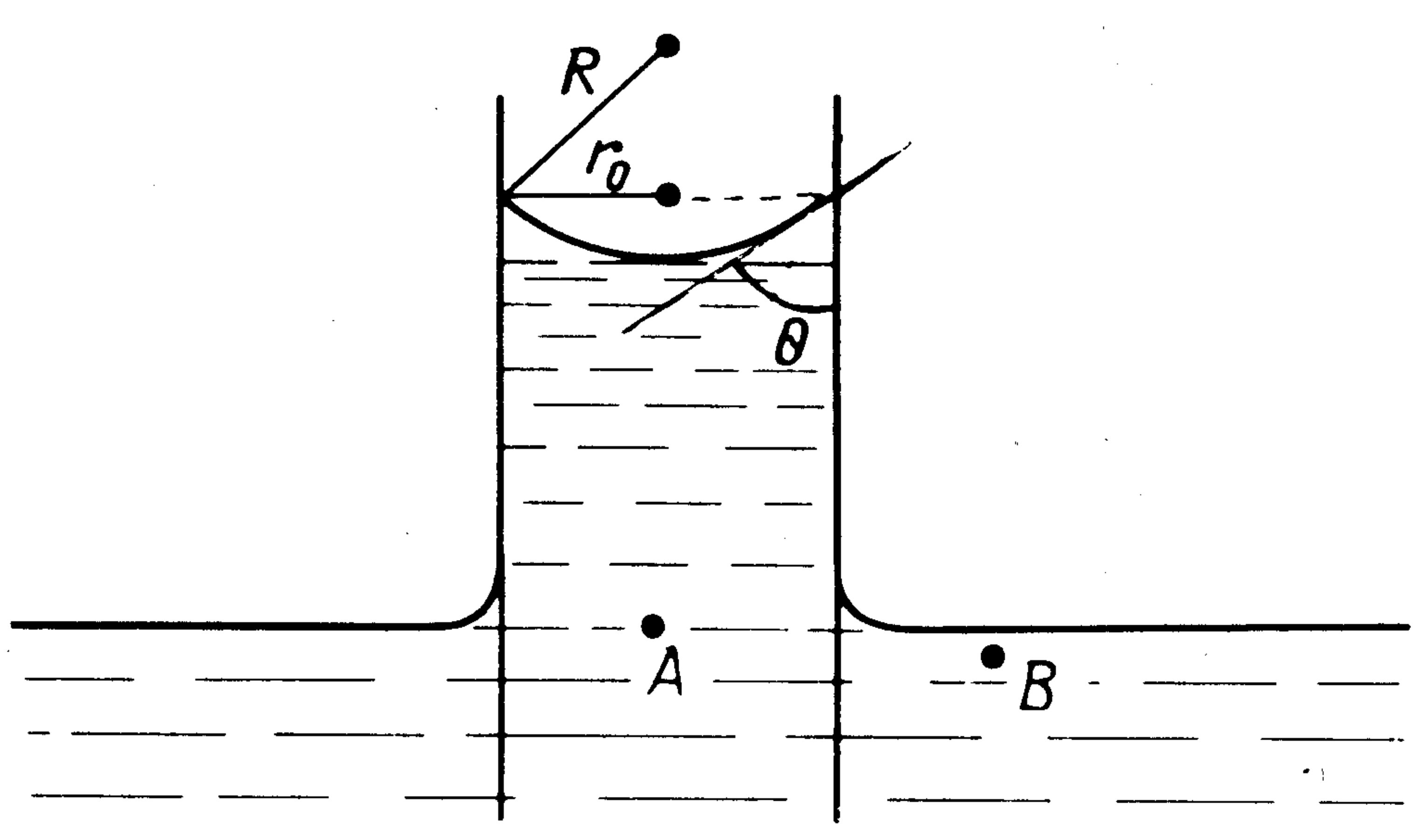


Рис. 12.9.

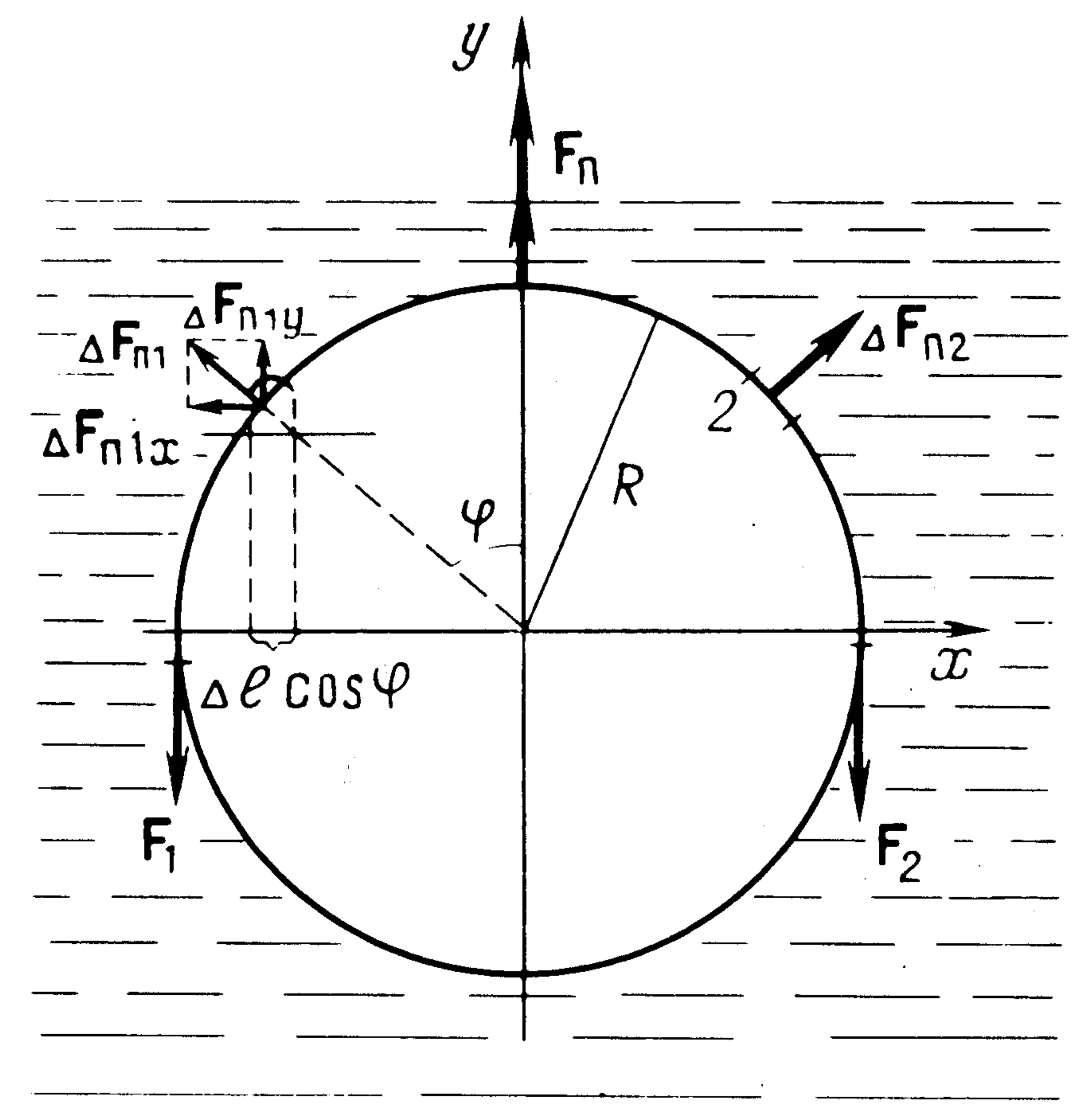


Рис. 12.10.

величине и противоположны по направлению. Компоненты y этих сил направлены в одну сторону и равны

$$\Delta F_{п1y} = \Delta F_{п1} = 2\alpha\Delta l\cos\varphi.$$

Очевидно, что произведение $\Delta l\cos\varphi$ равно проекции Δl на ось x. Суммируя все y-компоненты силы поверхностного натяжения, действующие на каждый элемент половины нити, получим

$$F_п = 2(\alpha\cdot 2R).$$

Условие равновесия половины нити имеет вид

$$\mathbf{F}_п + \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 = 0.$$

В проекции на ось y, получим

$$F_п - F_1 - F_2 = 0,$$

откуда $4\alpha R = 2k(2\pi R - l) = 0$.

Окончательно имеем:

$$\alpha = \frac{k(2\pi R - l)}{2R}.$$

Задача 3. Определить силу, которая может растащить два стекла, между которыми попала капля воды массой m. Расстояние между стеклами d, коэффициент поверхностного натяжения воды α, плотность воды ρ. Вода полностью смачивает поверхность стекол (рис. 12.11).

Дано: ρ, α, d, m; F — ?

Решение. Стекла прижаты друг к другу благодаря тому, что давление в жидкости меньше атмосферного. Поверхность жидкости искривлена, радиусы кривизны $R_1 = d/2 < 0$, $R_2 > 0$. Объем капли равен $V = \pi R_2^2 d$ (пренебрегаем тем, что образующая цилиндра вогнутая кривая и считаем объем капли равным объему цилиндра). Объем капли можно выразить иначе: $V = m/\rho$, откуда $R_2 = \sqrt{m/\pi\rho d}$.

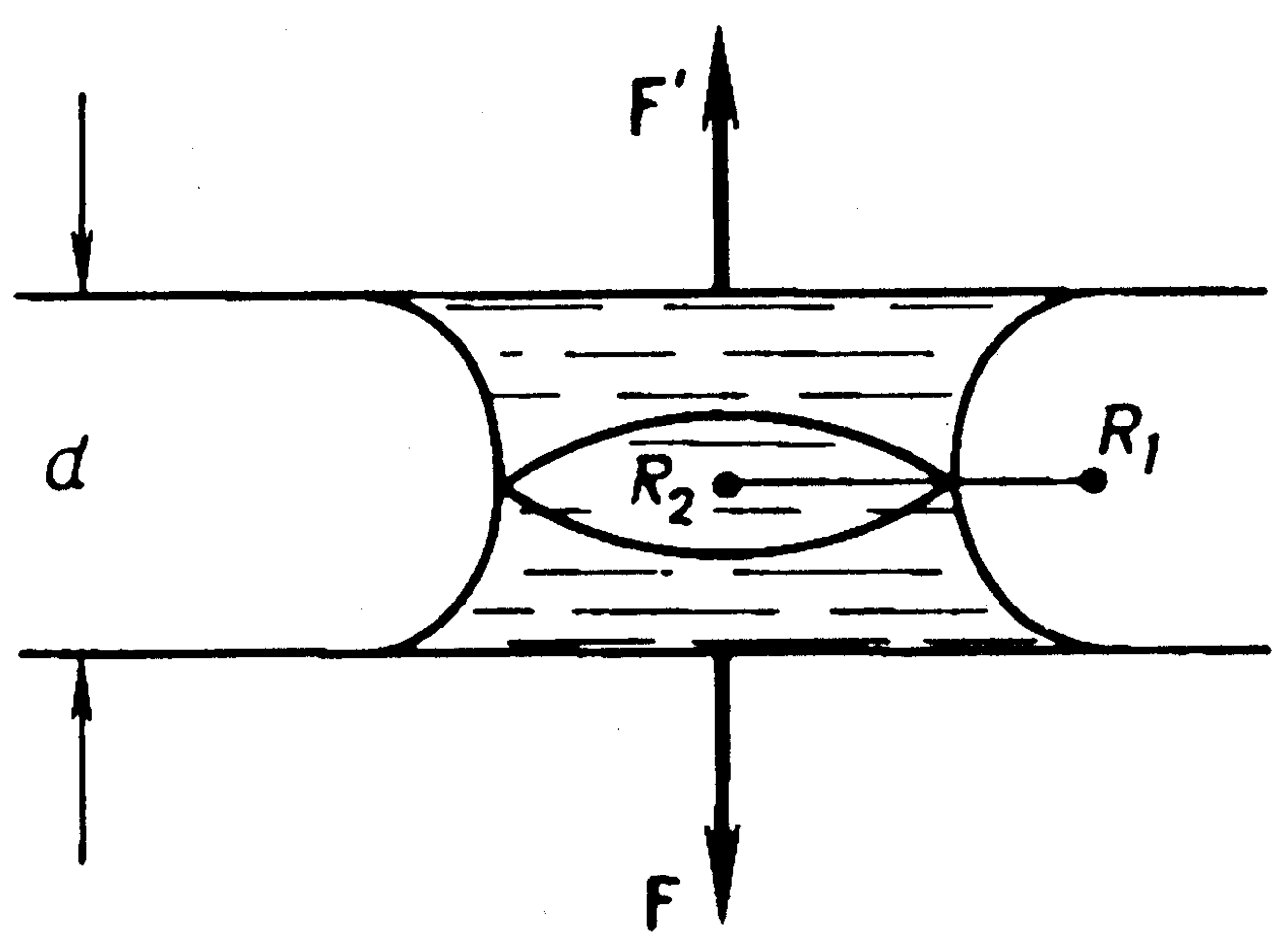


Рис. 12.11.

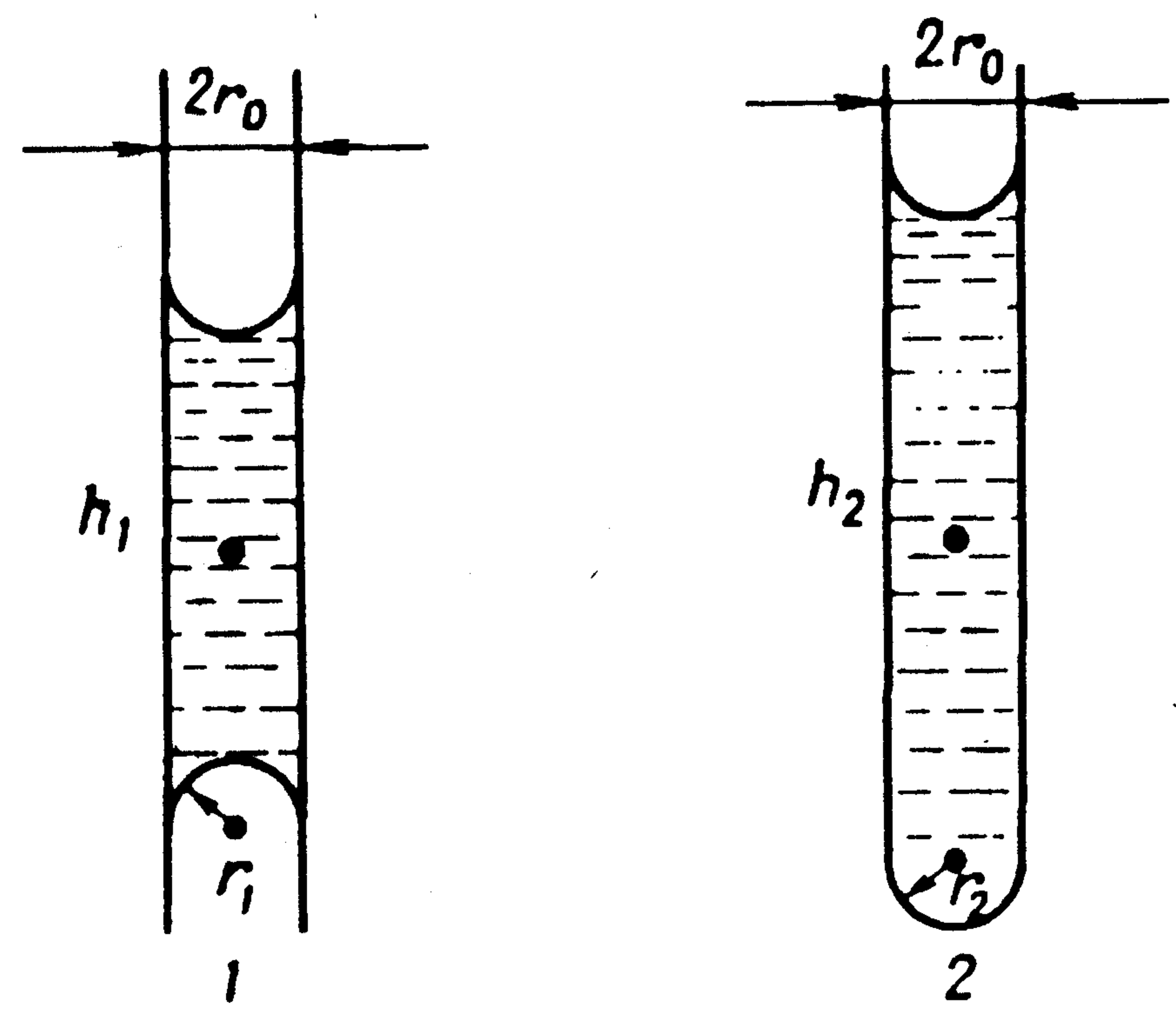


Рис. 12.12.

Поскольку R_2 больше R_1 (расстояние между стеклами мало),

$$\Delta P = \alpha\left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}\right) < 0.$$

Искомая сила равна

$$F = F' = \Delta P S = \Delta P \pi R_2^2,$$

$$F = \alpha\left(\sqrt{\frac{\pi\rho d}{m}} - \frac{2}{d}\right)\frac{m}{\rho d},$$

$$[F] = \frac{\text{Н}}{\text{м}}\left[\sqrt{\frac{\text{кг}\cdot\text{м}}{\text{м}^3\cdot\text{кг}}} - \frac{1}{\text{м}}\right]\frac{\text{кг}}{(\text{кг}/\text{м}^3)\cdot\text{м}} = \text{Н}.$$

Задача 4. В двух длинных открытых с обеих сторон капиллярах, расположенных вертикально, находятся столбики воды $h_1 = 2$ см и $h_2 = 4$ см. Найдите радиус кривизны нижнего мениска в каждом из капилляров, если их внутренний диаметр равен $d_0 = 1$ мм, а смачивание полное (рис. 12.12)

Дано: $h_1 = 2\,\text{см}\,(0,02\,\text{м})$, $h_2 = 4\,\text{см}\,(0,04\,\text{м})$, $d_0 = 1\,\text{мм}\,(1\cdot 10^{-3}\,\text{м})$, $\alpha = 0,073\,\text{Н/м}$; r_1 — ? r_2 — ?

Решение. Оценим, на какую высоту может подняться столбик воды в данном капилляре, одним концом опущенном в воду:

$$h_0 = \frac{2\alpha}{\rho g r_0} \quad \left(r_0 = \frac{d_0}{2}\right),$$

$$h_0 = \frac{2\cdot 0,073}{10^3\cdot 10\cdot 0,5\cdot 10^{-3}}\,\text{м} = 0,0292\,\text{м}.$$

Так как $h_0 > h_1$, то сила тяжести, действующая на столбик высотой h_1, не может уравновесить силу, обусловленную кривизной верхней поверхности и направленную вверх, поэтому нижний мениск вогнутый. Радиус этого мениска r_1 связан с радиусом капилляра r_0 выражением (рис.12.12)

$$r_1 = r_0/\cos\theta.$$

Столбик воды в капилляре удерживается разностью сил давлений. Итак, искривление верхней поверхности способствует удержанию жидкости в капилляре, искривление нижней — вытеснению, но $r_1 > r_0$. Результирующая сила, обусловленная силами поверхностного натяжения, направлена вверх и равна

$$F = 2\alpha\left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r_1}\right)S,$$

где S — площадь сечения капилляра.

Условие равновесия столбика жидкости имеет вид

$$F = mg, \text{ или } 2\alpha\left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r_1}\right)S = \rho g h S,$$

откуда

$$r_1 = 2\alpha/(2\alpha/r_0 - \rho g h).$$

Во втором случае $h_0 < h_2$, поэтому обе силы, обусловленные кривизной поверхности, должны быть направлены вверх — нижний мениск выпуклый.

Результирующая сила направлена вверх и равна

$$F = 2\alpha\left(\frac{1}{r_0} + \frac{1}{r_2}\right)S,$$

где r_2 — радиус кривизны нижнего мениска. Условие равновесия имеет вид

$$2\alpha\left(\frac{1}{r_0} + \frac{1}{r_2}\right)S = \rho g h S.$$

Окончательно искомый радиус кривизны определится из выражения:

$$r_2 = 2\alpha/\left(\rho g h - 2\alpha/r_0\right).$$

Подстановка численных значений дает

$$r_1 = 1{,}47 \cdot 10^{-3}\text{м}, \quad r_2 = 0{,}3 \cdot 10^{-3}\text{м}.$$

Задача 5. Левое колено V-образной капиллярной трубки имеет радиус 0,5 мм, а правое — 1 мм. Какова разность уровней воды в этой трубке? Коэффициент поверхностного натяжения воды равен 0,073 Н/м, краевой угол $\theta = 0$ (рис. 12.13).

Дано: $r_1 = 0{,}5\,\text{мм}\,(0{,}5\cdot 10^{-3}\,\text{м})$, $r_2 = 1\,\text{мм}\,(1\cdot 10^{-3}\,\text{м})$, $\alpha = 0{,}073\,\text{Н/м}$, $\theta = 0°$; Δh — ?

Решение. Чем меньше радиус кривизны поверхности жидкости, тем больше по величине добавочное давление. Радиусы кривизны поверхности жидкости меньше нуля, давление под более искривленной поверхностью (в левом колене) меньше, чем в правом. Разность капиллярных давлений $\Delta P_1 = (2\alpha/r_1)\cos\theta$ и $\Delta P_2 = 2\alpha\cos\theta/r_2$ $(\cos\theta = 1)$ определит разность уровней воды в коленах капиллярной трубки:

$$\rho g \Delta h = 2\alpha\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right),$$

откуда

$$\Delta h = \frac{2\alpha(1/r_1 - 1/r_2)}{\rho g},$$

$$\Delta h = 2 \cdot 0{,}073\frac{1/0{,}5\cdot 10^{-3} - 1/1\cdot 10^{-3}}{10^3 \cdot 10}\text{м} = 0{,}0146\,\text{м}.$$

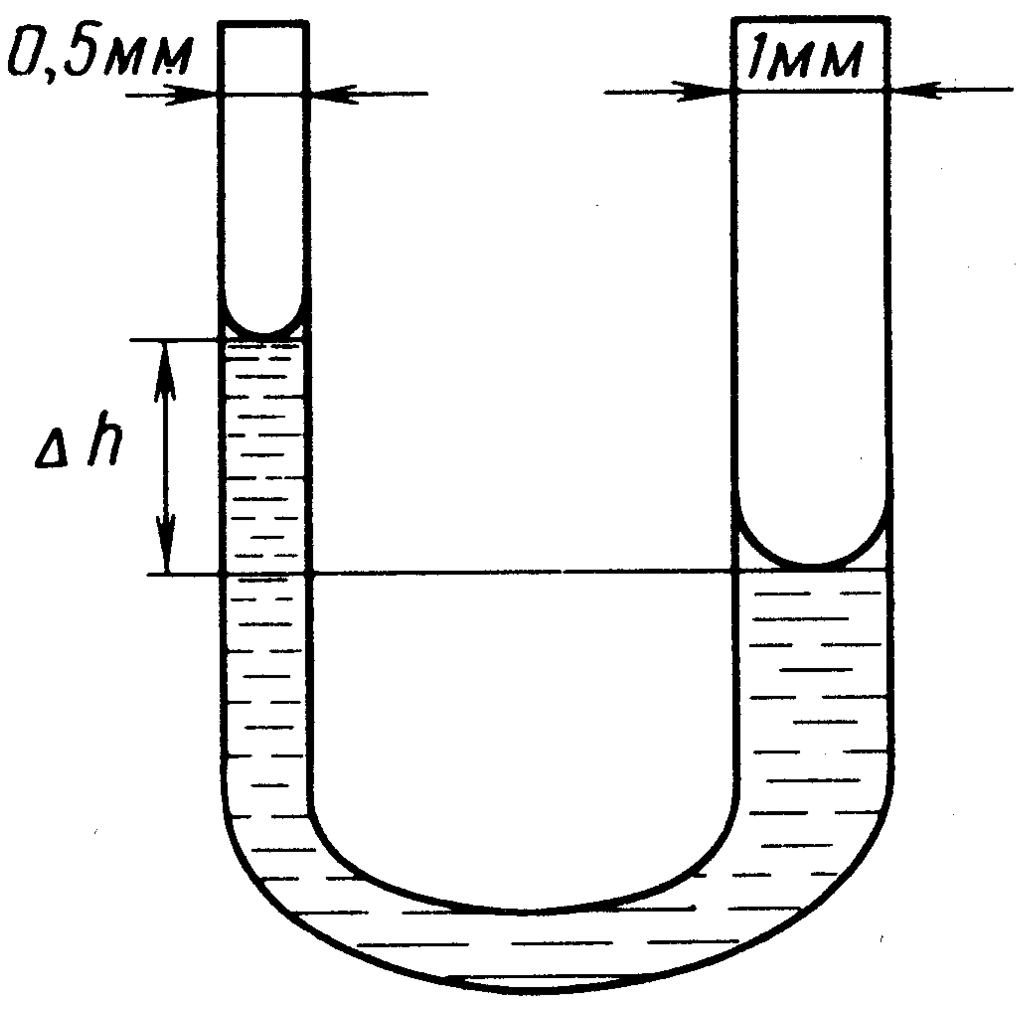


Рис. 12.13.

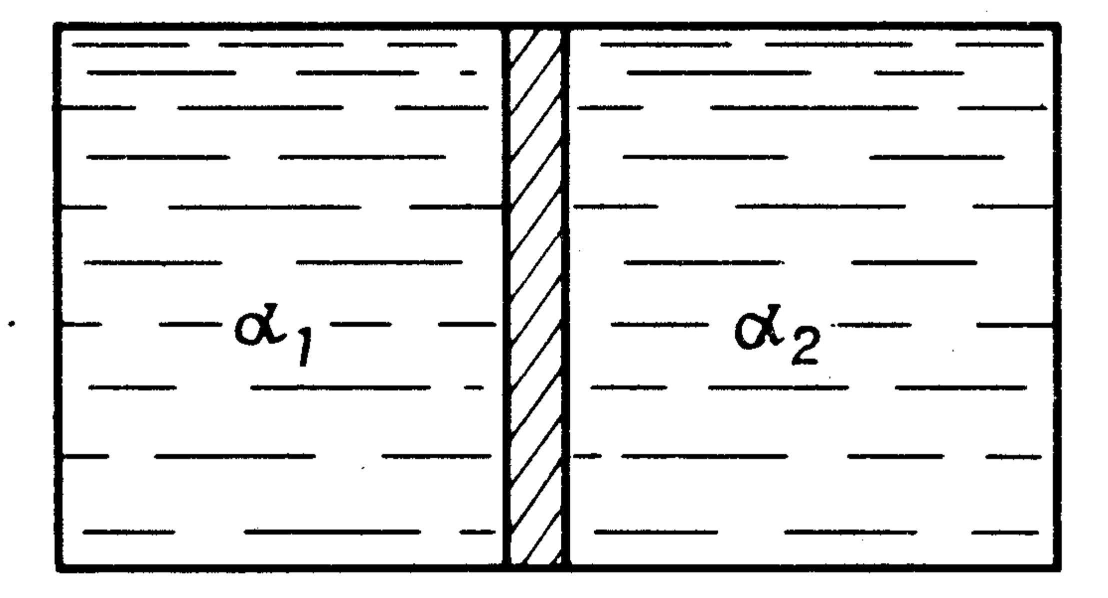


Рис. 12.14.

Задачи для самостоятельного решения

Задача 1. Пленки двух жидкостей разделены планкой длины l. Коэффициенты поверхностного натяжения жидкостей равны соответственно α_1 и α_2. Какая сила действует на планку со стороны жидкостей (рис. 12.14)?

Ответ: $F = 2(\alpha_2 - \alpha_1)l$.

Задача 2. Какое количество энергии освобождается при слиянии мелких капель воды радиусом $r = 2 \cdot 10^{-3}$ мм в одну каплю радиуса $R = 2$ мм?

Ответ: $\Delta E = -3,5 \cdot 10^{-3}$ Дж.

Задача 3. Мыльный пузырь имеет радиус $R = 2$ см. Определите разность давлений внутри и снаружи пузыря. Коэффициент поверхностного натяжения мыльного раствора $\alpha = 0,07$ Н/м.

Ответ: $\Delta P = 14$ Па.

Задача 4. Для определения коэффициента поверхностного натяжения воды в нее опустили две стеклянные трубки с радиусами внутреннего канала $r_1 = 0,25$ мм и $r_2 = 0,5$ мм. Вода поднялась в одной трубке выше, чем в другой, на 30 мм. Вычислить коэффициент поверхностного натяжения воды.

Ответ: 0,073 Н/м.

Задача 5. Внешний радиус мыльного пузыря равен R, толщина его стенки равна h. Найдите давление воздуха внутри пузыря. Атмосферное давление равно P_0, коэффициент поверхностного натяжения воды α.

Ответ:

$$P = P_0 + 2\alpha\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R-h}\right).$$

Задача 6. В капиллярной трубке вода поднялась на высоту h. Зная атмосферное давление P_0, найти давление в воде на уровне $h/2$. (Высоты отсчитываются от поверхности воды в сосуде.)

Ответ: $P = P_0 - \rho g h/2$.

Задача 7. В сосуд с водой опущены две капиллярные трубки разных диаметров. В более широкой трубке вода поднялась на высоту h_1, а в более узкой на высоту h_2. На сколько поднимется вода в узкой трубке, если ее вставить в широкую?

Ответ: h_2.

Задача 8. Капля ртути массы $m = 1$ г помещена между двумя параллельными стеклянными пластинками. Какую силу надо приложить к верхней пластинке, чтобы ртуть имела форму круглой лепешки радиуса $r = 5$ см? Коэффициент α ртути равен $0,465$ Н/м. Считать, что ртуть совершенно не смачивает стекло.

Ответ: $F = 780$ Н.

Глава 13

Тепловое расширение твердых и жидких тел

С ростом температуры возрастает кинетическая энергия теплового движения молекул и вследствие этого возрастает среднее расстояние между ними. С термодинамической точки зрения это означает, что увеличивается потенциальная энергия взаимодействия молекул. При этом происходит расширение как твердых, так и жидких тел. Имеет смысл говорить о линейном расширении только твердых тел. При нагревании

$$l = l_0(1 + \alpha t^\circ), \tag{13.1}$$

где l — линейный размер при температуре t°C, l_0 — размер при 0°C, α — коэффициент линейного расширения. Обычно длину при нагревании на Δt° определяют по формуле

$$l_2 = l_1[1 + \alpha(t_2^\circ - t_1^\circ)], \tag{13.2}$$

где l_1 и l_2 — линейные размеры при температурах t_1°C и t_2°C.

Оценим ошибку при расчете по формуле (13.2). Если известен размер тела при l_1 при температуре t_1°, то из (13.1) можно определить длину при $t^\circ\text{C} = 0^\circ\text{C}$:

$$l_0 = l_1/(1 + \alpha t_1^\circ).$$

Тогда

$$l_2 = l_0(1 + \alpha t_2^\circ) = l_1(1 + \alpha t_2^\circ)/(1 + \alpha t_1^\circ).$$

Можно считать, что

$$1/(1 + \alpha t_1^\circ) \approx 1 - \alpha t_1^\circ$$

с точностью до членов порядка $(\alpha t_1^\circ)^2$. Отсюда

$$l_2 = l_1(1 - \alpha t_1^\circ)(1 + \alpha t_2^\circ) \approx l_1(1 + \alpha(t_2^\circ - t_1^\circ)).$$

Таким образом, формулой (13.2) можно пользоваться, если членами порядка $(\alpha t^\circ)^2$ можно пренебречь.

Объем тела изменяется по закону

$$V = V_0(1 + \beta t^\circ), \tag{13.3}$$

где V_0 — объем тела при 0°C, β — коэффициент объемного расширения. Найдем связь между коэффициентами объемного и линейного расширения β и α. При нагревании кубика длина стороны изменяется по закону (13.1), а объем кубика

$$V = l_0^3(1 + \alpha t^\circ)^3.$$

В то же время, согласно (13.3),

$$V = V_0(1 + \beta t^\circ).$$

Приравнивая эти два выражения, получим

$$1 + 3\alpha t^\circ + 3(\alpha t^\circ)^2 + (\alpha t^\circ)^3 = 1 + \beta t^\circ,$$

откуда $\beta = 3\alpha$, если пренебречь членами порядка $(\alpha t^\circ)^2$. Это соотношение справедливо для небольших значений температуры, пока произведение αt° действительно мало. Заметим, что α — величины порядка $10^{-6} - 10^{-5}$1/К. При нагревании изменяется плотность веществ, масса остается постоянной, а объем увеличивается:

$$\rho = m/V.$$

Подставив в эту формулу (13.3), получим

$$\rho = \frac{m}{V_0(1 + \beta t^\circ)} = \frac{\rho_0}{1 + \beta t^\circ},$$

где ρ_0 — плотность при 0°С.

Примеры решения задач

Задача 1. Стержень длиной l_{10}, сделанный из материала с коэффициентом линейного расширения α_1 и стержень длиной l_{20}, сделанный из материала с коэффициентом линейного расширения α_2, спаяли и получился стержень длиной $l_{10} + l_{20}$. Определить коэффициент линейного расширения стержня.

Дано: l_{10}, l_{20}, α_1, α_2; α — ?

Решение. При нагревании на Δt° длина каждого стержня увеличивается:

$$l_1 = l_{10}(1 + \alpha_1 t^\circ), \quad l_2 = l_{20}(1 + \alpha_2 t^\circ).$$

Длина нового стержня

$$l = (l_{10} + l_{20})(1 + \alpha t^\circ).$$

В то же время эта длина равна сумме $l_1 + l_2$:

$$(l_{10} + l_{20})(1 + \alpha t^\circ) = l_{10}(1 + \alpha_1 t^\circ) + l_{20}(1 + \alpha_2 t^\circ),$$

откуда

$$\alpha = \frac{\alpha_1 l_{10} + \alpha_2 l_{20}}{l_{10} + l_{20}}.$$

Задача 2. На сколько изменится вес тела, помещенного в керосин, если керосин нагреть на 50°. Тело представляет собой медный шарик радиусом $r = 2$ см. Коэффициент линейного расширения меди $\alpha_\text{м} = 1,7 \cdot 10^{-5}\text{К}^{-1}$, коэффициент объемного расширения керосина $\beta_\text{к} = 0,001\,\text{К}^{-1}$, плотность керосина $\rho_\text{к} = 0,8 \cdot 10^3\text{кг/м}^3$ при $t^\circ = 20$°С.

Дано: $r = 0,02\,\text{м}$, $\Delta t^\circ = 50$°С, $\alpha_\text{м} = 1,7 \cdot 10^{-5}\,\text{К}^{-1}$, $\beta_\text{к} = 0,001\,\text{К}^{-1}$, $\rho_\text{к} = 0,8 \cdot 10^3\,\text{кг/м}^3$; ΔP — ?

Решение. Изменение веса обусловлено изменением выталкивающей силы при нагревании

$$\Delta P = \Delta F_\text{выт}.$$

Выталкивающая сила при t_1° есть

$$F_{\text{выт}1} = \rho_{\text{к}1} V_1 g,$$

при t_2°

$$F_{\text{выт}2} = \rho_{\text{к}2} V_2 g.$$

Объем шарика равен

$$V_1 = (4/3)\pi r^3; \quad V_2 = V_1(1 + \beta_{\text{м}} \Delta t^\circ),$$

поскольку

$$\beta_{\text{м}} = 3\alpha_{\text{м}}, \quad V_2 = V_1(1 + 3\alpha_{\text{м}} \Delta t^\circ).$$

Плотность керосина при изменении температуры становится равной

$$\rho_{\text{к}2} = \frac{\rho_{\text{к}1}}{1 + \beta_{\text{к}} \Delta t^\circ},$$

откуда

$$\Delta P = \left[\frac{\rho_{\text{к}1}}{1 + \beta_{\text{к}} \Delta t^\circ} V_1(1 + 3\alpha_{\text{м}} \Delta t^\circ) - \rho_{\text{к}1} V_1\right] g = \rho_{\text{к}1} \left(\frac{1 + 3\alpha_{\text{м}} \Delta t^\circ}{1 + \beta_{\text{к}} \Delta t^\circ} - 1\right) g (4/3)\pi r^3,$$

$$\Delta P = 0,8 \cdot 10^3 \cdot (4/3) \cdot 3,14 \cdot 8 \cdot 10^{-6} \cdot 9,8 \left(\frac{1 + 3 \cdot 1,7 \cdot 10^{-5} \cdot 50}{1 + 0,001 \cdot 50} - 1\right) \text{Н} = 0,251\,\text{Н}.$$

Задача 3. Диаметр колеса паровоза при температуре $t_0^\circ = 0^\circ$ С составляет $d_0 = 2$ м. Определить разность числа оборотов колеса летом при температуре $t_1^\circ = 35^\circ$С и зимой при температуре $t_2^\circ = -25^\circ$С на пути пробега тепловоза $S = 200$ км. Коэффициент линейного расширения $\alpha = 1,2 \cdot 10^{-5}\,\text{К}^{-1}$.

Дано: $t_1^\circ = 35^\circ$С, $t_2^\circ = -25^\circ$С, $S = 200\,$км$\,(2 \cdot 10^5\,$м$)$, $\alpha = 1,2 \cdot 10^{-5}\,\text{К}^{-1}$, $d_0 = 2$ м; Δn — ?

Решение. При изменении температуры изменяется длина окружности колеса, и поэтому число оборотов на одном и том же расстоянии также будет иным.

Число оборотов, совершаемых колесом при температурах t_1° и t_2°, соответственно равно

$$n_1 = S/\pi d_1 \text{ и } n_2 = S/\pi d_2,$$

где $d_1 = d_0(1 + \alpha t_1^\circ)$ и $d_2 = d_0(1 + \alpha t_2^\circ)$.

Окончательно,

$$\Delta n = n_2 - n_1 = \frac{S}{\pi d_2} - \frac{S}{\pi d_1} = \frac{S}{\pi d_0}\left(\frac{1}{1 + \alpha t_2^\circ} - \frac{1}{1 + \alpha t_1^\circ}\right),$$

$$[\Delta n] = \frac{\text{м}}{\text{м}}\left(\frac{1}{1 + (1/\text{К})\text{К}} + \frac{1}{1 + (1/\text{К})\text{К}}\right) = 1,$$

$$\Delta n = \frac{2 \cdot 10^5}{3,14 \cdot 2}\left(\frac{1}{1 - 1,2 \cdot 10^{-5} \cdot 25} - \frac{1}{1 + 1,2 \cdot 10^{-5} \cdot 35}\right) \text{об} = 22,9\,\text{об}.$$

Задача 4. Стальной бензобак автомобиля емкостью $V_0 = 70$ л полностью заполнен бензином при температуре 20°С. После этого автомобиль оставили на солнце, и бак разогрелся до 50°С. Сколько бензина вытечет из бака? Коэффициент объемного расширения бензина $1 \cdot 10^{-3}\text{К}^{-1}$, коэффициент линейного расширения стали $1,2 \cdot 10^{-5}\text{К}^{-1}$.

Дано: $V_0 = 70$ л ($7 \cdot 10^{-2}$м^3), $t_1^\circ = 20°$C, $t_2^\circ = 50°$C, $\beta_б = 1 \cdot 10^{-3}$ К$^{-1}$, $\alpha_{ст} = 1,2 \cdot 10^{-5}$ К$^{-1}$; ΔV — ?

Решение. При нагревании расширяются бензин и бак. Объем бензина при нагревании изменяется по закону

$$V_1 = V_0(1 + \beta_б \Delta t^\circ).$$

Изменение объема бензина равно

$$\Delta V_1 = V_1 - V_0 = V_0 \beta_б \Delta t^\circ.$$

Изменение объема бака равно

$$\Delta V_2 = V_2 - V_0 = V_0 \beta_{ст} \Delta t^\circ.$$

Объем вытекшего бензина равен

$$\Delta V = \Delta V_1 - \Delta V_2 = V_0 \Delta t^\circ (\beta_б - \beta_{ст}).$$

Коэффициент объемного расширения стали равен

$$\beta_{ст} = 3\alpha_{ст} = 3,6 \cdot 10^{-5} \text{К}^{-1}.$$

Следовательно,

$$\Delta V = 7 \cdot 10^{-2} \cdot 30(10^{-3} - 3,6 \cdot 10^{-5}) = 0,2 \cdot 10^{-2} \text{м}^3,$$
$$\Delta V \approx 2\text{л}.$$

Задача 5. Стальная балка закреплена между двумя стенами при температуре 10°C. С какой силой концы балки будут давить на стены при температуре 35°C? Площадь поперечного сечения балки $S = 50$ см^2. Модуль упругости стали $E = 2,1 \cdot 10^{11}$ Н/м^2.

Дано: $t_1^\circ = 10°$C, $t_2^\circ = 35°$C, $S = 50$ см^2 ($5 \cdot 10^{-3}$м^2), $E = 2,1 \cdot 10^{11}$Н/м^2, $\alpha = 1,2 \cdot 10^{-5}$К$^{-1}$; F — ?

Решение. Сила, с которой балка давит на стену $F = \sigma S$, где σ — напряжение, возникающее в балке при ее деформации. Из закона Гука следует

$$\frac{\Delta l}{l_1} = \frac{1}{E}\sigma, \tag{13.4}$$

где $\Delta l = l_2 - l_1$ — удлинение балки при нагревании. Поскольку

$$l_2 = l_1(1 + \alpha \Delta t^\circ),$$
$$\Delta l = l_1 \alpha \Delta t^\circ. \tag{13.5}$$

Подставив (13.5) в (13.4), получим

$$\alpha \Delta t^\circ = \sigma / E,$$

откуда

$$\sigma = E\alpha \Delta t^\circ.$$

Тогда искомая сила

$$F = \sigma S = E\alpha S \Delta t^\circ,$$
$$[F] = (\text{Н/м}^2)(1/\text{К})\text{м}^2 \cdot \text{К} = \text{Н},$$
$$F = 2,1 \cdot 10^{11} \cdot 1,2 \cdot 10^{-5} \cdot 5 \cdot 10^{-3} \cdot 25 \text{ Н} = 315 \cdot 10^3 \text{Н} = 3,15 \cdot 10^5 \text{Н}.$$

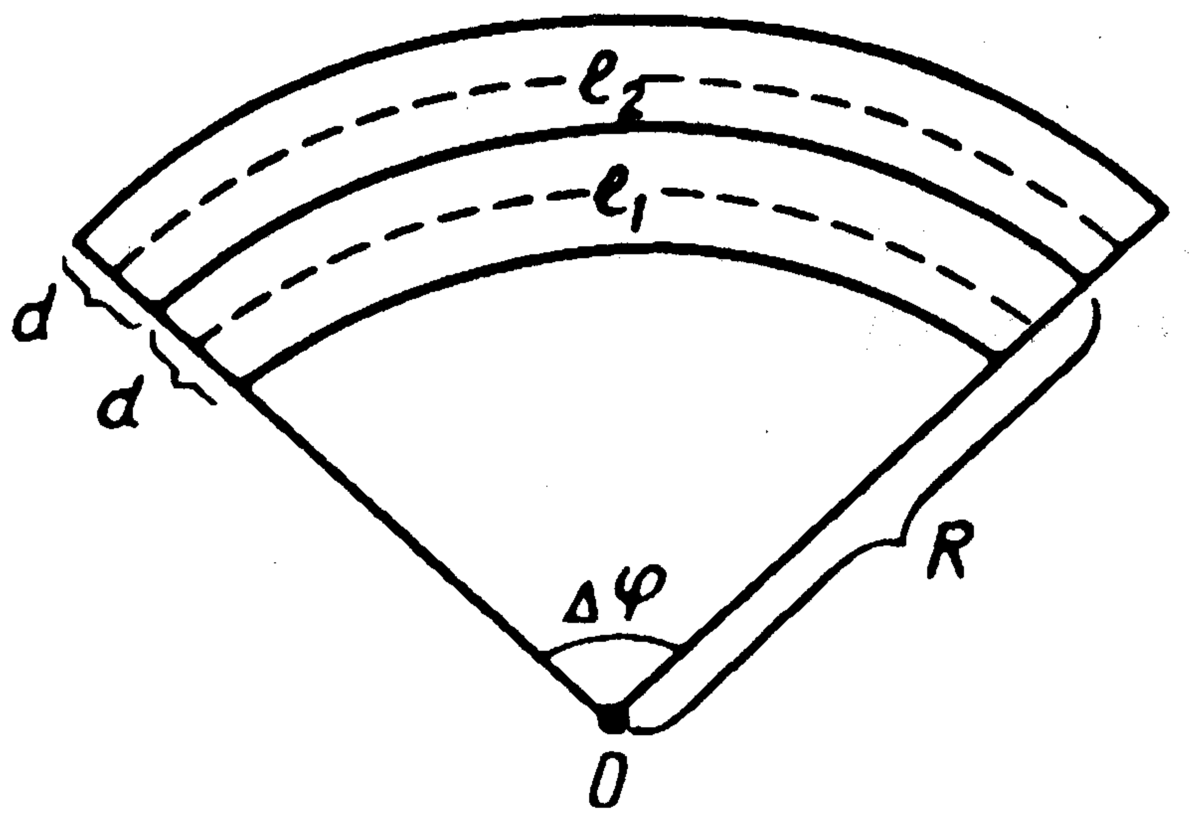


Рис. 13.1.

Задача 6. Биметаллическая пластинка состоит из двух пластинок, коэффициенты линейного расширения пластинок α_1 и α_2, толщина пластинок d. Определить радиус кривизны R биметаллической пластинки после нагревания ее на $\Delta t°$C.

Дано: α_1, α_2, d, $\Delta t°$C; R — ?

Решение. При нагревании одна пластинка удлиняется больше, чем другая, так как коэффициенты линейного расширения пластинок разные (предположим, что $\alpha_1 > \alpha_2$), поэтому биметаллическая пластинка искривляется (рис. 13.1).

Длины пластинок после нагревания равны соответсвенно

$$l_1 = l_{10}(1 + \alpha_1 \Delta t°); \quad l_2 = l_{20}(1 + \alpha_2 \Delta t°).$$

С другой стороны (рис. 13.1)

$$l_1 = R_1 \Delta\varphi, \quad \text{где} \quad R_1 = R + d/2,$$
$$l_2 = R_2 \Delta\varphi, \quad \text{где} \quad R_2 = R - d/2.$$

Тогда

$$(R + d/2)\Delta\varphi = l_{10}(1 + \alpha_1 \Delta t°), \tag{13.6}$$
$$(R - d/2)\Delta\varphi = l_{20}(1 + \alpha_2 \Delta t°), \tag{13.7}$$

где $l_{10} = l_{20}$ — длины пластинок при начальной температуре. Разделив (13.6) на (13.7), получим

$$\frac{R + d/2}{R - d/2} = \frac{1 + \alpha_1 \Delta t°}{1 + \alpha_2 \Delta t°}.$$

Окончательно

$$R = \frac{d(2 + (\alpha_1 + \alpha_2)\Delta t°)}{2(\alpha_1 - \alpha_2)\Delta t°}.$$

Задачи для самостоятельного решения

Задача 1. Чему равен коэффициент линейного расширения стали, если известно, что при силе, растягивающий стальной стержень, $F = 240$ Н он удлиняется так же, как и при нагревании на 1 К. Модуль упругости $E = 2 \cdot 10^4$ Н/м^2.

Ответ: $\alpha = 1,2 \cdot 10^{-5}$ К$^{-1}$.

Задача 2. Как должны соотноситься длины l_1 и l_2 двух стержней, сделанных из разных материалов с коэффициентами линейного расширения α_1 и α_2, чтобы при любой температуре разность длин стержней оставалась постоянной?

Ответ: $\alpha_1/\alpha_2 = l_2/l_1$.

Задача 3. Сообщающиеся сосуды заполнены жидкостью, имеющей температуру t_1°. При нагревании жидкости в одном из сосудов до температуры t_2° уровень жидкости установился в этом сосуде на высоте h_2, а в другом на высоте h_1. Найти коэффициент объемного расширения жидкости.

Ответ: $\beta = (h_2 - h_1)/(h_1 t_2^\circ - h_2 t_1^\circ)$.

Задача 4. Вес куска металла, погруженного в известную жидкость, уменьшается на ΔP_1 при температуре t_1° и на ΔP_2 при температуре t_2°. Определите коэффициент линейного расширения металла. Коэффициент объемного расширения жидкости $\beta_ж$.

Ответ:

$$\frac{1}{3}\left[\frac{\Delta P_2(1+\beta_ж t_2^\circ) - \Delta P_1(1+\beta_ж t_1^\circ)}{\Delta P_1(1+\beta_ж t_1^\circ)t_2^\circ - \Delta P_2(1+\beta_ж t_2^\circ)t_1^\circ}\right].$$

Задача 5. Стальная и бронзовая пластинки одинаковой толщины $a = 0,2$ мм склепаны на концах так, что при температуре $T_1 = 293$ К образуют плоскую биметаллическую пластинку. Каков будет радиус изгиба этой пластинки при температуре $T_2 = 393$ К ? Коэффициенты линейного расширения стали и бронзы $\alpha_1 = 1,1 \cdot 10^{-5}\text{К}^{-1}$, $\alpha_2 = 2 \cdot 10^{-5}\text{К}^{-1}$.

Ответ: 2,2 м.

Задача 6. Для хранения нефть наливают в цилиндрическую цистерну высотой $h = 6$ м при температуре 0°С. До какого уровня можно налить нефть, чтобы при повышении температуры до $t^\circ = 30$°С она не выливалась из цистерны? Расширением цистерны пренебречь. Для нефти $\beta = 0,001\,\text{К}^{-1}$.

Ответ: 5,8 м.

Глава 14

Закон сохранения энергии в термодинамике. Уравнение теплового баланса

Система, предоставленная самой себе, стремится к равновесному состоянию. Равновесное состояние в термодинамике означает, что температура и давление во всех точках будут одинаковы. В равновесном состоянии прекращается процесс теплопередачи.

Если система изолирована, то, очевидно, что при переходе в равновесное состояние какие-то части системы отдают тепло ($Q_1 < 0$), какие-то получают ($Q_2 > 0$). При этом, поскольку $\Delta Q = 0$ (система изолирована), то $Q_1 + Q_2 = 0$. Это выражение можно переписать в виде

$$Q_{\text{отд}} = Q_{\text{пол}},$$

где $Q_{\text{отд}} = |Q_1|$, $\quad Q_2 = |Q_{\text{пол}}|$. В ряде процессов тепло может поглощаться или выделяться телом, и эти процессы не приводят к изменению температуры тела, как это наблюдается почти при всех фазовых превращениях.

Плавление — процесс превращения кристаллического твердого тела в жидкость. Процесс плавления происходит при постоянной температуре, при этом тепло поглощается.

Удельная теплота плавления λ равна количеству теплоты, необходимому для того, чтобы расплавить 1 кг кристаллического вещества, взятого при температуре плавления $T_{\text{пл}}$

$$\lambda = Q/m. \tag{14.1}$$

Отсюда следует, что, зная λ, можно определить Q, которое потребуется для того, чтобы перевести в жидкое состояние твердое тело массой m:

$$Q = \lambda m. \tag{14.2}$$

Поскольку температура плавления остается постоянной, то все количество теплоты, сообщаемое системе, идет на увеличение потенциальной энергии взаимодействия молекул, при этом происходит разрушение кристаллической решетки, т. е. $Q = \Delta U$.

Процесс *кристаллизации* — это процесс, обратный процессу плавления. При кристаллизации жидкость превращается в твердое тело и выделяется количество теплоты, также определяемое по формуле (14.2).

Испарение — это процесс превращения жидкости в пар. Испарение происходит с поверхности жидкости. В процессе испарения жидкость покидают самые быстрые молекулы, т. е. молекулы, способные преодолеть силы притяжения, со стороны молекул жидкости. Вследствие этого, если жидкость теплоизолирована, то в процессе испарения она охлаждается.

Удельная теплота испарения $r_и$ равна количеству теплоты, необходимому для того, чтобы превратить в пар 1 кг жидкости:

$$r_и = Q/m, \tag{14.3}$$

$r_и$ зависит от температуры жидкости. В таблицах приводится $r_и$ при температуре кипения, откуда

$$Q = r_и m. \tag{14.4}$$

Удельная теплота испарения уменьшается с ростом температуры. При испарении происходит увеличение потенциальной энергии взаимодействия молекул испарившейся части жидкости, т. е.

$$\Delta U = Q = r_и m.$$

Конденсация — процесс, обратный процессу испарения. При конденсации пар переходит в жидкость. При этом выделяется тепло. Количество теплоты, выделяющейся при конденсации пара, определяется по формуле (14.4).

Кипение — процесс, при котором давление насыщенных паров жидкости равно атмосферному, поэтому испарение происходит не только с поверхности, но и по всему объему (в жидкости всегда имеются пузырьки воздуха, при кипении давление паров в них достигает атмосферного и пузырьки поднимаются вверх). Очевидно, что с увеличением внешнего давления повышается температура кипения (и наоборот), т. е.

$$T_к = f(P).$$

Теплота, сообщаемая системе, расходуется на изменение внутренней энергии, если механическая работа равна нулю, т. е.

$$Q = rm,$$

где r — удельная теплота парообразования при температуре кипения жидкости.

Примеры решения задач

Задача 1. В калориметре находится 1 кг льда при температуре $t_1^\circ = -40^\circ$C. В калориметр пускают 1 кг пара при температуре $t_2^\circ = 120^\circ$C. Определить установившуюся температуру и фазовое состояние системы. Нагреванием калориметра пренебречь.

Дано: $m_1 = m_2 = 1$кг, $t_1^\circ = -40^\circ$C, $t_2^\circ = 120^\circ$C. По таблицам находим теплоемкости льда, пара, воды:

$$\begin{array}{l} c_л = 2,1 \cdot 10^3 Дж/кг \cdot К, \\ c_п = 2,2 \cdot 10^3 Дж/кг \cdot К, \\ c_в = 4,2 \cdot 10^3 Дж/кг \cdot К, \\ r_п = 2,26 \cdot 10^6\ Дж/кг, \\ \lambda_л = 3,3 \cdot 10^5\ Дж/кг \\ \hline t_x^\circ\ — ?\quad m_п, m_в, m_л\ — ? \end{array}$$

Решение. Прежде чем составлять уравнение теплового баланса, $Q_{\text{отд}} = Q_{\text{пол}}$, оценим, какое количество теплоты могут отдать одни элементы системы, а какое количество теплоты могут получить другие. Очевидно, что тепло отдают пар 1) при охлаждении до 100°С, 2) при конденсации, 3) вода, сконденсировавшаяся из пара, при остывании от 100°С. Тепло получают лед 1) при нагревании, 2) при плавлении, 3) вода, полученная из льда, нагревается от 0°С до какой-то температуры. Оценим, количество теплоты, отданное паром при процессах 1 и 2:

$$Q_{\text{отд}} = c_{\text{п}} m_1 (t_2^\circ - 100^\circ\text{C}) + r m_2,$$

$$Q_{\text{отд}} = (2,2 \cdot 10^3 \cdot 1 \cdot 20 + 2,26 \cdot 10^6)\text{Дж} = 2,30 \cdot 10^6\text{Дж}.$$

Количество теплоты, получаемое льдом при процессах 1 и 2:

$$Q_{\text{пол}} = c_{\text{л}} m_{\text{л}} (0^\circ - t_1^\circ) + \lambda m_1,$$

$$Q_{\text{пол}} = (2,1 \cdot 10^3 \cdot 40 + 3,3 \cdot 10^5)\text{Дж} = 4,14 \cdot 10^5\text{Дж}.$$

Из расчетов ясно, что $Q_{\text{отд}} > Q_{\text{пол}}$. Растаявший лед затем нагревается. Определим, какое количество теплоты нужно дополнительно, чтобы вода, образовавшаяся из льда, нагрелась до 100°С:

$$Q_{\text{пол}} = c_{\text{в}} m_1 (100^\circ - 0^\circ) = 4,2 \cdot 10^3 \cdot 1 \cdot 100\,\text{Дж} = 4,2 \cdot 10^5\text{Дж}.$$

Следовательно, суммарное количество теплоты, которое может получить лед в результате процессов 1–3, нагреваясь до 100°С, есть

$$Q_{\text{пол}_\Sigma} = 8,34 \cdot 10^5\text{Дж},$$

$$Q_{\text{пол}_\Sigma} < Q_{\text{отд}}.$$

Из последнего соотношения следует, что не весь пар будет конденсироваться. Часть оставшегося пара, можно определить из соотношения

$$m_{\text{п}} = (Q_{\text{отд}} - Q_{\text{пол}_\Sigma})/r_{\text{п}},$$

$$m_{\text{п}} = \frac{23,00 \cdot 10^5 - 8,34 \cdot 10^5}{2,26 \cdot 10^6}\text{кг} = 0,65\,\text{кг}.$$

Окончательно, в калориметре будут находиться пар и вода при температуре $t_x^\circ = 100^\circ$С, при этом

$$m_{\text{п}} = 0,65\,\text{кг}, \quad m_{\text{в}} = 1,35\,\text{кг}.$$

Задача 2. В кастрюлю налили холодной воды с $t_1^\circ = 10^\circ$С и поставили на плиту. Через $t_1 = 10$ мин вода закипела. Через какое время t_2 она полностью испарится?

Дано: $t_1^\circ = 10^\circ\text{C}$, $t_1 = 10\,\text{мин}\,(600\,\text{с})$, $c_{\text{в}} = 4,2 \cdot 10^3\,\text{Дж/кг} \cdot \text{К}$, $r_{\text{в}} = 22,6 \cdot 10^5\,\text{Дж/кг}$; t_2 — ?

Решение. Для испарения воды необходимо количество теплоты $Q = r_{\text{в}} m$, где m — масса воды в кастрюле. От плиты поступает за единицу времени постоянное количество теплоты q, следовательно,

$$Q = q t_2 = r_{\text{в}} m. \tag{14.5}$$

Количество теплоты Q_1, поступившее от плиты за время t_1 и нагревшее воду до температуры кипения $t_{\text{к}}^\circ$, равно

$$Q_1 = q t_1 = c_{\text{в}} m (t_{\text{к}}^\circ - t_1^\circ).$$

Отсюда можно определить массу воды:

$$m = \frac{qt_1}{c_в(t_к^\circ - t_1^\circ)}.$$

Подставив m в (14.5), имеем

$$qt_2 = r_в \frac{qt_1}{c_в(t_к^\circ - t_1^\circ)}.$$

Окончательно имеем

$$t_2 = \frac{r_в t_1}{c_в(t_к^\circ - t_1^\circ)},$$

$$t_2 = \frac{2,26 \cdot 10^6 \cdot 600}{4,2 \cdot 10^3 \cdot 90}\,с = 3,59 \cdot 10^3 с \approx 1\,ч.$$

Задача 3. На сколько температура воды у основания водопада высотой 1200 м больше, чем у его вершины? На нагревание воды затрачивается 70% выделившейся энергии.

Дано: $h = 1200\,м$, $\eta = 70\%$, $c_в = 4200\,Дж/кг \cdot К$; Δt^0 — ?

Решение. При ударе падающей воды около основания водопада часть потенциальной энергии $E_{пот} = mgh$ идет на нагревание воды:

$$\eta mgh = mc_в \Delta t^\circ,$$

откуда

$$\Delta t^\circ = \eta gh/c_в,$$

$$\Delta t^\circ = \frac{0,7 \cdot 9,8 \cdot 1200}{4200}\,^\circ C = 1,96^\circ C.$$

Задача 4. Кусок льда массой 5 кг при температуре $-30^\circ C$ опустили в воду, имеющую температуру $70^\circ C$. Масса воды 20 кг. Какую температуру будет иметь вода, когда весь лед растает? Удельная теплоемкость воды $4,2 \cdot 10^3 Дж/кг \cdot К$, льда — $2,1 \cdot 10^3 Дж/кг \cdot К$, а удельная теплота плавления льда $3,4 \cdot 10^5$ Дж/кг. Теплообменом с окружающей средой можно пренебречь.

Дано: $m = 5\,кг$, $t_0^\circ = -30^\circ C$, $m_1 = 20\,кг$, $t_1^\circ = 70^\circ C$, $c_л = 2100\,Дж/кг \cdot К$, $c_в = 4200\,Дж/кг \cdot К$, $\lambda = 3,4 \cdot 10^5\,Дж/кг$; t° — ?

Решение. Конечное фазовое состояние системы по условию задачи — вода. Лед, нагреваясь, а затем плавясь, получает тепло. При нагревании льда от t_0° до $0^\circ C$ лед получает количество теплоты, равное

$$Q_{пол1} = mc_л(t_{пл}^\circ - t_0^\circ).$$

Для плавления льда при температуре плавления необходимо количество теплоты $Q_{пол2}$:

$$Q_{пол2} = m\lambda,$$

в результате чего получаем воду при $0^\circ C$, нагревание которой до окончательной температуры t° требует количества теплоты $Q_{пол3}$

$$Q_{пол3} = mc_в(t^\circ - t_{пл}^\circ).$$

Суммарное количество теплоты, получаемое льдом, а затем водой, равно

$$Q_1 = Q_{пол} = mc_л(t_{пл}^\circ - t^\circ) + m\lambda + mc_в(t^\circ - t_{пл}^\circ).$$

Количество теплоты, отданное охлаждающейся водой:

$$Q_2 = m_1 c_{\text{в}}(t^\circ - t_1^\circ) < 0,$$

$$Q_1 + Q_2 = 0, \quad \text{или} \quad Q_{\text{отд}} = Q_{\text{пол}}.$$

Таким образом,

$$mc_{\text{л}}(t_{\text{пл}}^\circ - t_0^\circ) + m\lambda + mc_{\text{в}}(t^\circ - t_{\text{пл}}^\circ) = m_1 c_{\text{в}}(t_1^\circ - t^\circ),$$

откуда

$$t^\circ = \frac{c_{\text{в}} m_1 t_1^\circ + c_{\text{в}} m t_{\text{пл}}^\circ - c_{\text{л}} m(t_{\text{пл}}^\circ - t_0^\circ) + \lambda m}{c_{\text{в}}(m + m_1)},$$

$$t^\circ = 36,8^\circ\text{C}.$$

Задача 5. Под колоколом воздушного насоса находится вода, масса которой $m_1 = 40$ г, а температура 0°C. Воздух из-под колокола быстро откачивается. Благодаря интенсивному испарению части воды (насос откачивает пар) остальная вода замерзает. Определить массу $m_{\text{л}}$ образовавшегося льда, если его температура также $t^\circ = 0^\circ$C. $r = 2,26 \cdot 10^6$ Дж/кг, $\lambda = 3,3 \cdot 10^5$ Дж/кг.

Дано: $m_1 = 40$ г $(0,04$ кг$)$, $t^\circ = 0^\circ$C, $r = 2,26 \cdot 10^6$ Дж/кг, $\lambda = 3,3 \cdot 10^5$ Дж/кг; $m_{\text{л}}$ — ?

Решение. За счет интенсивного испарения происходит потеря внутренней энергии неиспарившейся части жидкости, так как температура остается постоянной $t^\circ = 0^\circ$C, происходит ее кристаллизация. Количество теплоты, полученное испарившейся частью воды, есть:

$$Q_{\text{пол}} = rm_{\text{п}},$$

где $m_{\text{п}}$ — масса испарившейся воды. Количество теплоты, отданное оставшейся частью воды, равно

$$Q_{\text{отд}} = \lambda m_{\text{л}},$$

где $m_{\text{л}}$ — масса замерзшей воды. Поскольку система изолирована,

$$Q_{\text{пол}} = Q_{\text{отд}}, \quad rm_{\text{п}} = \lambda m_{\text{л}}. \tag{14.6}$$

Масса воды m равна

$$m = m_{\text{п}} + m_{\text{л}}. \tag{14.7}$$

Из (14.6) имеем

$$m_{\text{п}} = (\lambda/r) m_{\text{л}}.$$

Подстановка в (14.7) дает

$$m_{\text{л}}(1 + \lambda/r) = m.$$

Окончательно имеем

$$m_{\text{л}} = \frac{m}{1 + \lambda/r},$$

$$m_{\text{л}} = \frac{0,04}{1 + 3,3 \cdot 10^5/2,26 \cdot 10^6} \text{кг} = 0,035 \text{ кг}.$$

Задача 6. Построить график зависимости температуры в калориметре от времени, если количество теплоты, сообщаемое системе, постоянно и равно $q = 100$ Дж/с. В калориметре находился 1 кг льда при $t_1^\circ = -20°$C. Теплоемкости

$$\text{льда} \quad c_л = 2,1 \cdot 10^3 \text{Дж/кг} \cdot \text{К},$$
$$\text{воды} \quad c_в = 4,2 \cdot 10^3 \text{Дж/кг} \cdot \text{К},$$
$$\text{пара} \quad c_п = 2,2 \cdot 10^3 \text{Дж/кг} \cdot \text{К}.$$

Удельная теплота плавления $\lambda = 3,3 \cdot 10^5$ Дж/кг. Удельная теплота парообразования $r = 2,26 \cdot 10^6$ Дж/кг.

Решение. Количество теплоты, необходимое для нагревания льда до $t° = 0°$C, есть $Q_1 = c_л m(0 - (-20°))$ Дж $= 4,2 \cdot 10^4$ Дж.

Промежуток времени, за который лед нагреется до 0°C, равен

$$\Delta t_1 = Q_1/q = 4,2 \cdot 10^4/100 \text{ с} = 4,2 \cdot 10^2 \text{с} = 0,12 \text{ ч}.$$

Количество теплоты, требуемое для таяния льда, равно

$$Q_2 = \lambda m = 3,3 \cdot 10^5 \text{Дж}.$$

Промежуток времени, за который лед полностью растает, есть

$$\Delta t_2 = Q_2/q = 3,3 \cdot 10^3 \text{с} = 0,92 \text{ ч}.$$

Количество теплоты, необходимое для нагревания воды от 0 до 100°C, есть

$$Q_3 = c_в m(100° - 0°)\text{Дж} = 4,2 \cdot 10^5 \text{Дж}.$$

Промежуток времени, за который произойдет нагревание, равен

$$\Delta t_3 = 4,2 \cdot 10^3 \text{с} = 1,2 \text{ ч}.$$

Для испарения воды требуется количество теплоты

$$Q_4 = rm = 2,26 \cdot 10^6 \text{Дж}.$$

Промежуток времени, за который произойдет полное испарение:

$$\Delta t_4 = 2,26 \cdot 10^4 \text{с} = 6,3 \text{ ч}.$$

Затем будет происходить нагревание пара. Количество теплоты, необходимое для нагревания пара до 120°, равно

$$Q_5 = c_п m(120° - 100°) = 4,4 \cdot 10^5 \text{Дж}.$$

Промежуток времени, за который произойдет нагревание пара, равен

$$\Delta t_5 = 4,4 \cdot 10^3 \text{с} = 1,2 \text{ ч}.$$

По полученным данным построена зависимость $t°\text{C} = f(t)$ (рис. 14.1).

Задача 7. На электрической плитке мощности 1 кВт кипит вода в чайнике. Найдите скорость истечения пара из носика чайника v, если считать пар идеальным газом. Давление пара P на конце носика 1 атм, сечение носика 1 см^2. Считать, что вся энергия плитки передается воде.

Дано: $N = 1$ кВт (10^3 Вт), $P = 1$ атм (10^5 Па), $S = 1$ см^2 (10^{-4} м^2), $r = 2,26 \cdot 10^6$ Дж/кг, $M = 0,018$ кг/моль; v — ?

Решение. Количество теплоты, необходимое для превращения массы воды m в пар за промежуток времени t, равно $Q = mr$. По условию задачи вся энергия

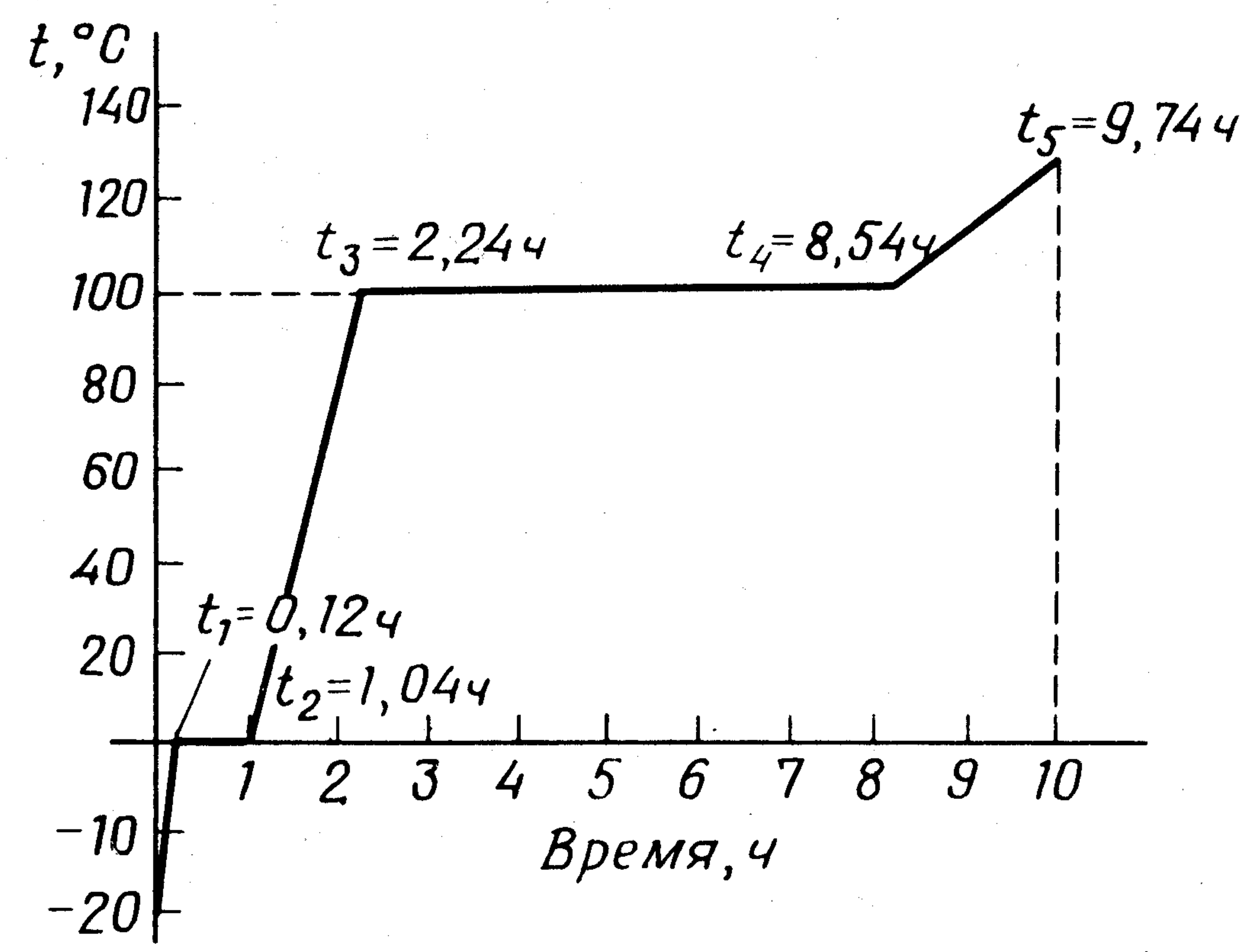


Рис. 14.1.

плитки, равная Nt, полностью передается воде, откуда масса воды, испарившейся за время t, равна

$$m = Nt/r.$$

Давление пара в чайнике постоянно и равно давлению насыщенного пара у поверхности воды, но в носике пар уже не связан с жидкостью и поэтому мы можем к нему применить уравнение Клапейрона — Менделеева. Объем пара массы m при давлении $P = 1$ атм ($t°\mathrm{C} = 100°\mathrm{C}$) равен:

$$V = (m/MP)RT.$$

Весь пар проходит через сечение S со скоростью v, т. е. $V = vSt$. Скорость истечения пара

$$v = \frac{mRT}{MPSt} = \frac{NtRT}{rMPSt} = \frac{NRT}{rMPS},$$

$$v = \frac{10^3 \cdot 8,31 \cdot 373}{2,26 \cdot 10^6 \cdot 0,018 \cdot 10^5 \cdot 10^{-4}}\,\text{м/с} = 7,5\,\text{м/с}.$$

Задача 8. С какой скоростью свинцовая пуля должна удариться о преграду, чтобы она наполовину расплавилась, если при ударе на нагревание пули идет 60% ее кинетической энергии? Температура пули до удара была 27°C. Удельная теплоемкость свинца 130 Дж/кг · К, удельная теплота плавления свинца $2,5 \cdot 10^4$ Дж/кг, а температура плавления свинца $t^\circ_{\text{плPb}} = 327°\mathrm{C}$.

Дано: $\eta = 60\%$, $t^\circ_0 = 27°\mathrm{C}$, $c_{\mathrm{Pb}} = 130$ Дж/кг · К, $\lambda_{\mathrm{Pb}} = 2,5 \cdot 10^4$ Дж/кг, $t^\circ_{\text{плPb}} = 327°\mathrm{C}$; v — ?

Решение. После удара пули о преграду происходит изменение кинетической энергии от $mv^2/2$ до 0. Часть энергии идет на нагревание пули до температуры плавления, а затем на то, чтобы расплавить половину пули. В результате

$$Q = mc_{\mathrm{Pb}}(t^\circ_{\text{пл}} - t^\circ_0) + m\lambda_{\mathrm{Pb}}/2.$$

Приравнивая

$$\eta E_{\text{к}} = Q,$$

получим выражение

$$\eta m v^2/2 = m c_{\text{Pb}}(t^\circ_{\text{пл}} - t^\circ_0) + m\lambda_{\text{Pb}}/2,$$

откуда

$$v^2 = (2c_{\text{Pb}}(t^\circ_{\text{пл}} - t^\circ_0) + \lambda_{\text{Pb}})/\eta,$$

$$v = \sqrt{\frac{2 \cdot 130 \cdot 300 + 2500}{0,6}}\,\text{м/с} = 366\,\text{м/с}.$$

Задача 9. Определить массу m воды, которая может быть превращена в лед при 0°C испарением эфира, масса которого $M = 0,1$ кг, а температура $t^\circ_1 = 20^\circ$C. Теплообмен происходит только между эфиром и водой. Начальная температура воды также $t^\circ_1 = 20^\circ$C. Удельная теплота испарения эфира $r = 3,8 \cdot 10^5$ Дж/кг, удельная теплота плавления льда $\lambda = 3,3 \cdot 10^5$Дж/кг, удельная теплоемкость воды $c_{\text{в}} = 4200$ Дж/кг $\cdot$ К, эфира $c_{\text{э}} = 2100$ Дж/кг $\cdot$ К.

Дано: $t^\circ_1 = 20^\circ$C, $M = 0,1$ кг, $t^\circ_{\text{пл}} = 0^\circ$C, $r = 3,8 \cdot 10^5$ Дж/кг, $\lambda = 3,3 \cdot 10^5$ Дж/кг, $c_{\text{в}} = 4200$ Дж/кг $\cdot$ К, $c_{\text{э}} = 2100$ Дж/кг $\cdot$ К; m — ?

Решение. Количество теплоты, необходимое для испарения эфира, равно $Q_1 = Q_{\text{пол}} = Mr > 0$. Это количество теплоты отдается водой и эфиром при их охлаждении до 0°C и при замерзании воды:

$$|Q_2| = Q_{\text{отд}} = -Mc_{\text{э}}(t^\circ_{\text{пл}} - t^\circ_1) - mc_{\text{в}}(t^\circ_{\text{пл}} - t^\circ_1) + m\lambda,$$

где λ — удельная теплота плавления льда.

Тогда уравнение теплового баланса запишется в виде

$$Q_1 + Q_2 = 0,$$

или

$$Q_{\text{пол}} = Q_{\text{отд}},$$

$$Mr + Mc_{\text{э}}(t^\circ_{\text{пл}} - t^\circ_1) + mc_{\text{в}}(t^\circ_{\text{пл}} - t^\circ_1) - m\lambda = 0,$$

или

$$Mr + Mc_{\text{э}}(t^\circ_1 - t^\circ_{\text{пл}}) = mc_{\text{в}}(t^\circ_1 - t^\circ_{\text{пл}}) + m\lambda.$$

Отсюда

$$m = \frac{M[r - c_{\text{э}}(t^\circ_1 - t^\circ_{\text{пл}})]}{\lambda + c_{\text{в}}(t^\circ_1 - t^\circ_{\text{пл}})}, \tag{14.8}$$

$$m = \frac{0,1\,[3,8 \cdot 10^5 - 2,1 \cdot 10^3 \cdot (20^\circ - 0^\circ)]}{3,3 \cdot 10^5 + 4,2 \cdot 10^3 \cdot (20^\circ - 0^\circ)}\,\text{кг} = 0,0816\,\text{кг} \approx 82\,\text{г}. \tag{14.9}$$

Задачи для самостоятельного решения

Задача 1. В 1 л воды, температура которой 20°C, бросают кусок железа массой 100 г, нагретого до 500°C. При этом температура воды повышается до 24°C и некоторое количество ее обращается в пар. Определите массу обратившейся в пар воды.

Ответ: 2,3 г.

Задача 2. К чайнику с кипящей водой подводится ежесекундно энергия, равная 1,13 кДж. Найти скорость истечения пара из носика чайника, площадь сечения которого равна $1\,\text{см}^2$. Плотность водяного пара считать $1\,\text{кг/м}^3$.

Ответ: 5 м/с.

Задача 3. Смесь, состоящую из 5 кг льда и 15 кг воды при общей температуре 0°C, нужно нагреть до температуры 80°C пропусканием водяного пара с температурой 100°C. Определите необходимое количество пара.

Ответ: 3,57 кг.

Задача 4. Какое количество теплоты надо затратить, чтобы 1 кг льда, взятого при −20°C, превратить в пар? Удельная теплоемкость льда 2100 Дж/кг·К, воды — 4200 Дж/кг·К, удельная теплота плавления льда $3,3 \cdot 10^5$ Дж/кг, удельная теплота парообразования $2,26 \cdot 10^6$ Дж/кг.

Ответ: $3,05 \cdot 10^6$ Дж.

Задача 5. В сосуд, содержащий 0,01 кг воды при температуре 10°C, положили кусок льда, охлажденный до −50°C, после чего температура образовавшейся ледяной массы оказалась равной −4°C. Какое количество льда было положено в сосуд? Удельная теплоемкость воды 4200 Дж/кг · К, льда — 2100 Дж/кг · К, удельная теплота плавления льда $3,4 \cdot 10^5$ Дж/кг.

Ответ: 0,04 кг.

Задача 6. Какое количество снега при температуре 0°C растает под колесами автомобиля, если он буксует в течение 20 с, а на буксовку идет 50% всей мощности? Мощность автомобиля равна $1,7 \cdot 10^4$ Вт, удельная теплота плавления льда $3,4 \cdot 10^5$ Дж/кг.

Ответ: 0,5 кг.

Задача 7. Свинцовая пуля массой 0,01 кг, летящая горизонтально со скоростью 500 м/с, попадает в неподвижный стальной кубик массой 90 г, лежащий на гладком горизонтальном столе. Какова будет температура обоих тел после удара? Удар считать абсолютно неупругим, температура пули в момент удара 30°C, кубика — 20°C. Потерями тепла пренебречь. Удельная теплоемкость свинца 126 Дж/кг · К, стали — 460 Дж/кг · К.

Ответ: 46,5°C.

Задача 8. 1 кг пара при 100°C выпускают в холодную воду, взятую в количестве 12 кг. Температура воды после конденсации в ней пара поднялась до 70°C. Какова была первоначальная температура воды? Удельная теплота парообразования воды $22,6 \cdot 10^5$ Дж/кг, удельная теплоемкость воды 4200 Дж/кг · К.

Ответ: 22°C.

Задача 9. С помощью механического молота массой 600 кг обрабатывается железная поковка массой 205 кг. За 35 ударов поковка нагрелась от 10 до 18°C. Какова скорость молота в момент удара? Считать, что на нагревание поковки затрачивается 70% энергии молота. Удельная теплоемкость железа 460 Дж/кг · К.

Ответ: 10 м/с.

Задача 10. В колбе находилось 518 г воды при 0°C. Откачивая из колбы воздух и водяные пары, воду заморозили. Какое количество воды при этом испарилось? Удельная теплота парообразования воды при 0°C равна $2,54 \cdot 10^6$ Дж/кг, удельная теплота плавления льда $3,35 \cdot 10^5$ Дж/кг.

Ответ: $m = 0,07$ кг.

Список литературы

[1] Баканина Л.П., Белучкин В.Е., Козел С.М., Мазанько И.П. Сборник задач по физике. — М.: Наука, 1990.

[2] Балаш В.А. Задачи по физике и методы их решения. — М.: Просвещение, 1983.

[3] Бендриков Г.А., Буховцев Б.Б., Керженцев В.В., Мякишев Г.Я. Задачи по физике для поступающих в ВУЗы. — М.: Наука, 1987.

[4] Буховцев Б.Б., Кривченков В.Д., Мякишев Г.Я., Сараева И.М. Сборник задач по элементарной физике. — М.: Наука, 1972.

[5] Варшавская Р.С. Методические указания и контрольные задания по физике для слушателей заочных курсов по подготовке в институт. — М.: Московский автомобильно-дорожный институт, 1976.

[6] Виноградов Ю.К., Суров О.И., Уварова Р.А. Типовые экзаменационные варианты по физике. Московский авиационный институт, 1981, 1985.

[7] Гладкова Р.А., Добронравов В.Е., Жданов Л.С., Цодиков Ф.С. Сборник задач и вопросов по физике. — М.: Наука, 1977.

[8] Гольдфарб Н.И. Сборник вопросов и задач по физике. — М.: Высшая школа, 1973.

[9] Детлаф А.А., Яворский Б.М. Курс физики. — М.: Высшая школа, 1989.

[10] Джанколи Д. Физика. — М: Мир, 1989.

[11] Зарецкая Н.Б., Черкес И.Д. Физика, пособие для поступающих. — М.: Московский горный институт.

[12] Зубов В.Г., Шальнов В.П. Задачи по физике. — М.: Наука, 1972.

[13] Карагодин Ю.А., Кортукова В.М. Методические указания по физике для поступающих в Московский медицинский стоматологический институт им. Н.А. Семашко. — М.: 1982.

[14] Кобушкин В.К., Кондратьев А.С., Прияткин Н.А. Сборник задач по физике. — Л.: изд-во Ленинградского Университета, 1965.

[15] Коган В.Ю. Задачи по физике. — М.: Просвещение, 1971.

[16] Козел С.М., Колачевский Н.Н., Косоуров Г.И., Мазанько И.П. Сборник задач по физике. — М.: Наука, 1965.

[17] Козел С.М., Рашба Э.И., Славатинский С.А. Сборник задач по физике. — М.: Наука, 1978.

[18] Меледин Г.В. Физика в задачах. — М.: Наука, 1985.

[19] Николаев В.И., Чернышев К.В. Пособие для поступающих в ВУЗы. — М.: изд-во МГУ, 1972.

[20] Пантюхов Г.И., Светозаров В.В., Руденко А.И. Сборник задач по физике: МФТИ, 1980.

[21] Задачи по математике, химии и физике/ Ред. Саргсян И.С. — М.: изд-во МПИ, 1990.

[22] Слободецкий И.Ш., Орлов В.А. Всесоюзные олимпиады по физике. — М.: Просвещение, 1985.

Оглавление

Молекулярная физика и термодинамика

УВАЖАЕМЫЙ ЧИТАТЕЛЬ!

Ваши замечания о содержании книги, ее оформлении, качестве перевода и другие просим присылать по адресу:

129820 Москва,
ГСП, И-110, 1-й Рижский пер., 2,
издательство «МИР».

Учебное издание

Наталья Андреевна Парфентьева
Марина Васильевна Фомина

Решение задач по физике
В помощь поступающим в ВУЗы
Часть 1
Издание второе, исправленное

Ведущий редактор М. Я. Рутковская
Художник А. В. Захаров
Художественные редакторы А. С. Волков О. Н. Адаскина
Технический редактор О. Г. Лапко

ИБ 8717

Лицензия Л. Р. № 010174 от 22.01.92 г.

Оригинал-макет подготовлен О. Г. Лапко в пакете LaTeX
с использованием кириллических шрифтов,
разработанных в редакции АИП издательства «Мир».

Подписано к печати 3.05.95. Формат 70 × 100/16. Бумага офсетная.
Печать офсетная. Объем 7,00 бум. л. Усл. печ. л. 18,20. Усл. кр.-отт. 18,85.
Уч.-изд. л. 14,50. Изд. № 2/9534. Тираж 30 000 экз. Зак. 154. С 074.

Издательство «Мир»
Комитета Российской Федерации по печати
129820, Москва, 1-й Рижский пер., 2.

АООТ «Тверской полиграфический комбинат»
170024, г. Тверь, проспект Ленина, 5.

В помощь поступающим в вузы

Н. Парфентьева, М. Фомина

Решение задач по физике

Часть 2

Издательство «Мир»

Решение задач по физике

В помощь поступающим в вузы

Н. Парфентьева, М. Фомина

Решение задач по физике

Часть 2

Издание второе, исправленное

Москва «Мир» 1995

ББК 22.3
П18
УДК 371.64/69

Парфентьева Н. А., Фомина М. В.

П18 Решение задач по физике. В помощь поступающим в вузы. Часть 2. — Издание второе, исправленное. М.: Мир, 1995. — 205 с., ил.

ISBN 5-03-002960-5

Предлагаемое пособие по физике поможет самостоятельно подготовиться к выпускным экзаменам в школе и успешно сдать вступительные экзамены в ВУЗ. В нем излагаются наиболее сложные для понимания школьниками вопросы физики и приводятся подробные решения задач. Как и в первой части, авторы, имеющие большой опыт работы с абитуриентами, учат грамотному подходу к решению задач. Вторая часть посвящена электростатике, постоянному току, магнетизму, колебаниям и волнам, геометрической оптике, волновой оптике, атомной и ядерной физике, причем сначала излагается необходимый теоритический материал, а затем приводятся примеры решения задач.

Для школьников старших классов и абитуриентов.

ББК 22.3

Редакция литературы по физике и астрономии

ISBN 5-03-002960-5
ISBN 5-03-0029

Предисловие и методические рекомендации

Во второй части пособия мы продолжаем изложение основных законов физики, а также приводим подробные решения задач. В этой части рассматриваются такие разделы физики, как электростатика, постоянный ток, магнетизм, колебания и волны, геометрическая оптика, волновая оптика, атомная и ядерная физика.

Следуя логике изложения в первой части пособия, мы не ограничиваемся формулировками законов, а кратко излагаем физическую сущность явлений и только затем даем формулы, выражающие физические законы. Такой подход нам нужен для того, чтобы показать, что без понимания сути физического явления невозможно решать задачи по физике, пользуясь одними лишь формулами. Каждая задача требует индивидуального творческого подхода к ее решению.

При решении задач мы пользовались теми же подходами и методами, которые были изложены в первой части пособия. Однако решение задач на такие темы, как электростатика и магнетизм, имеют свои особенности. Здесь необходимо внимательно отнестись к определению направления сил, действующих на проводники с током и заряженные частицы. Отметим, что мы умышленно не приводим правила правой руки для определения направления силы, действующей на отрицательный заряд, и направления индукционного тока. Правило правой руки, как показывает опыт преподавания, приводит к путанице. Вполне достаточно научиться грамотно пользоваться правилом левой руки и правилом Ленца. Мы обращаем внимание читателя на определение направления индукционного тока и эдс индукции. В пособии приводится много примеров на эту тему.

В гл. 5 "Геометрическая оптика" следует обратить особое внимание на правильный выбор знаков в формуле линзы, на понятие мнимого источника.

Мы выражаем сердечную благодарность рецензенту книги Е. М. Новодворской за тщательное прочтение рукописи и ценные замечания, которые были нами учтены при окончательном редактировании текста книги.

Мы благодарны также художнику Н. М. Григорьевой, рисунки которой, как мы надеемся, значительно облегчат читателю понимание текста и научат, как правило составить рисунок при решении задачи.

Мы надеемся, что данное пособие окажется полезным при изучении физики в школе, при подготовке в вуз, а также всем тем, кто хочет понять физические законы и научиться решать задачи по физике. Оно будет также полезно также

Авторы и издательство будут благодарны тем, кто найдет опечатки и неточности и сообщит об этом в издательство. Мы обязательно учтем все замечания при переиздании книги.

Список литературы, использованной авторами при подготовке пособия, приводится в конце книги.

Авторы

Глава 1
Электростатика

При определенных условиях тела электризуются, т. е. приобретают некоторый *заряд*. (Вся совокупность электрических и магнитных явлений есть проявление существования, движения и взаимодействия *электрических зарядов*.) Существуют заряды только двух видов: отрицательные и положительные, причем это деление чисто условное. Одноименные заряды отталкиваются, а разноименные притягиваются (рис. 1.1). Если заряженное тело A притягивается к заряженному телу B, а тело B в свою очередь отталкивается от тела C, то последнее будет притягиваться к телу A. Никаких других зарядов, которые могли бы вызвать иное взаимодействие тел, в природе не существует. Единица заряда в СИ — *кулон* (Кл). По определению, 1 кулон равен заряду, протекающему через поперечное сечение проводника за 1 с при силе тока 1А.

Наиболее распространенным способом электризации тел является электризация при соприкосновении (путем трения). Известно, что если шелком потереть стеклянную палочку или шерстью — эбонитовую, то по определению первая приобретает положительный заряд, а вторая — отрицательный. Этот способ электризации обусловлен тем, что при трении увеличивается площадь соприкосновения тел и улучшается контакт между их поверхностями. Для такого способа электризации необходимо, чтобы тела, приводящиеся в соприкосновение, обладали различными электрическими свойствами, например, разной концентрацией свободных электронов. Обычно тела электронейтральны, т. е. суммарный положительный заряд замкнутой физической системы равен суммарному отрицательному заряду. Частичный переход электронов от тела с наибольшей их концентрацией к телу с меньшей концентрацией приводит к тому, что оба тела приобретают заряд. Другим способом электризации тел является электризация через влияние, или метод электростатической индукции. В проводниках имеются свободные заряды, в частности, в металлах есть свободные электроны. Если состоящий из двух частей проводник поднести к заряженному телу, то вследствие отталкивания одноименных зарядов и притяжения разноименных на одной части проводника сосредоточатся заряды одного знака, а на другой — другого (рис. 1.2*а*). Разъединив эти две части тела, получим два заряженных тела (рис. 1.2*б*).

Перечислим свойства зарядов.

1. Существуют заряды двух видов; отрицательные и положительные. Разноименные заряды притягиваются, одноименные отталкиваются. Носителем элементарного, т. е. наименьшего, отрицательного заряда является *электрон*,

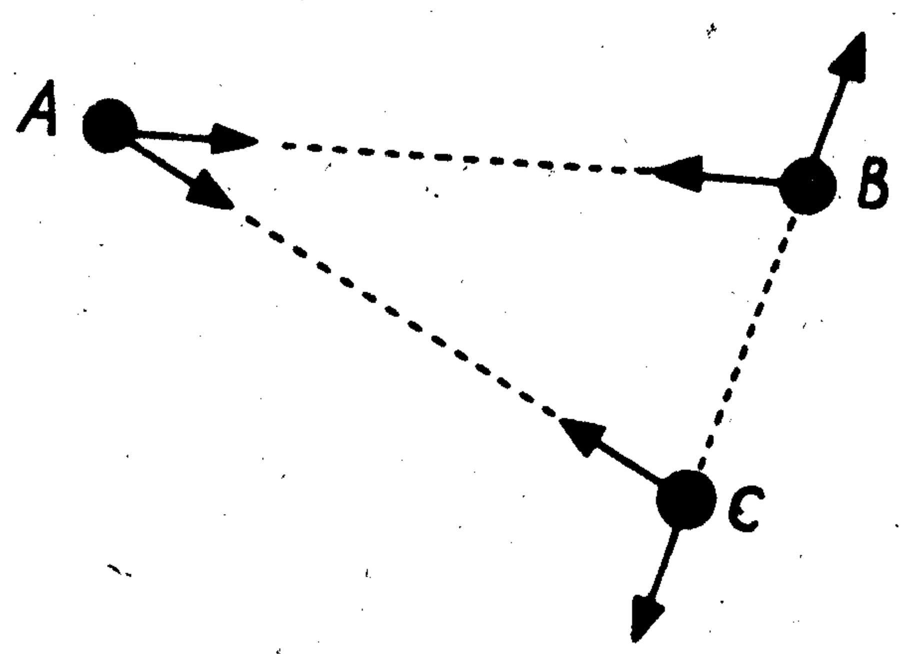


Рис. 1.1.

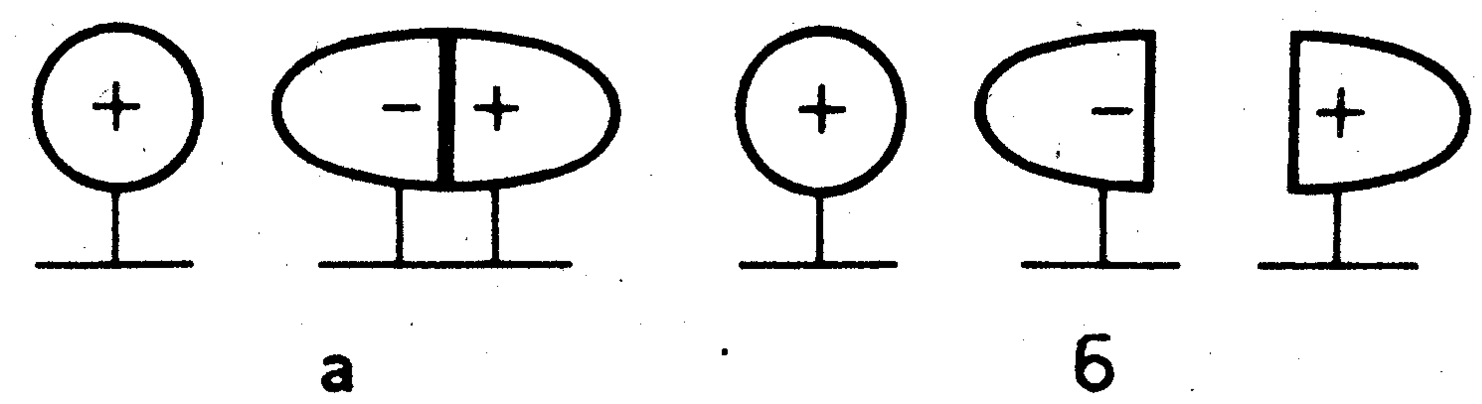


Рис. 1.2.

заряд которого $q_e = -1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл, а масса $m_e = 9,1 \cdot 10^{-31}$ кг. Носителем элементарного положительного заряда является протон $q_p = +1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл, масса $m_p = 1,67 \cdot 10^{-27}$ кг.

2. Электрический заряд имеет дискретную природу. Это означает, что заряд любого тела кратен заряду электрона $q = Nq_e$, где N — целое число. Однако мы, как правило, не замечаем дискретности заряда, так как элементарный заряд очень мал.

3. В изолированной системе, т. е. в системе, тела которой не обмениваются зарядами с внешними по отношению к ней телами, алгебраическая сумма зарядов сохраняется (*закон сохранения заряда*). Например, если система состоит из двух одинаковых, но разноименно заряженных тел ($|q_1| = |q_2|$), то после соприкосновения тела будут электронейтральны, однако алгебраическая сумма зарядов сохранится, так как она и до соприкосновения была равна нулю.

Закон Кулона

Ш. Кулон на основании опытов с крутильными весами установил, что сила взаимодействия двух точечных электрических зарядов, находящихся в вакууме, прямо пропорциональна произведению этих зарядов и обратно пропорциональна квадрату расстояния между ними и направлена вдоль прямой, соединяющей заряды.

Заряженное тело, размером и формой которого можно пренебречь по сравнению с расстоянием до других заряженных тел, называется *точечным зарядом*. Подчеркнем, что закон Кулона справедлив только для точечных зарядов и выражается следующей формулой:

$$F = k|q_1||q_2|/r^2, \tag{1.1}$$

где q_1 и q_2 — величины взаимодействующих зарядов, r — расстояние между ними (рис. 1.3), k — коэффициент, зависящий от выбора системы единиц. Направление сил, действующих на заряды при взаимодействии одноименных зарядов, показано на рис. 1.3,*а*, разноименных — на рис. 1.3,*б*. Очевидно, что силы $\mathbf{F}_1$ и $\mathbf{F}_2$, действующие на заряды q_1 и q_2, равны по величине и определяются по формуле (1.1). В СИ имеем $k = 1/4\pi\varepsilon_0 = 9 \cdot 10^9 \text{Н} \cdot \text{м}^2/\text{Кл}^2$, где ε_0 — электрическая постоянная, равная $\varepsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м, [Ф/м = Кл^2/Н $\cdot$ м^2]. Если заряды находятся в идеально однородной среде, то сила взаимодействия между ними уменьшается в ε раз, ε — относительная диэлектрическая проницаемость

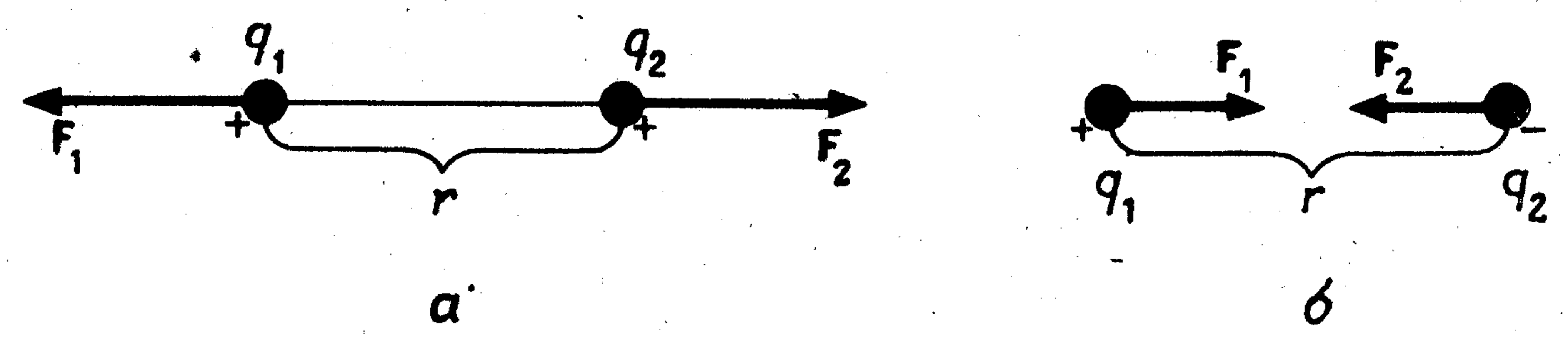


Рис. 1.3.

среды. Тогда закон Кулона в СИ имеет вид

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{|q_1||q_2|}{\varepsilon r^2}. \tag{1.2}$$

Если имеется система точечных зарядов, то сила, действующая на каждый из них, определяется как векторная сумма сил, действующих на данный заряд со стороны всех других зарядов системы. При этом сила взаимодействия данного заряда с каким-то конкретным зарядом рассчитывается так, как будто других зарядов нет (принцип суперпозиции).

Примеры решения задач

Задача 1. Какой заряд имел бы 1 см^3 железа, если бы удалось удалить из него миллионную долю содержащихся в нем электронов?

Дано: $V = 1\,\text{см}^3 (V = 10^{-6}\,\text{м}^3)$, $n = 10^{-6}$, $\rho = 7,6 \cdot 10^3\,\text{кг/м}^3$, $q_e = 1,6 \cdot 10^{-19}\,\text{Кл}$; q — ?

Решение. Порядковый номер элемента в периодической системе элементов Д.И. Менделеева показывает заряд ядра и число электронов в атоме. Порядковый номер железа 27, следовательно, в одном атоме железа имеется $Z = 27$ электронов. Определим число электронов в 1 см^3 железа. Масса этого объема железа $m = \rho V$, где ρ — плотность железа. Число атомов в данном объеме определяется из соотношения $N = (m/A)N_A$, где A — атомная масса железа, равная $A = 56\,\text{г/моль} = 0,056\text{кг/моль}$, N_A — число Авогадро, $N_A = 6,02 \cdot 10^{23}\,\text{моль}^{-1}$. Число электронов в объеме V равно $N_e = N_A Z(\rho V/A)$. Если удалить n-ю часть электронов, то заряд будет равен

$$q = +n(\rho V/A)N_A Z|q_e|,$$

$$[q] = \frac{\text{кг} \cdot \text{м}^3 \cdot \text{моль}}{\text{м}^3 \cdot \text{кг} \cdot \text{моль}}\text{Кл} = \text{Кл},$$

$$q = 10^{-6}\frac{7,6 \cdot 10^3 \cdot 10^{-6} \cdot 6,02 \cdot 10^{23} \cdot 27 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}}{0,056}\text{Кл} = 3,53 \cdot 10^{-1}\text{Кл}.$$

Задача 2. Маленький шарик массой $2 \cdot 10^{-3}$ кг, подвешенный на тонкой шелковой нити, несет на себе заряд $3 \cdot 10^{-7}$ Кл. На какое расстояние снизу к нему следует поднести другой маленький шарик с зарядом $5 \cdot 10^{-7}$ Кл, чтобы натяжение нити уменьшилось в 2 раза?

Дано: $m = 2 \cdot 10^{-3}$ кг, $q_1 = 3 \cdot 10^{-7}$ Кл, $q_2 = 5 \cdot 10^{-7}$ Кл, $F_{\text{н}1} = F_{\text{н}}/2$; r — ?

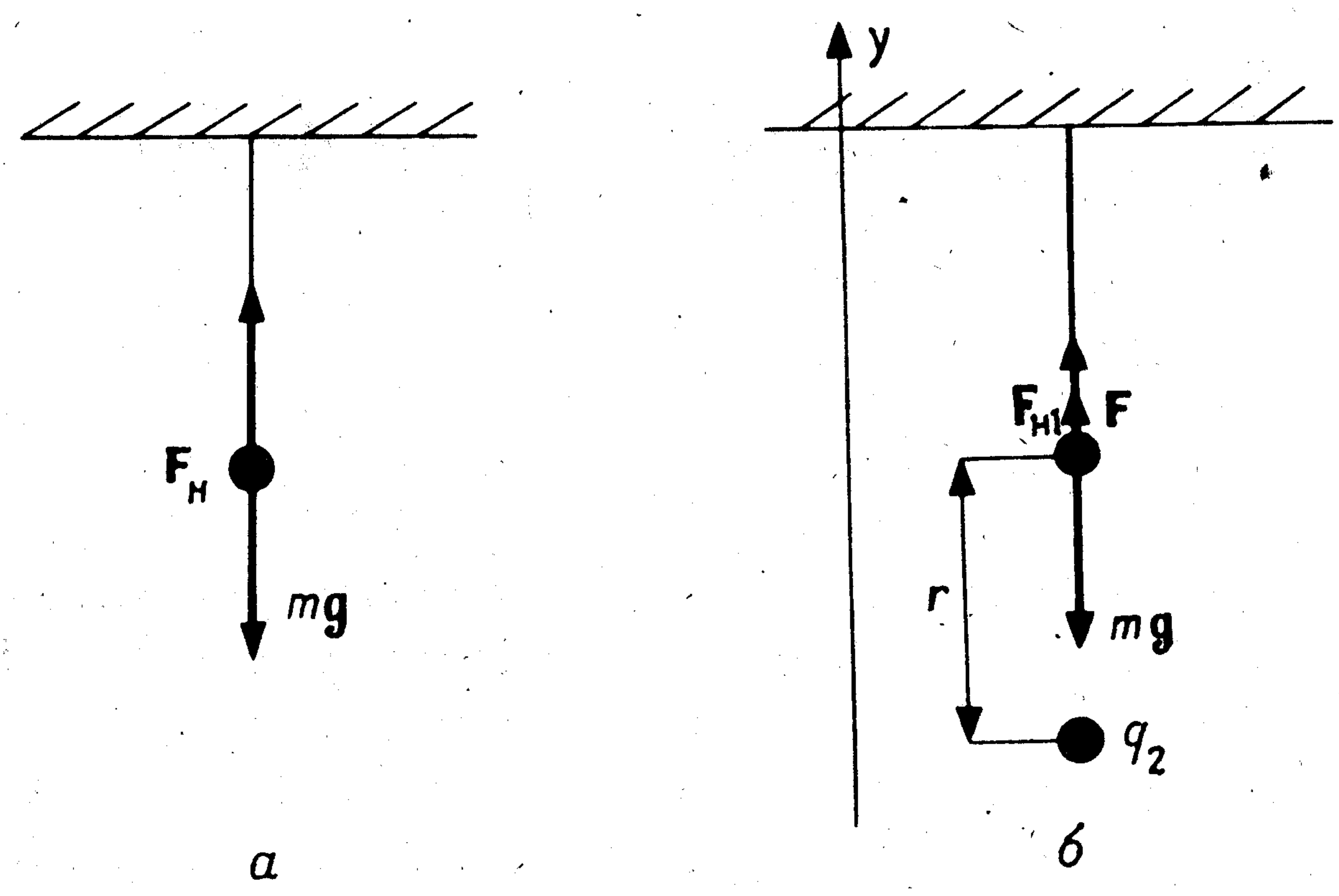


Рис. 1.4.

Решение. На шарик действуют две силы: сила тяжести $\mathbf{F}_т = m\mathbf{g}$ и сила натяжения нити $\mathbf{F}_н$ $F_н = mg$ (рис. 1.4,*а*). Если на расстоянии r помещен заряд q_2, то на шарик действует еще одна сила — сила Кулона, направленная вверх и равная

$$|\mathbf{F}| = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{|q_1|\cdot|q_2|}{r^2}.$$

Чтобы сила натяжения уменьшилась, заряд должен быть того же знака. Условие равновесия шарика в этом случае есть

$$\mathbf{F} + \mathbf{F}_т + \mathbf{F}_{н1} = 0,$$

или в проекции на ось y (рис. 1.4,*б*)

$$F + F_{н1} - mg = 0.$$

По условию задачи $F_{н1} = F_н/2 = mg/2$, откуда

$$\frac{mg}{2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{|q_1|\cdot|q_2|}{r^2}.$$

Следовательно,

$$r = \sqrt{\frac{|q_1|\cdot|q_2|}{2\pi\varepsilon_0 mg}},$$

$$[r] = \sqrt{\frac{\text{Кл}^2}{(\text{Кл}^2/\text{Н}\cdot\text{м}^2)\cdot\text{кг}\cdot(\text{м}/\text{с}^2)}} = \sqrt{\frac{\text{Н}\cdot\text{м}\cdot\text{с}^2}{\text{кг}}} = \sqrt{\frac{\text{кг}\cdot\text{м}^2\cdot\text{с}^2}{\text{с}^2\cdot\text{кг}}} = \text{м},$$

$$r = \sqrt{\frac{3\cdot 10^{-7}\cdot 5\cdot 10^{-7}}{2\cdot 3,14\cdot 8,85\cdot 10^{-12}\cdot 2\cdot 10^{-3}\cdot 9,8}}\,\text{м} = 3,7\cdot 10^{-1}\,\text{м}.$$

Задача 3. Два разноименных заряда $q_1 = 2\cdot 10^{-4}$ Кл и $q_2 = -8\cdot 10^{-4}$ Кл расположены на расстоянии 1 м друг от друга. Какой величины и где надо поместить заряд q_x, чтобы система зарядов находилась в равновесии?

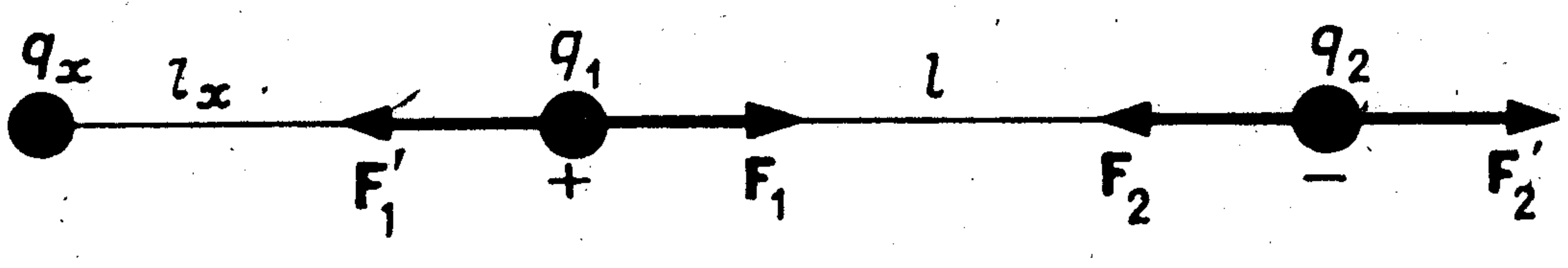


Рис. 1.5.

Дано: $q_1 = 2 \cdot 10^{-4}$ Кл, $q_2 = -8 \cdot 10^{-4}$ Кл, $l = 1$ м; q_x — ? l_x — ?

Решение. Заряды q_1 и q_2 разноименные, следовательно, они притягиваются и на них действуют силы $\mathbf{F}_1$ и $\mathbf{F}_2$ соответственно (рис. 1.5). Для равновесия каждого из зарядов необходимо, чтобы на заряды q_1 и q_2 со стороны заряда q_x действовали силы $\mathbf{F}_1'$ и $\mathbf{F}_2'$, равные по величине силам $\mathbf{F}_1$ и $\mathbf{F}_2$ и противоположные по направлению. Поскольку $|q_1| < |q_2|$, заряд q_x должен быть помещен ближе к заряду q_1, чтобы силы, действующие на заряды q_1 и q_2 со стороны q_x, были равны. Заряд q_x должен притягивать q_1 и отталкивать q_2:

$$\mathbf{F}_1 = -\mathbf{F}_1', \tag{1.3а}$$

$$\mathbf{F}_2 = -\mathbf{F}_2'. \tag{1.3б}$$

В проекциях на ось x уравнения (1.3а) и (1.3б) имеют вид

$$F_1 = F_1', \quad F_2 = F_2',$$

$$k\frac{|q_1|\cdot|q_2|}{l^2} = k\frac{|q_x|\cdot|q_1|}{l_x^2}, \tag{1.4а}$$

$$k\frac{|q_1|\cdot|q_2|}{l^2} = k\frac{|q_x|\cdot|q_2|}{(l+l_x)^2}. \tag{1.4б}$$

Решаем систему уравнений (1.4) относительно двух неизвестных q_x и l_x:

$$\frac{|q_2|}{(l+l_x)^2} = \frac{|q_1|}{l_x^2},$$

$$|q_2/q_1| l_x^2 = (l+l_x)^2,$$

откуда

$$l_x = \frac{l}{\sqrt{|q_2/q_1|} - 1}, \quad l_x = l = 1\,\text{м}$$

Из (1.4а) следует, что $q_x = q_1 = 2 \cdot 10^{-4}$ Кл.

Задача 4. В вершинах квадрата находятся одинаковые по величине одноименные заряды (рис. 1.6). Определить величину заряда q_0, который надо поместить в центр квадрата, чтобы система зарядов находилась в равновесии. Будет ли это равновесие устойчивым?

Дано: $q_1 = q_2 = q_3 = q_4 = q$; q_0 — ?

Решение. Рассмотрим силы, действующие на любой из зарядов в вершинах, например, на заряд q_2. Со стороны зарядов q_1, q_3, q_4 на него действуют силы $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_3$ и $\mathbf{F}_4$ соответственно, причем $F_1 = F_3 = kq^2/a^2$, где a — сторона квадрата, $F_4 = kq^2/2a^2$. Сила, действующая на заряд q_2 со стороны заряда q_0, равна $F_0 = 2kqq_0/a^2$. Условие равновесия заряда q_2 имеет вид

$$\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_3 + \mathbf{F}_4 + \mathbf{F}_0 = 0. \tag{1.5}$$

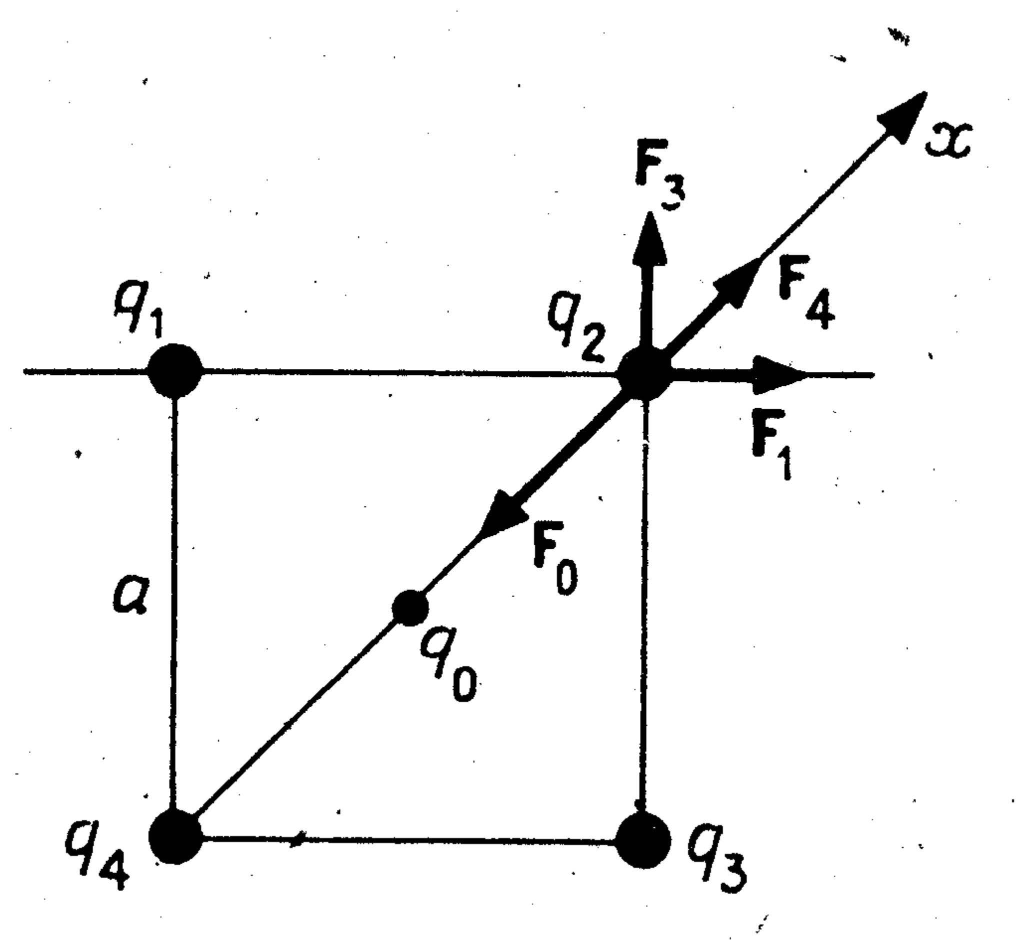


Рис. 1.6.

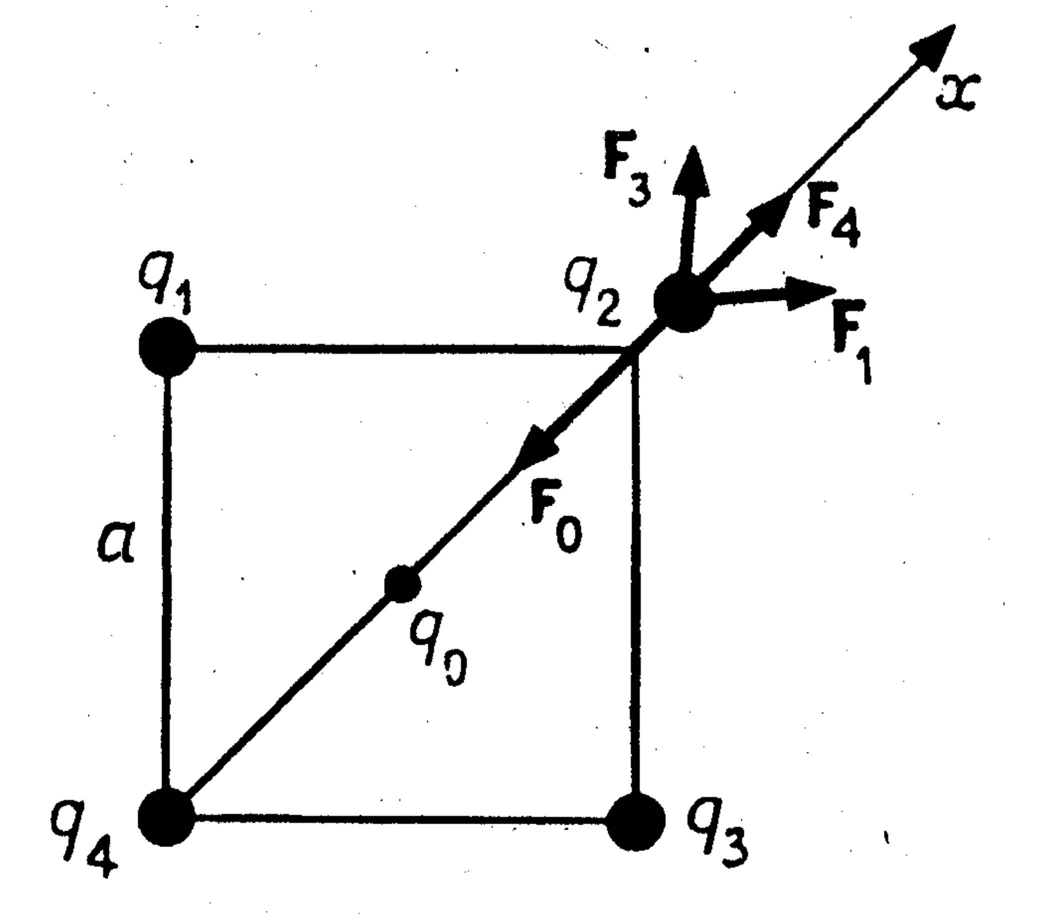


Рис. 1.7.

В проекции на ось x уравнение (1.5) запишется:

$$F_1 \cos 45^\circ + F_3 \cos 45^\circ + F_4 - F_0 = 0,$$

или

$$k\frac{q^2}{a^2}\sqrt{2} + k\frac{q^2}{2a^2} - k\frac{2qq_0}{a^2} = 0,$$

откуда

$$q_0 = q(1 + 2\sqrt{2})/4 = 0,95q.$$

Чтобы ответить на вопрос об устойчивости системы, сместим заряд q_2 на малое расстояние вдоль оси x (рис. 1.7). При этом по величине силы практически не изменятся, однако угол между векторами $\mathbf{F}_1$ и $\mathbf{F}_3$ уменьшится, что приведет к увеличению силы отталкивания. Следовательно, заряд q_2 будет отклоняться от нового положения равновесия, т. е. его равновесие будет неустойчиво. Согласно теореме Ирншоу, система неподвижных точечных зарядов, находящихся на конечном расстоянии друг от друга, не может находиться в состоянии устойчивого равновесия лишь под действием кулоновских сил.

Задача 5. Два маленьких одноименно заряженных шарика радиусом $r = 1$ см подвешены на двух нитях длиной $l = 1$ м. Заряды шариков $q = 4 \cdot 10^{-6}$ Кл. Нити, на которых подвешены шарики, составляют угол $\alpha_1 = 90^\circ$.

1) Определить массу шариков.

2) Определить диэлектрическую проницаемость диэлектрика, если его плотность $\rho = 0,8 \cdot 10^3$ кг/м^3 при условии, что при погружении шарика в жидкий однородный диэлектрик угол между нитями будет $\alpha_2 = 60^\circ$.

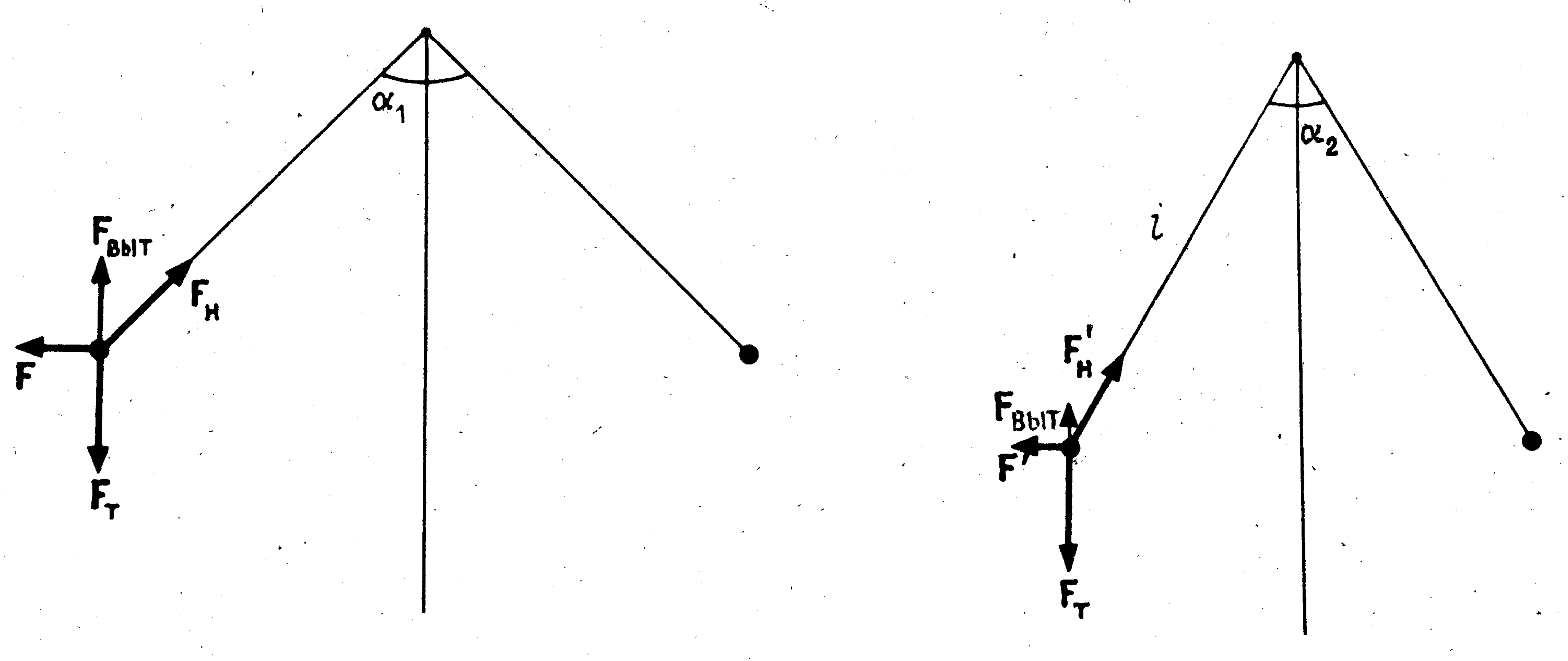
Дано: $r = 1$ см (0,01 м), $q = 4 \cdot 10^{-6}$ Кл, $\alpha_1 = 90^\circ$, $\alpha_2 = 60^\circ$, $\rho = 800$ кг/м^3, $l = 1$ м; m — ? ε — ?

Решение. Очевидно, что условия равновесия для обоих шариков одинаковы, поэтому рассмотрим один из них. В воздухе на шарик действуют три силы (рис. 1.8,*а*): сила Кулона $\mathbf{F}$, сила натяжения $\mathbf{F}_{\text{н}}$, сила тяжести $\mathbf{F}_{\text{т}} = m\mathbf{g}$. Условие равновесия шарика

$$\mathbf{F} + \mathbf{F}_{\text{н}} + \mathbf{F}_{\text{т}} = 0,$$

или в проекциях на оси координат

$$\text{на ось } x: \qquad F - F_{\text{н}} \sin \alpha_1/2 = 0,$$



а *б*

Рис. 1.8.

на ось y: $$F_н \cos\alpha_1/2 - mg = 0.$$

Расстояние между шариками равно $2l\sin\alpha_1/2$. Кулоновская сила определится формулой

$$F = k\frac{q^2}{4l^2\sin^2\alpha_1/2}.$$

Из написанной системы уравнений очевидно

$$mg = F\operatorname{ctg}\alpha_1/2,$$

и окончательно

$$m = \frac{kq^2}{g4l^2\sin^2\alpha_1/2}\operatorname{ctg}\alpha_1/2 = \frac{q^2\operatorname{ctg}\alpha_1/2}{16\varepsilon_0 g l^2\sin^2\alpha_1/2},$$

$$[m] = \frac{\text{Кл}^2}{(\text{Кл}^2/\text{Н}\cdot\text{м}^2)\cdot(\text{м}/\text{с}^2)\cdot\text{м}^2} = \frac{\text{Н}\cdot\text{с}^2}{\text{м}} = \text{кг},$$

$$m = \frac{16\cdot10^{-12}\cdot2}{16\cdot8,85\cdot10^{-12}\cdot10\cdot1^2\cdot2}\,\text{кг} = 0,016\,\text{кг}.$$

В диэлектрике (рис. 1.8,*б*) на шарик действуют четыре силы: сила Кулона $\mathbf{F}'$, сила натяжения нити $\mathbf{F}'_н$, сила тяжести $\mathbf{F}_т = m\mathbf{g}$ и выталкивающая сила $\mathbf{F}_{выт} = \rho V\mathbf{g}$, где $V = (4/3)\pi r^3$ — объем шарика.

Условие равновесия для каждого шарика имеет вид

$$\mathbf{F}' + \mathbf{F}'_н + \mathbf{F}_т + \mathbf{F}_{выт} = 0,$$

или в проекциях

на ось x: $$F' - F'_н\sin\alpha_2/2 = 0,$$

на ось y: $$F'_н\cos\alpha_2/2 + F_{выт} - mg = 0,$$

откуда

$$F' = (mg - F_{выт})\operatorname{tg}\alpha_2/2,$$

и, окончательно,

$$\varepsilon = \frac{q^2}{16\pi\varepsilon_0 l^2 \sin^2 \alpha_2/2(m - \rho 4\pi r^3/3) g \operatorname{tg} \alpha_2/2},$$

$$[\varepsilon] = \frac{\text{Кл}^2}{(\text{Кл}^2/\text{Н} \cdot \text{м}^2) \cdot \text{м}^2 \cdot (\text{кг} - \text{кг} \cdot \text{м}/\text{м}^3) \cdot \text{м}/\text{с}^2},$$

$$\varepsilon = \frac{(4 \cdot 10^{-6})^2}{16 \cdot 3{,}14 \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-12} \cdot (1/4) \cdot 1 \cdot (0{,}016 - 800 \cdot (4/3) \cdot 3{,}14 \cdot 10^{-6}) 9{,}8\sqrt{3}/3} = 2.$$

Задача 6. В атоме водорода электрон движется по стационарной круговой орбите с угловой скоростью $\omega = 10^{16}\,\text{с}^{-1}$. Определить радиус орбиты.

Дано: $\omega = 10^{16}\,\text{с}^{-1}$, $m_e = 9,1 \cdot 10^{-31}$ кг, $q_e = -1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл; r — ?

Решение. Согласно модели Бора, в атоме существуют орбиты, двигаясь по которым электрон не излучает энергию. В задаче рассматривается такая орбита. На электрон действует кулоновская сила притяжения к протону **F**. Силой тяжести электрона пренебрегаем, так как $m_e g \ll F$.

По второму закону Ньютона $m_e a_n = F$,

$$m_e \omega^2 r = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{|q_e||q_p|}{r^2},$$

откуда

$$r^3 = \frac{|q_e||q_p|}{4\pi\varepsilon_0 m_e \omega^2}, \quad |q_e| = |q_p|,$$

окончательно,

$$r = \sqrt[3]{\frac{q_e^2}{4\pi\varepsilon_0 m_e \omega^2}},$$

$$[r] = \sqrt[3]{\frac{\text{Кл}^2}{(\text{Кл}^2/\text{Н} \cdot \text{м}^2) \cdot \text{кг} \cdot \text{с}^{-2}}} = \sqrt[3]{\frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}^2} \frac{\text{м}^2}{\text{кг}/\text{с}^2}} = \text{м},$$

$$r = \sqrt[3]{\frac{1,6^2 \cdot 10^{-38}}{4 \cdot 3,14 \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 9,1 \cdot 10^{-31} \cdot 10^{32}}}\ \text{м} = 1,4 \cdot 10^{-10}\,\text{м}.$$

Задача 7. Определите угловую скорость вращения четырех зарядов $-q$, массой m, расположенных в углах квадрата со стороной d, движущихся по круговым орбитам. В центре квадрата расположен заряд $+q$ (рис. 1.9). Взаимное расположение электронов при движении не изменяется.

Дано: $m, q_1 = q_2 = q_3 = q_4 = -q$; $q_0 = +q$, d; ω — ?

Решение. На заряд, расположенный в вершине квадрата, например, на заряд q_2, действуют четыре силы: со стороны зарядов q_1, q_3, q_4 действуют силы отталкивания $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_3, \mathbf{F}_4$, причем $F_1 = F_3$, а со стороны заряда $+q$ сила притяжения $\mathbf{F}_0$. По второму закону Ньютона

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_3 + \mathbf{F}_4 + \mathbf{F}_0. \qquad (1.6)$$

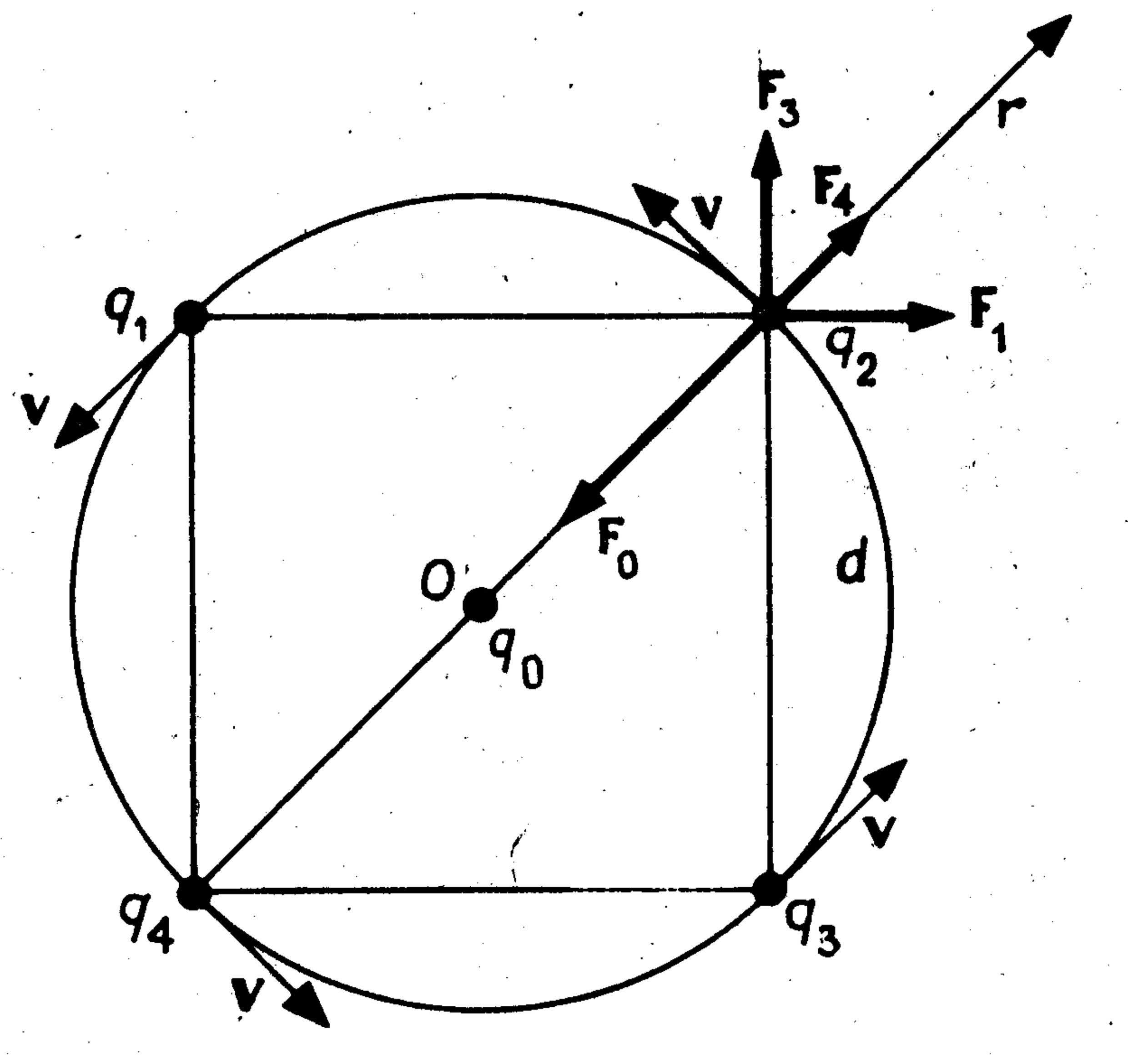


Рис. 1.9.

Заряды движутся по окружностям, радиусы которых $r = d\sqrt{2}/2$, с постоянной угловой скоростью ω и центростремительным (нормальным) ускорением $a_n = \omega^2 d\sqrt{2}/2$. В проекции на линию Or уравнение (1.6) запишется в виде:

$$m\omega^2 d\sqrt{2}/2 = F_0 - 2F_1\cos 45^\circ - F_4,$$

где

$$F_0 = k\frac{q^2 2}{d^2}, \quad F_1 = k\frac{q^2}{d^2}, \quad F_4 = k\frac{q^2}{2d^2}.$$

Тогда

$$m\omega^2 d\frac{\sqrt{2}}{2} = k\frac{q^2}{d^2}(2 - \sqrt{2} - 1/2) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{d^2}(3/2 - \sqrt{2}).$$

Отсюда

$$\omega = \frac{q}{2d}\sqrt{\frac{(1,5 - \sqrt{2})\sqrt{2}}{\varepsilon_0 \pi m d}} = 6\cdot 10^4 \frac{q}{d^{3/2} m^{1/2}},$$

$$[\omega] = \frac{\text{Кл}}{\text{м}}\sqrt{\frac{\text{Н}\cdot\text{м}^2}{\text{Кл}^2\cdot\text{м}\cdot\text{кг}}} = \sqrt{\frac{\text{кг}\cdot\text{м}}{\text{с}^2\cdot\text{м}\cdot\text{кг}}} = \frac{1}{\text{с}}.$$

Отметим, что движение зарядов по круговым орбитам радиуса r не может происходить сколь угодно долго, так как известно, что заряд, движущийся с ускорением, излучает энергию и теряет скорость. Радиус орбиты постепенно будет уменьшаться. Так что найденное решение будет справедливо в течение достаточно короткого промежутка времени.

Напряженность электрического поля

Заряды, находясь на некотором расстоянии один от другого, взаимодействуют. Это взаимодействие осуществляется посредством электрического поля (аналогично на тело массой m действует сила, если оно находится в поле тяготения другого тела, например, Земли). Наличие электрического поля можно обнаружить, помещая в различные точки пространства электрические заряды. Если на заряд, находящийся в данной точке, действует электрическая сила, то это означает, что в данной точке пространства существует электрическое поле. Силовой характеристикой электрического поля служит *напряженность* **E**.

Если на находящийся в некоторой точке заряд q_0 действует сила **F**, то напряженность электрического поля **E** равна:

$$\mathbf{E} = \mathbf{F}/q_0, \tag{1.7}$$

т. е. напряженность электрического поля — это величина, равная силе, действующей на единичный положительный заряд, помещенный в данную точку поля (в СИ — на заряд 1 Кл), откуда наименование $[E]$ =Н/Кл. Отметим, что поля на самом деле исследуются с помощью пробных зарядов, которые должны быть настолько малы, чтобы внесение пробного заряда в исследуемое поле, создаваемое заряженным телом, не вызывало в нем перераспределение заряда.

Если известна напряженность **E** как функция координат, $\mathbf{E}(x, y, z)$, то, согласно (1.7), можно определить силу, действующую на точечный заряд q, помещенный в некоторую точку поля $\mathbf{E}(x_0, y_0, z_0)$, по формуле

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E}(x_0, y_0, z_0). \tag{1.8а}$$

Если **E** зависит от координат, то поле называется неоднородным. Если вектор **E** одинаков и по модулю, и по направлению во всех точках поля, то такое поле называется однородным. Очевидно, что в однородном электрическом поле сила, действующая на заряженное тело в любой точке, постоянна и равна

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E}. \tag{1.8б}$$

Графически электрические поля изображаются *силовыми линиями*. Силовая линия — это линия, касательная в каждой точке которой совпадает с вектором напряженности электрического поля в этой точке. В дальнейшем изложении теории и в примерах решения задач будет показана конфигурация электрических полей, создаваемых различными системами зарядов.

Электрическое поле точечного заряда

Пусть в точке O находится точечный заряд q (рис. 1.10). Вокруг него существует электрическое поле. Для исследования этого поля поместим пробный заряд $q_{\text{пр}}$ на расстояние r от него.

Сила Кулона, действующая на заряд $q_{\text{пр}}$, равна

$$F = k\frac{|q| \cdot q_{\text{пр}}}{\varepsilon r^2} \quad (q_{\text{пр}} > 0).$$

Из определения (1.7) следует

$$\mathbf{E} = \mathbf{F}/q_{\text{пр}}, \tag{1.9}$$

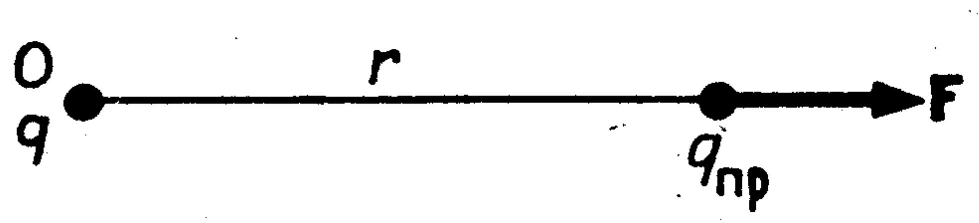
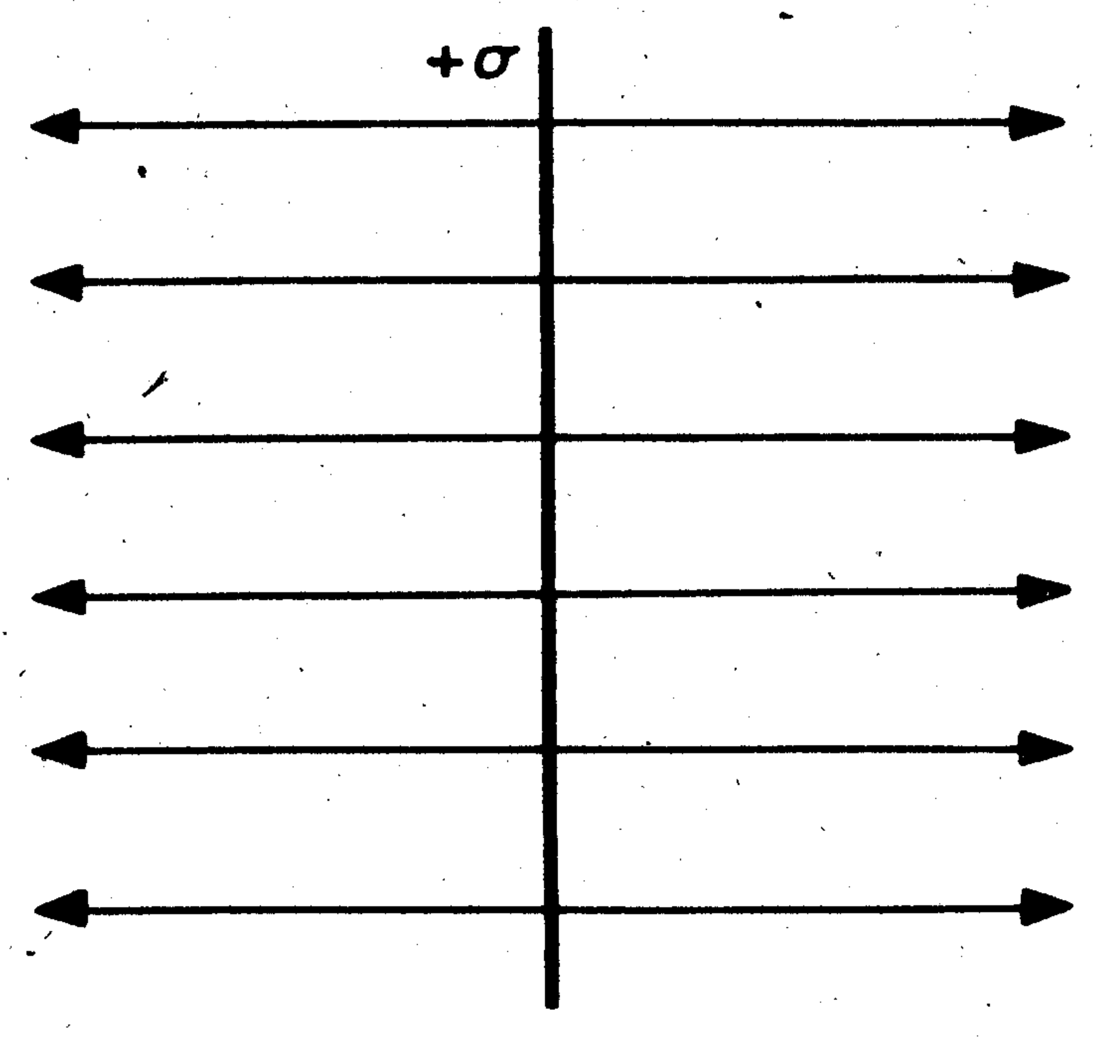


Рис. 1.10.



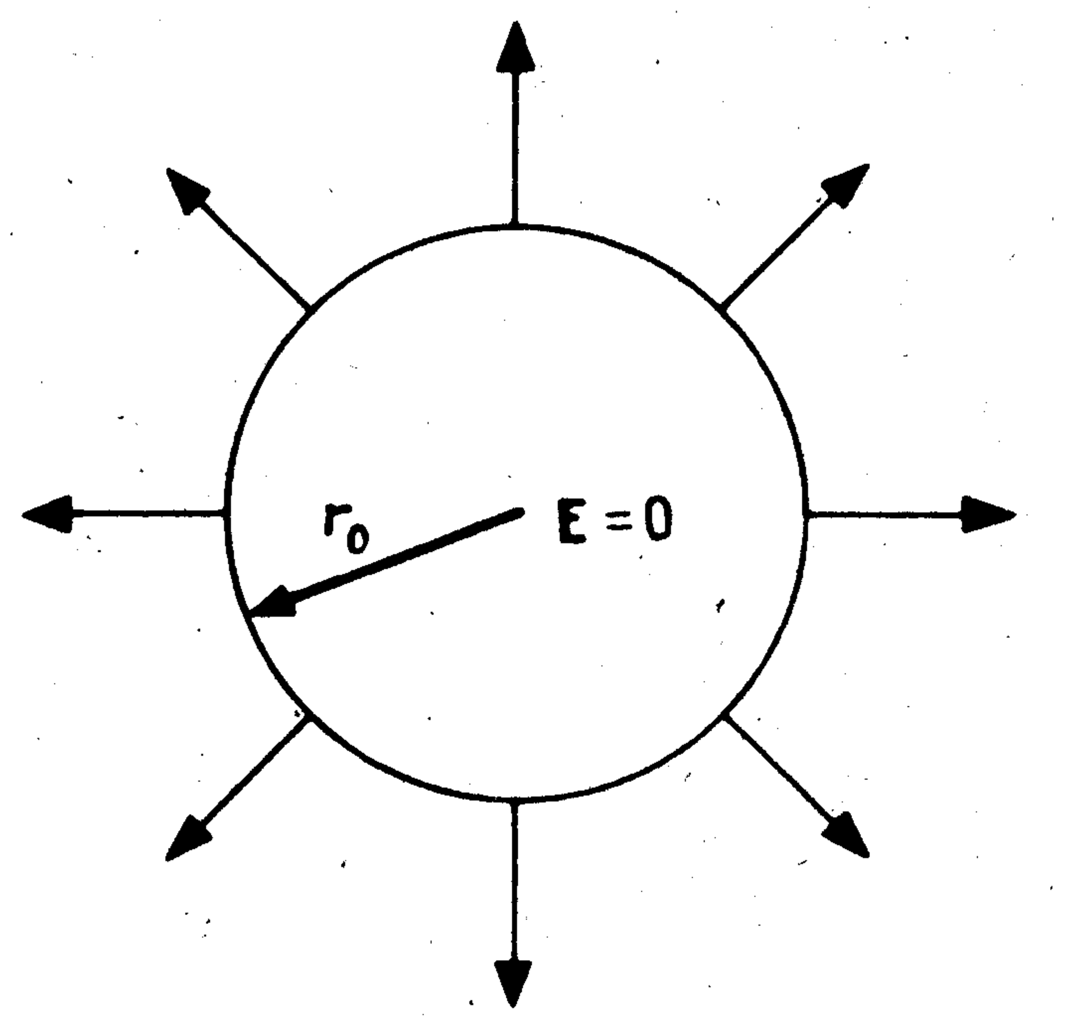


Рис. 1.11.

откуда

$$E = k\frac{|q|}{\varepsilon r^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{|q|}{\varepsilon r^2}. \tag{1.10}$$

Напряженность поля точечного заряда прямо пропорциональна величине заряда и обратно пропорциональна квадрату расстояния от точечного заряда до исследуемой точки.

Если поле создается несколькими зарядами, то напряженность электрического поля в данной точке определяется векторной суммой напряженностей полей, создаваемых в этой точке каждым зарядом в отдельности. Причем поле каждого источника считается так, как будто других источников поля нет (принцип суперпозиции полей):

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 + \mathbf{E}_3 + \ldots. \tag{1.11}$$

Поле, создаваемое непрерывно распределенным зарядом, сложно определить, используя только принцип суперпозиции. Если поля симметричны, то напряженность поля определяется с помощью теоремы Остроградского — Гаусса.

Без вывода приведем формулы для определения напряженностей электрических полей в следующих случаях:

1. Поле равномерно заряженной бесконечной плоскости:

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0\varepsilon}, \tag{1.12}$$

где σ — поверхностная плотность заряда, равная $\sigma = \Delta q/\Delta S$, а Δq — заряд площадки ΔS (рис. 1.11,*а*).

2. Поле проводящей сферы радиуса r_0. Заряд q равномерно распределен по поверхности сферы. Внутри сферы при $r < r_0$ $E = 0$. Вне сферы при $r > r_0$ (рис. 1.11,*б*)

$$E = \frac{|q|}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r^2}. \tag{1.13}$$

Проводники и диэлектрики в электрическом поле

В *проводниках* есть свободные электрические заряды, которые перемещаются в сколь угодно слабом электрическом поле. Следовательно, при рассмотрении задач электростатики напряженность электрического поля внутри проводника должна всегда быть равна нулю.

При помещении проводника в электрическое поле начинается перемещение свободных электронов. На одной стороне проводника оказываются положительные заряды, на другой стороне — отрицательные.

Эти индуцированные заряды создают электрическое поле, напряженность которого внутри проводников направлена в сторону, противоположную напряженности внешнего электрического поля. Результирующая напряженность в любой точке пространства равна векторной сумме напряженностей внешнего поля и поля индуцированного заряда. Движение зарядов прекратится, когда эти напряженности станут равны по величине и суммарная напряженность поля внутри проводника будет равна нулю.

Если проводящая оболочка окружает электрические заряды, то внутри пространства, ограниченного оболочкой, и вне оболочки поле существует, в самой же оболочке напряженность поля равна нулю. Силовые линии поля перпендикулярны поверхности проводника. В противном случае на свободные заряды в проводнике действовала бы сила: $F_\tau = qE_\tau$, вызывающая движение зарядов (рис. 1.12), причем это движение происходило бы до тех пор, пока все силовые линии не стали бы перпендикулярны поверхности.

В *диэлектриках* нет свободных зарядов. Полярные диэлектрики состоят из диполей, которые в отсутствие внешнего электрического поля расположены хаотично, и суммарное электрическое поле в диэлектриках равно нулю (рис. 1.13,*а*).

Диполь представляет собой совокупность равных по модулю и разноименных зарядов, находящихся на малом расстоянии друг от друга. При наложении внешнего электрического поля диполи ориентируются таким образом, что поле, создаваемое поляризованным зарядом, направлено в сторону, противоположную внешнему электрическому полю (рис. 1.13,*б*). Напряженность электрического поля в диэлектрике равна разности напряженностей внешнего поля $\mathbf{E}_0$ и поля, создаваемого поляризованным зарядом $\mathbf{E}_п$: $E = E_0 - E_п$.

В неполярных диэлектриках в отсутствие внешнего поля молекулы не являются диполями, так как центры положительных и отрицательных зарядов совпадают. При наложении внешнего электрического поля молекулы растягиваются и становятся диполями, при этом поле поляризованного заряда направлено против внешнего поля.

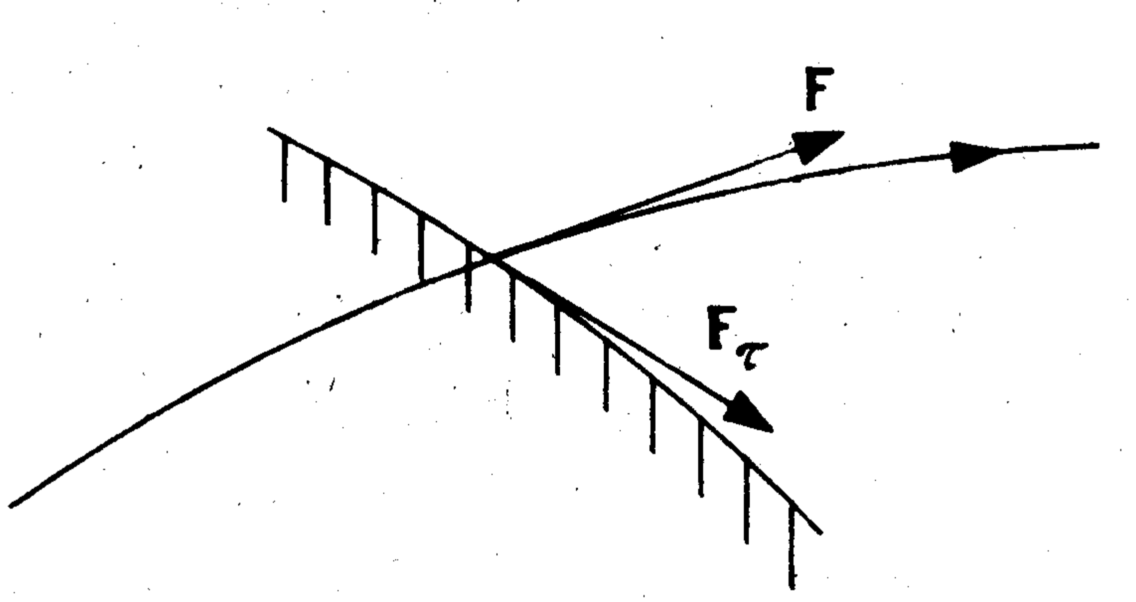


Рис. 1.12.

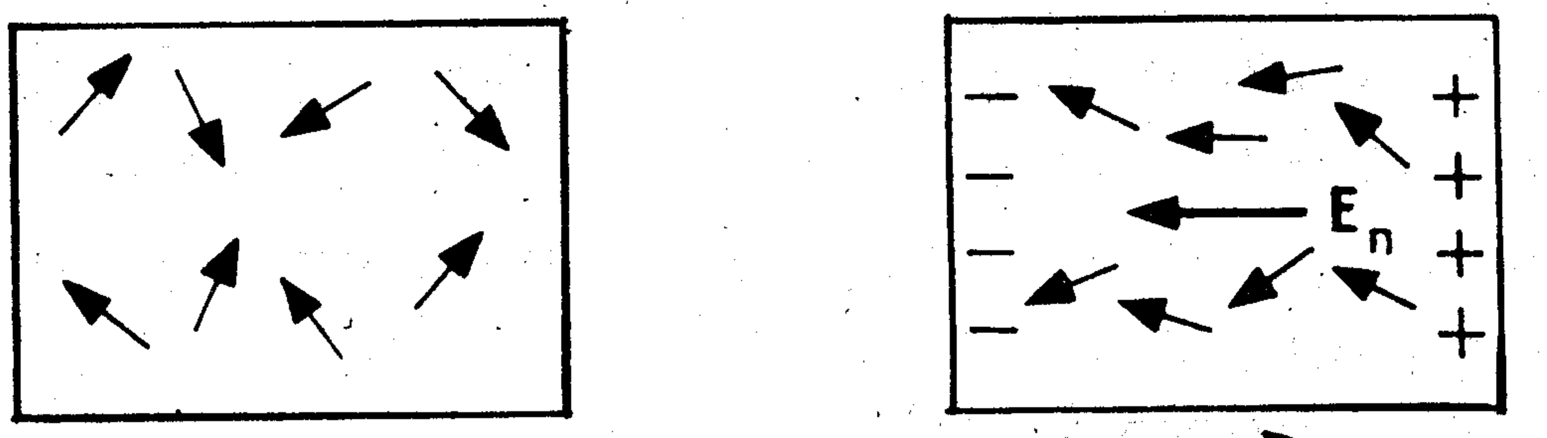


Рис. 1.13.

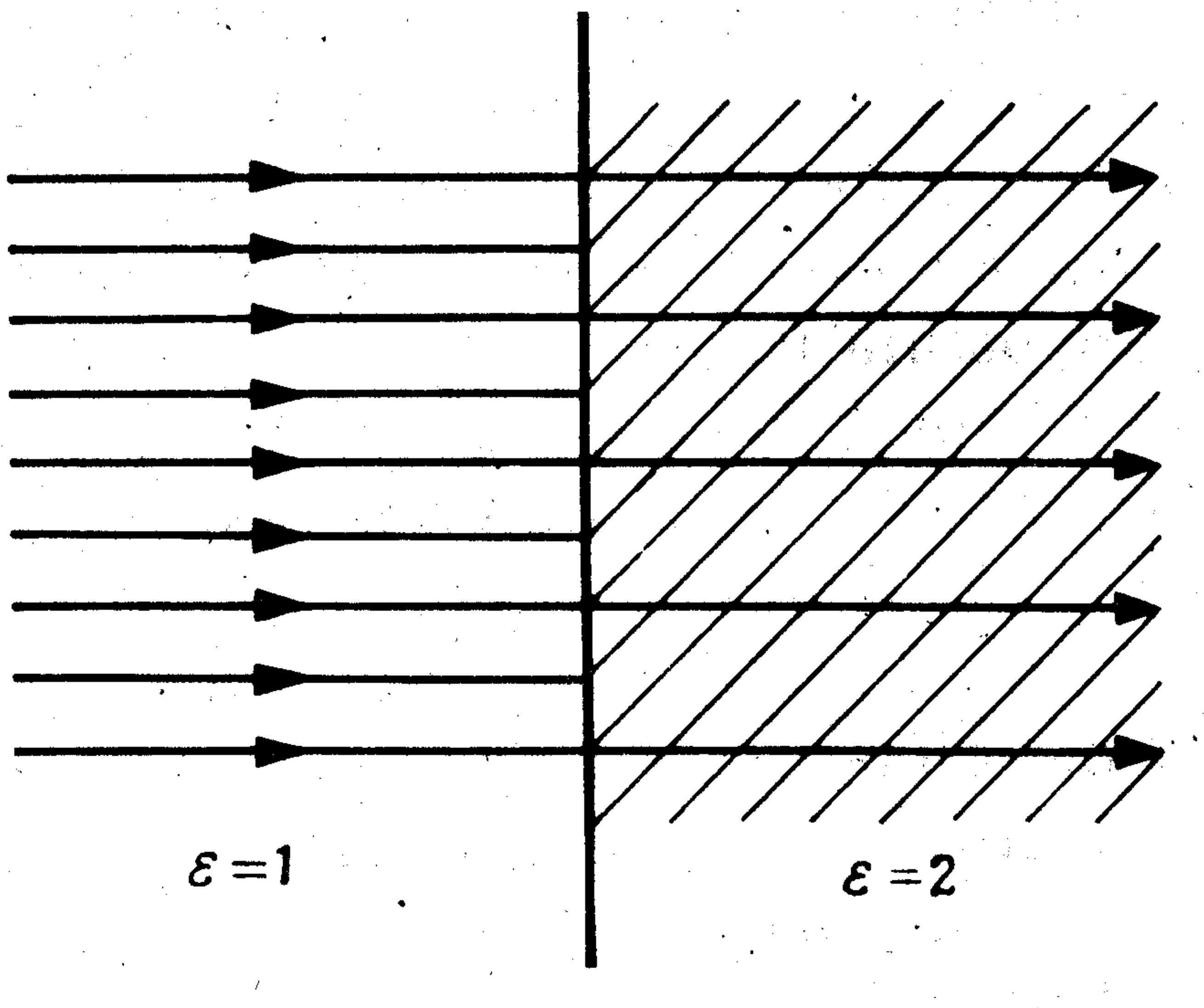


Рис. 1.14.

Независимо от природы диэлектрика напряженность внешнего поля в нем всегда ослаблена в ε раз: $\varepsilon = E_0/E$. ***Относительная диэлектрическая проницаемость*** ε показывает, во сколько раз напряженность электрического поля в диэлектрике меньше, чем в вакууме.

Поместим диэлектрик в виде длинной пластины с диэлектрической проницаемостью ε в однородное электрическое поле перпендикулярно силовым линиям как показано на рис. 1.14. Поле в диэлектрике ослабляется. На границе диэлектрика силовые линии терпят разрыв. Часть силовых линий заканчивается и начинается на поляризованных зарядах.

Примеры решения задач

Задача 1. Напряженность электрического поля у поверхности Земли равна 130 Н/Кл. Определить заряд Земли, если ее радиус 6400 км. Считать, что Земля имеет сферическую форму и заряд ее равномерно распределен по поверхности.

Дано: $E = 130$ Н/Кл, $R = 6400$ км $(6,4 \cdot 10^6$ м); q — ?

Решение. Согласно (1.13), поле заряженной сферы есть

$$E = \frac{|q|}{4\pi\varepsilon_0 R^2},$$

откуда

$$q = 4\pi\varepsilon_0 R^2 E,$$

$$[q] = \frac{\text{Н}}{\text{Кл}}\frac{\text{Кл}^2}{\text{Н}\cdot\text{м}^2}\text{м}^2 = \text{Кл},$$

$$q = 130\cdot 4\cdot 3,14\cdot 8,85\cdot 10^{-12}\cdot 6,4^2\cdot 10^{12}\text{Кл} = 5,92\cdot 10^5\,\text{Кл}.$$

Задача 2. Найти поверхностную плотность заряда заряженной бесконечной плоскости, расположенной как показано на рис. 1.15, если нить, на которой подвешен маленький шарик массой $m = 5$ г и зарядом 10^{-7} Кл, отклоняется на угол $\alpha = 30°$.

Дано: $m = 5$ г ($5\cdot 10^{-3}$ кг), $q = 10^{-7}$ Кл, $\alpha = 30°$; σ — ?

Решение. Плоскость и шарик заряжены одноименно, поэтому на шарик действует кулоновская сила отталкивания $\mathbf{F}$. Кроме того, на шарик действуют сила тяжести $\mathbf{F}_\text{т}$ и сила натяжения нити $\mathbf{F}_\text{н}$. Нить отклоняется от вертикали до тех пор, пока все силы, действующие на шарик, не уравновесят друг друга. Запишем условие равновесия для шарика:

$$\mathbf{F} + \mathbf{F}_\text{т} + \mathbf{F}_\text{н} = 0. \tag{1.14}$$

Векторное уравнение (1.14) в проекциях на оси координат имеет вид

на ось x: $F - F_\text{н}\sin\alpha = 0,$

на ось y: $F_\text{н}\cos\alpha - mg = 0.$

Решая эту систему, получаем $F = mg\text{tg}\alpha$. Так как $\mathbf{F} = q\mathbf{E}$, где $\mathbf{E}$ — напряженность поля бесконечной равномерно заряженной плоскости, по модулю равная $E = \sigma/2\varepsilon_0$, то

$$\text{tg}\alpha = \frac{q\sigma}{2\varepsilon_0 mg},$$

откуда

$$\sigma = 2\varepsilon_0 mg\text{tg}\alpha/q,$$

$$[\sigma] = \frac{\text{кг}\cdot(\text{м/с}^2)\cdot(\text{Кл}^2/\text{Н}\cdot\text{м}^2)}{\text{Кл}} = \frac{\text{Кл}}{\text{м}^2},$$

$$\sigma = \frac{5\cdot 10^{-3}\cdot 9,8\cdot 2\cdot 8,85\cdot 10^{-12}\cdot\sqrt{3}/3}{10^{-7}}\frac{\text{Кл}}{\text{м}^2} = 5,1\cdot 10^{-6}\,\text{Кл/м}^2.$$

Задача 3. Электрон влетает в плоский воздушный конденсатор параллельно его пластинам со скоростью 10^6 м/с. Длина конденсатора 1 см, напряженность электрического поля в нем $5\cdot 10^3$ Н/Кл. Найти скорость электрона при вылете из конденсатора и его смещение Δy.

Дано: $m_e = 9,1\cdot 10^{-31}$ кг, $q_e = -1,6\cdot 10^{-19}$ Кл, $v_0 = 10^6$ м/с, $l = 1$ см, $E = 5\cdot 10^3$ Н/Кл; v — ? Δy — ?

Решение. Сила тяжести, действующая на электрон, равна

$$F_\text{т} = mg = 9,1\cdot 10^{-30}\,\text{Н},$$

кулоновская сила равна

$$F = q_e E = 8\cdot 10^{-16}\,\text{Н},$$

т. е. кулоновская сила много больше, чем сила тяжести. Поэтому можно считать, что движение электрона происходит только под действием кулоновской силы.

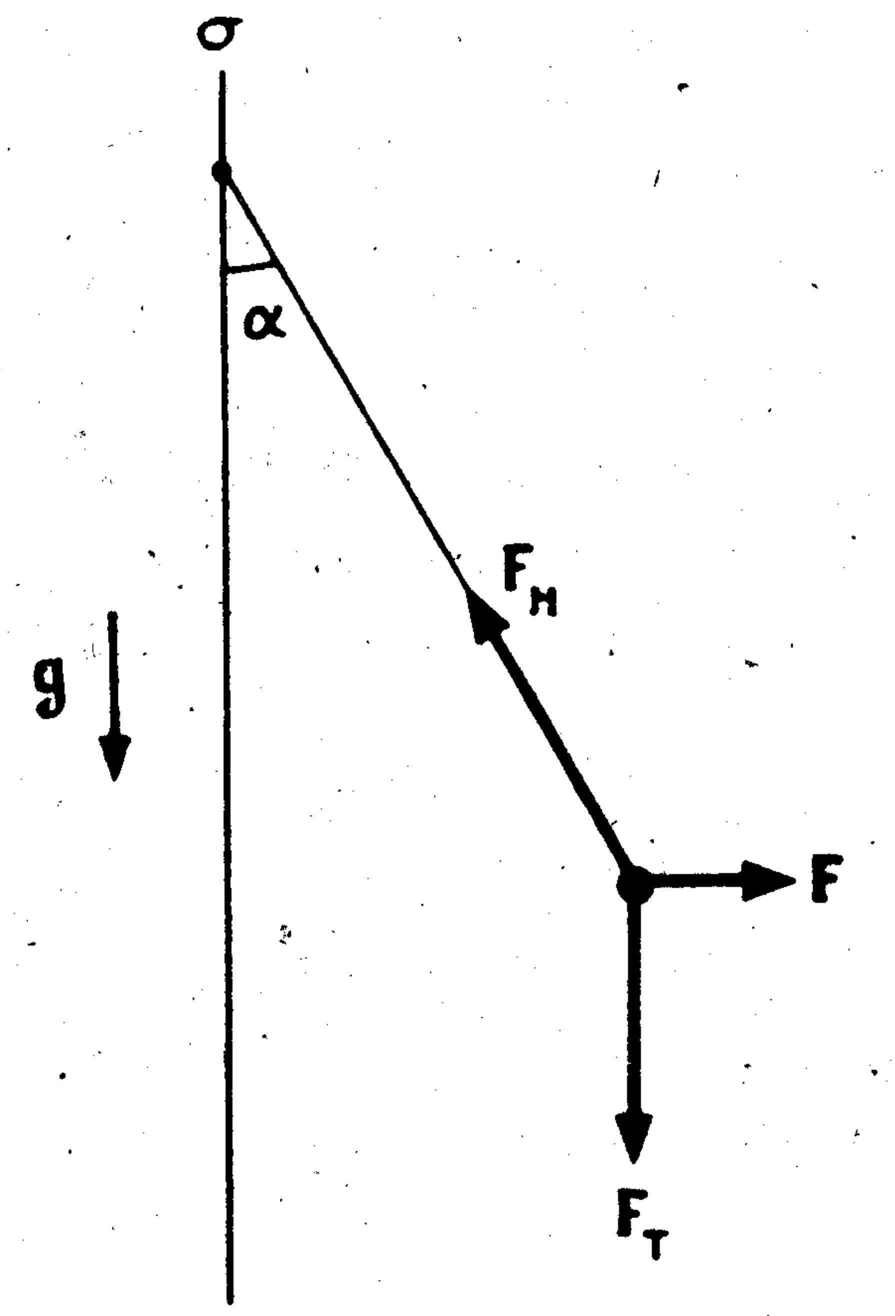


Рис. 1.15.

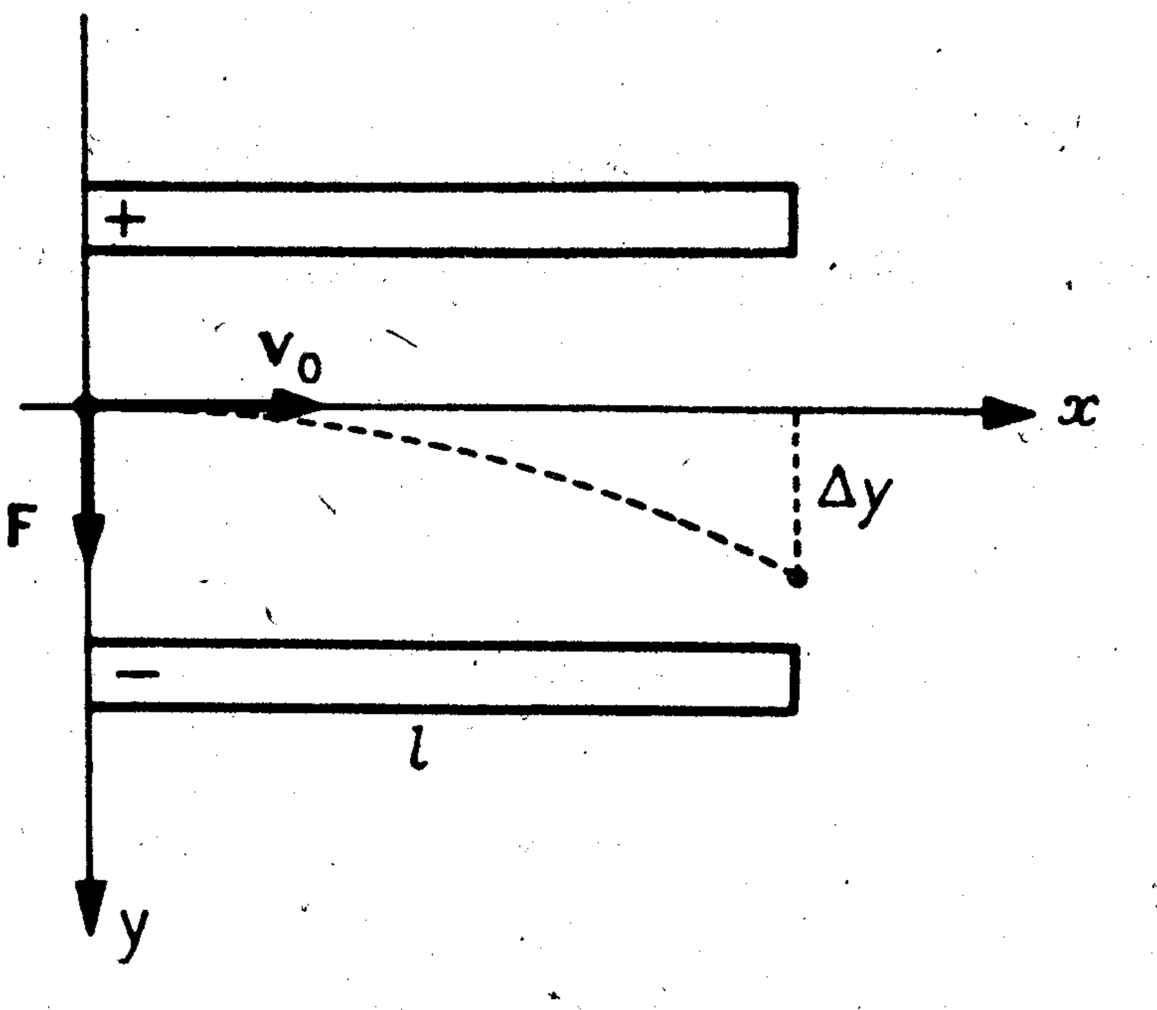


Рис. 1.16.

Запишем для электрона второй закон Ньютона:

$$m_e\mathbf{a} = \mathbf{F},$$

где $\mathbf{F} = q_e\mathbf{E}$. Направление осей координат показано на рис. 1.16.

Движение электрона вдоль оси x — равномерное со скоростью v_0, так как проекция силы $\mathbf{F}$ на ось x равна нулю, следовательно, время, в течение которого электрон пролетает между пластинами конденсатора:

$$t = l/v_0.$$

Движение электрона вдоль оси y — равноускоренное под действием силы $\mathbf{F}$, направленной вдоль этой оси. Ускорение $a_y = a = q_eE/m_e$. Начальная скорость и смещение электрона вдоль y равны:

$$v_{0y} = 0,$$

$$\Delta y = at^2/2 = \frac{q_eE}{m_e}\frac{(l/v_0)^2}{2} = \frac{q_eEl^2}{2m_ev_0^2},$$

$$[\Delta y] = \frac{\text{Кл}\cdot(\text{Н}/\text{Кл})\cdot\text{м}^2}{\text{кг}\cdot\text{м}^2/\text{с}^2} = \text{м}.$$

Скорость электрона в момент вылета v, направленная по касательной к траектории его движения, равна $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$, где $v_x = v_0$, $v_y = at$. Окончательно:

$$v = \sqrt{v_0^2 + (q_eEl/m_ev_0)^2},$$

$$[v] = \sqrt{\frac{\text{м}^2}{\text{с}^2} + \left(\frac{\text{Кл}\cdot(\text{Н}/\text{Кл})\cdot\text{м}}{\text{кг}\cdot\text{м}/\text{с}}\right)^2} = \text{м}/\text{с}.$$

Угол между вектором скорости и осью x определяется по формуле

$$\alpha = \operatorname{arctg} v_y/v_x = \operatorname{arctg} q_eEl/m_ev_0^2.$$

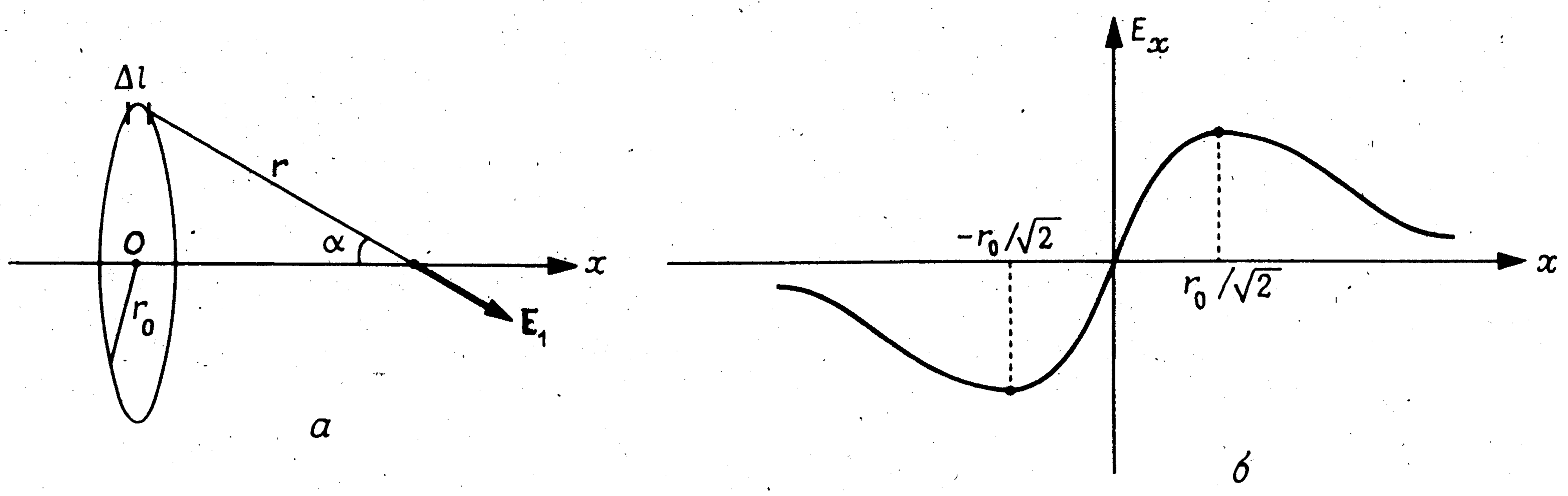


Рис. 1.17.

Вычислим согласно полученным расчетным формулам Δy, v и α:

$$\Delta y = \frac{1,6\cdot 10^{-19}\cdot 5\cdot 10^{3}\cdot 10^{-4}}{2\cdot 9,1\cdot 10^{-31}\cdot 10^{12}}\,\text{м} = 4,4\cdot 10^{-2}\,\text{м},$$

$$v = \sqrt{10^{12} + \frac{1,6\cdot 10^{-19}\cdot 5\cdot 10^{3}\cdot 10^{-2}}{9,1\cdot 10^{-31}\cdot 10^{6}}}\,\text{м/с} = 8,7\cdot 10^{6}\,\text{м/с},$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{1,6\cdot 10^{-19}\cdot 5\cdot 10^{3}\cdot 10^{-2}}{9,1\cdot 10^{-31}\cdot 10^{12}} = 8,79,$$

$$\alpha = \operatorname{arctg} 8,79 \approx 83,5^\circ.$$

Задача 4. Кольцо радиуса r_0 равномерно заряжено, γ — линейная плотность заряда ($\gamma = \Delta q/\Delta l$, где Δq — заряд на отрезке кольца длиной Δl). Определите напряженность электрического поля (в вакууме) на оси симметрии кольца.

Дано: r_0, γ; E— ?

Решение. Напряженность электрического поля (рис. 1.17,*а*), создаваемого элементом кольца Δl, равна $E_1 = k\gamma\Delta l/\varepsilon_0 r^2$, где $r = \sqrt{r_0^2 + x^2}$. Очевидно, что в силу симметрии суммарная напряженность поля, создаваемого кольцом на оси x, направлена вдоль этой оси. Поэтому сумма проекций напряженностей, создаваемых всеми элементами кольца, на плоскость, перпендикулярную оси x, равна нулю.

Проекция напряженности электрического поля, создаваемого элементом кольца, на ось x равна:

$$E_{1x} = k(\gamma\Delta l/r^2)\cos\alpha,$$

где $\cos\alpha = x/r$, откуда

$$E_{1x} = k\frac{\gamma\Delta l}{r^3}x.$$

Суммарная напряженность электрического поля равна сумме проекций напряженностей на ось x, создаваемых всеми элементами кольца, т. е.

$$E = E_x = k\frac{\gamma 2\pi r_0 x}{r^3} = \frac{\gamma r_0 x}{2\varepsilon_0(r_0^2 + x^2)^{3/2}}.$$

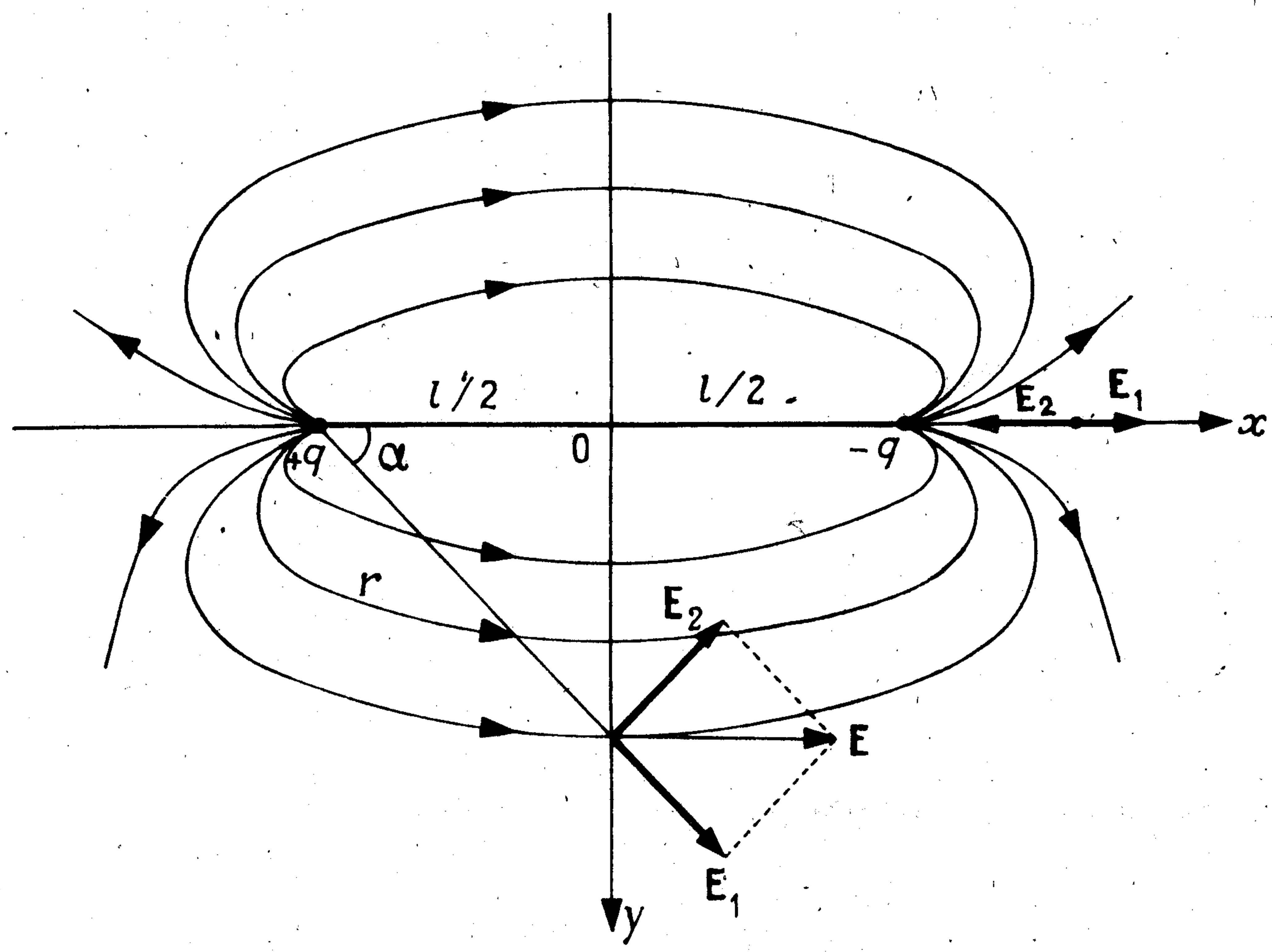


Рис. 1.18.

На рис. 1.17,*б* изображен график зависимости $E_x(x)$. Видно, что E_x обращается в нуль при $x = 0$ и при $x \to \infty$. Найдем, в какой точке на оси x напряженность максимальна. Условие экстремума $E'_x x(x) = 0$ — обращение в нуль первой производной

$$\frac{\gamma r_0}{2\varepsilon_0} \frac{(r_0^2 + x^2)^{3/2} - x(3/2)(r_0^2 + x^2)^{1/2} 2x}{(r_0^2 + x^2)^3} = 0,$$

откуда

$$r_0^2 + x^2 - 3x^2 = 0 \quad \text{и} \quad x = \pm r_0/\sqrt{2}.$$

Задача 5. Определите зависимость напряженности электрического поля диполя от расстояния от него 1) на оси симметрии диполя, 2) на оси самого диполя.

Решение. Диполь представляет собой два точечных разноименных заряда $+q$ и $-q$, равных по величине, расстояние между которыми мало и равно l.

Выберем оси x и y, как показано на рис. 1.18. Определим напряженность электрического поля диполя, используя принцип суперпозиции полей.

1) Найдем зависмость напряженности E на оси симметрии, т. е. при $x = 0$.

Напряженность поля $\mathbf{E}_1$, создаваемого зарядом $+q$, равна $E_1 = kq/r^2$, где $r = \sqrt{l^2/4 + y^2}$; напряженность поля $\mathbf{E}_2$, создаваемого зарядом $-q$, равна по величине $\mathbf{E}_1$. Тогда $\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2$. На рис. 1.18 видно, что вектор $\mathbf{E}$ параллелен оси $\mathbf{x}$. Величина $\mathbf{E}$ равна

$$E = 2E_1 \cos\alpha,$$

где $\cos\alpha = l/2r$. Отсюда

$$E(y) = k\frac{ql}{(l^2/4 + y^2)^{3/2}} = \frac{ql}{4\pi\varepsilon_0(l^2/4 + y^2)^{3/2}} = \frac{ql}{4\pi\varepsilon_0 r^3}.$$

Заметим, что напряженность поля диполя убывает быстрее, чем напряженность поля точеченого заряда.

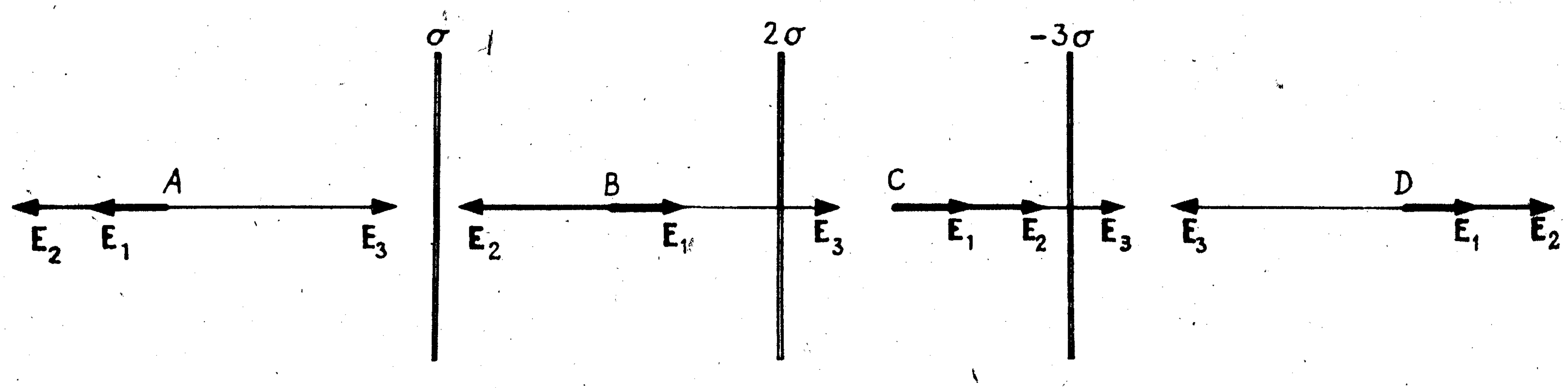


Рис. 1.19.

2) Определим зависимость напряженности от x при $y = 0$. Напряженность поля, созданного зарядом $+q$, равна

$$E_1 = kq/(x + l/2)^2,$$

зарядом $-q$

$$E_2 = kq/(x - l/2)^2.$$

Суммарная напряженность в проекции на ось x имеет вид $E = E_1 - E_2$. Подставляя выражения для E_1 и E_2, имеем

$$E = kq\left(1/(x + l/2)^2 - 1/(x - l/2)^2\right) = -kq\frac{2lx}{(x^2 - l^2/4)^2}.$$

Такие значения напряженности справедливы при $x > l/2$, $x < -l/2$. При $-l/2 < x < l/2$ напряженность E равна $E = E_1 + E_2$, $E_1 = kq/(x + l/2)^2$, $E_2 = kq/(l/2 - x)^2$. Окончательно,

$$E = \frac{kq(l^2/4 + x^2)}{(l^2/4 - x^2)^2}.$$

Задача 6. Определить напряженность электрического поля, создаваемого тремя бесконечными параллельными плоскостями в точках A, B, C, D (рис. 1.19). Поверхностные плотности зарядов $\sigma, 2\sigma$ и -3σ.

Дано: $\sigma, 2\sigma, -3\sigma$; E_A, E_B, E_C, E_D — ?

Решение. Для определения напряженностей в точках A, B, C, D воспользуемся принципом суперпозиции полей.

Поле, создаваемое каждой из плоскостей, однородно и равно

$$E_1 = \sigma/2\varepsilon_0, \quad E_2 = \sigma/\varepsilon_0, \quad E_3 = (3/2)\sigma/\varepsilon_0.$$

В точках A, B, C, D напряженность равна векторной сумме напряженностей полей, создаваемых каждой из плоскостей:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 + \mathbf{E}_3.$$

В проекции на ось x для каждой точки соответственно имеем:

$$E_A = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0} - \frac{\sigma}{\varepsilon_0} + \frac{3}{2}\frac{\sigma}{\varepsilon_0} = 0,$$

$$E_B = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} - \frac{\sigma}{\varepsilon_0} + \frac{3}{2}\frac{\sigma}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0},$$

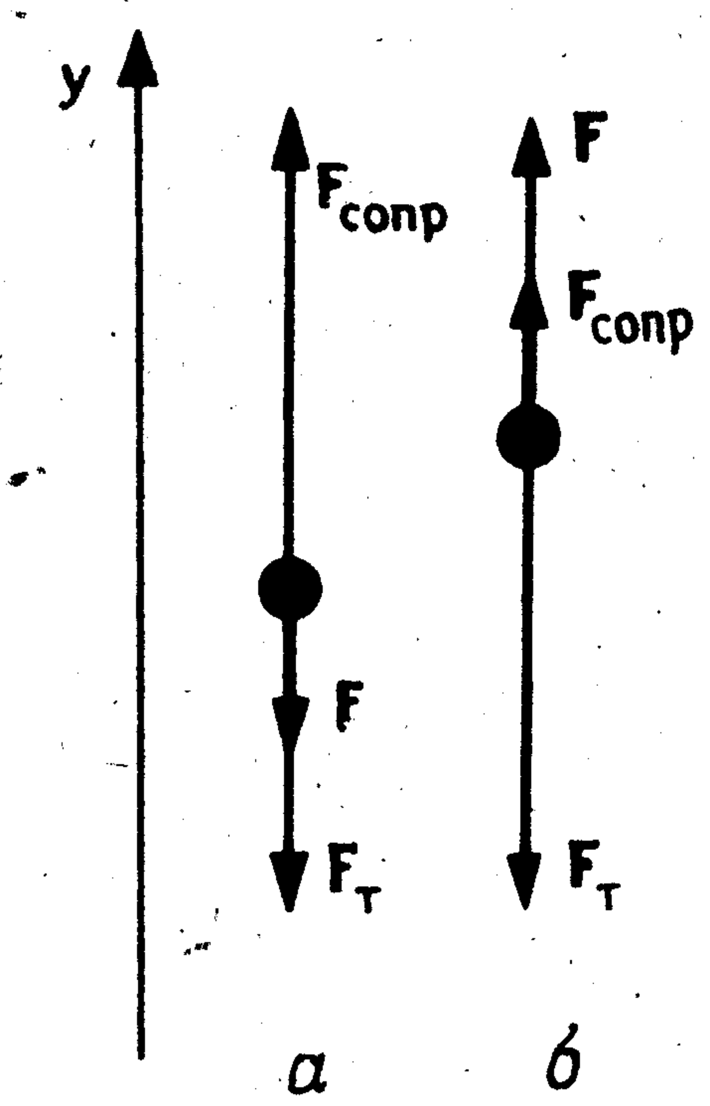


Рис. 1.20.

$$E_C = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} + \frac{\sigma}{\varepsilon_0} + \frac{3}{2}\frac{\sigma}{\varepsilon_0} = \frac{3\sigma}{\varepsilon_0},$$

$$E_D = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} + \frac{\sigma}{\varepsilon_0} - \frac{3}{2}\frac{\sigma}{\varepsilon_0} = 0.$$

Задача 7. Заряженный шарик падает вдоль вертикальных силовых линий однородного электрического поля, напряженность которого $\mathbf{E}$, причем сила тяжести больше кулоновской силы ($F_т > F$). Сила сопротивления воздуха, действующая на шарик, пропорциональна его скорости v ($\mathbf{F}_{сопр} = -k\mathbf{v}$). Определить отношение скоростей установившегося движения при разных направлениях вектора $\mathbf{E}$. Масса и заряд шарика равны m и q, $q > 0$.

Дано: m, q, $\mathbf{E}$, $\mathbf{F}_{сопр} = -k\mathbf{v}$; v_1/v_2 — ?

Решение. На шарик действуют три силы: сила тяжести $\mathbf{F}_т = m\mathbf{g}$, сила сопротивления $\mathbf{F}_{сопр}$ и кулоновская сила $\mathbf{F}$. Шарик начинает двигаться равноускоренно, скорость шарика увеличивается, одновременно увеличивается и сила сопротивления. Когда сумма сил становится равной нулю, с этого момента шарик начинает двигаться равномерно (рис. 1.20):

$$\mathbf{F}_т + \mathbf{F} + \mathbf{F}_{сопр} = 0,$$

или в проекциях на ось y для случая, когда $\mathbf{E}$ направлено вниз (рис. 1.20,*а*), и для случая, когда $\mathbf{E}$ направлено вверх (рис. 1.20,*б*)

вдоль силовой линии $\quad kv_1 - qE - mg = 0,$

против силовой линии $\quad qE + kv_2 - mg = 0,$

откуда

$$v_1 = \frac{qE + mg}{k}, \quad v_2 = \frac{mg - qE}{k}.$$

Итак,

$$v_1/v_2 = \frac{qE + mg}{mg - qE}.$$

Задача 8. Напряженность электрического поля, создаваемого однородно заряженной диэлектрической сферой радиуса r_0 ($\varepsilon = 2$), изменяется при $r < r_0$ по

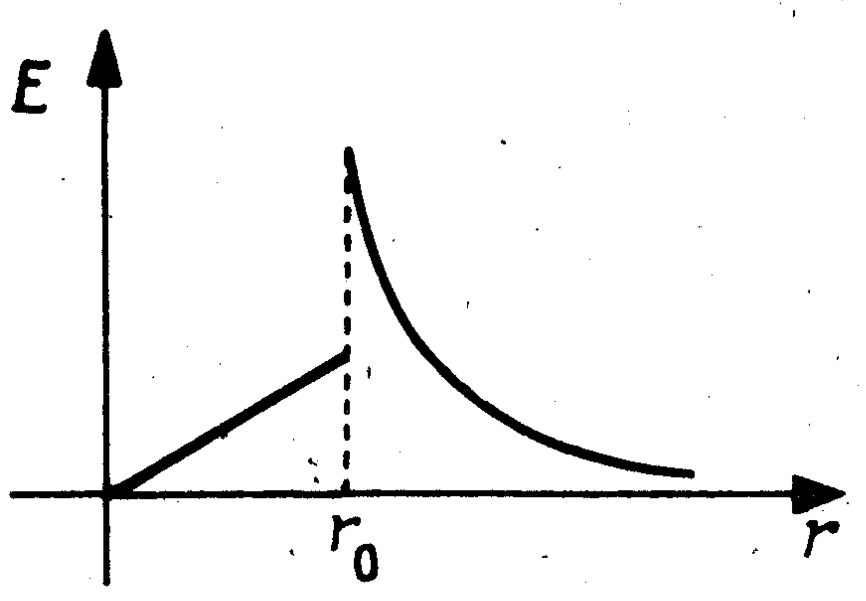


Рис. 1.21.

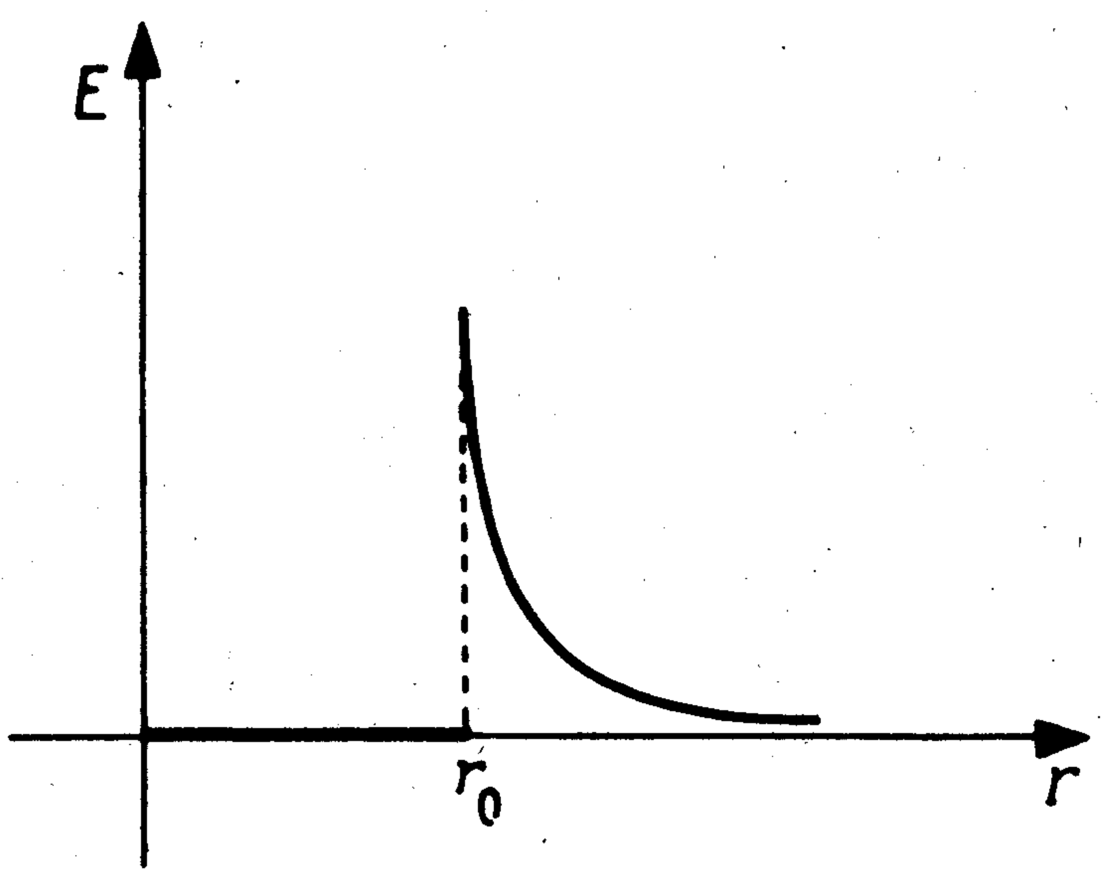


Рис. 1.22.

закону $E = (1/3)(\rho r/\varepsilon_0\varepsilon)$ в диэлектрике при радиусе, равном $r_0 = 5$ см, $E_1 = 2$ В/м.

1) Определить объемную плотность заряда ρ и зависимость E от r при $r > r_0$.

2) Определить зависимость в случае проводящей сферы того же радиуса, имеющей тот же заряд, что и диэлектрическая сфера.

Дано: $E = \rho r/3\varepsilon_0\varepsilon$, $E_1 = 2$ В/м, $\varepsilon = 2$, $r_0 = 5$ см (0,05 м); ρ, $E(r)$ — ?

Решение. В диэлектрике помимо поля, создаваемого зарядами плотностью ρ, существует поле, создаваемое поляризованным зарядом. Поле поляризованного заряда ослабляет поле распределенного заряда. Поэтому напряженности поля на границе раздела диэлектрика и воздуха различны:

в диэлектрике $$E_1 = \frac{1}{3}\frac{\rho r_0}{\varepsilon_0\varepsilon},$$

в воздухе $$E_2 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r_0^2},$$

где q — суммарный заряд сферы:

$$q = (4/3)\pi r_0^3\rho,$$

откуда

$$E_2 = \frac{1}{3}\frac{\rho r_0}{\varepsilon_0}.$$

Напряженность поля в диэлектрике в ε раз меньше, чем в воздухе. Объемная плотность заряда из выражения для E_1 равна

$$\rho = \frac{3\varepsilon_0\varepsilon E_1}{r_0},$$

$$\rho = \frac{3 \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 2 \cdot 2}{0,05} = 2,12 \cdot 10^{-9}\ \text{Кл/м}^3.$$

На рис. 1.21 изображен график зависимости $E(r)$. На границе раздела диэлектрик — воздух напряженность поля изменяется скачком. В случае проводящей сферы заряд распределен по ее поверхности. Внутри проводящей сферы $E = 0$. При $r > r_0$ напряженность поля будет изменяться так же, как и в случае диэлектрической сферы, так как поле в обоих случаях будет определяться суммарным зарядом сфер, а они равны. График зависимости $E(r)$ изображен на рис. 1.22.

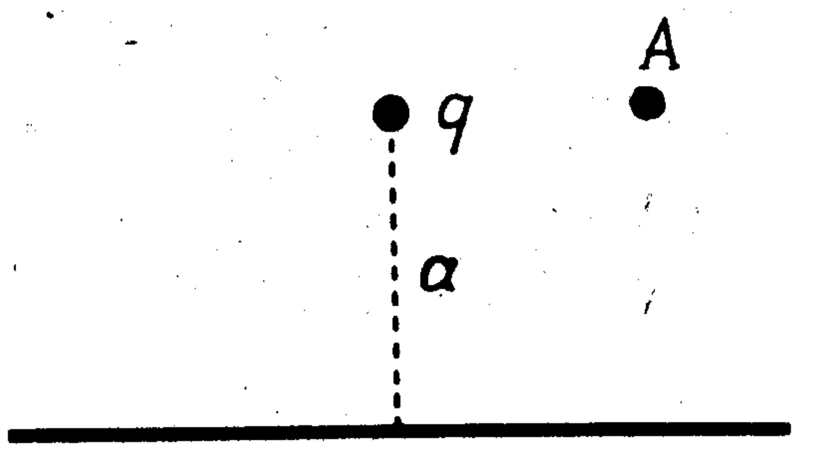


Рис. 1.23.

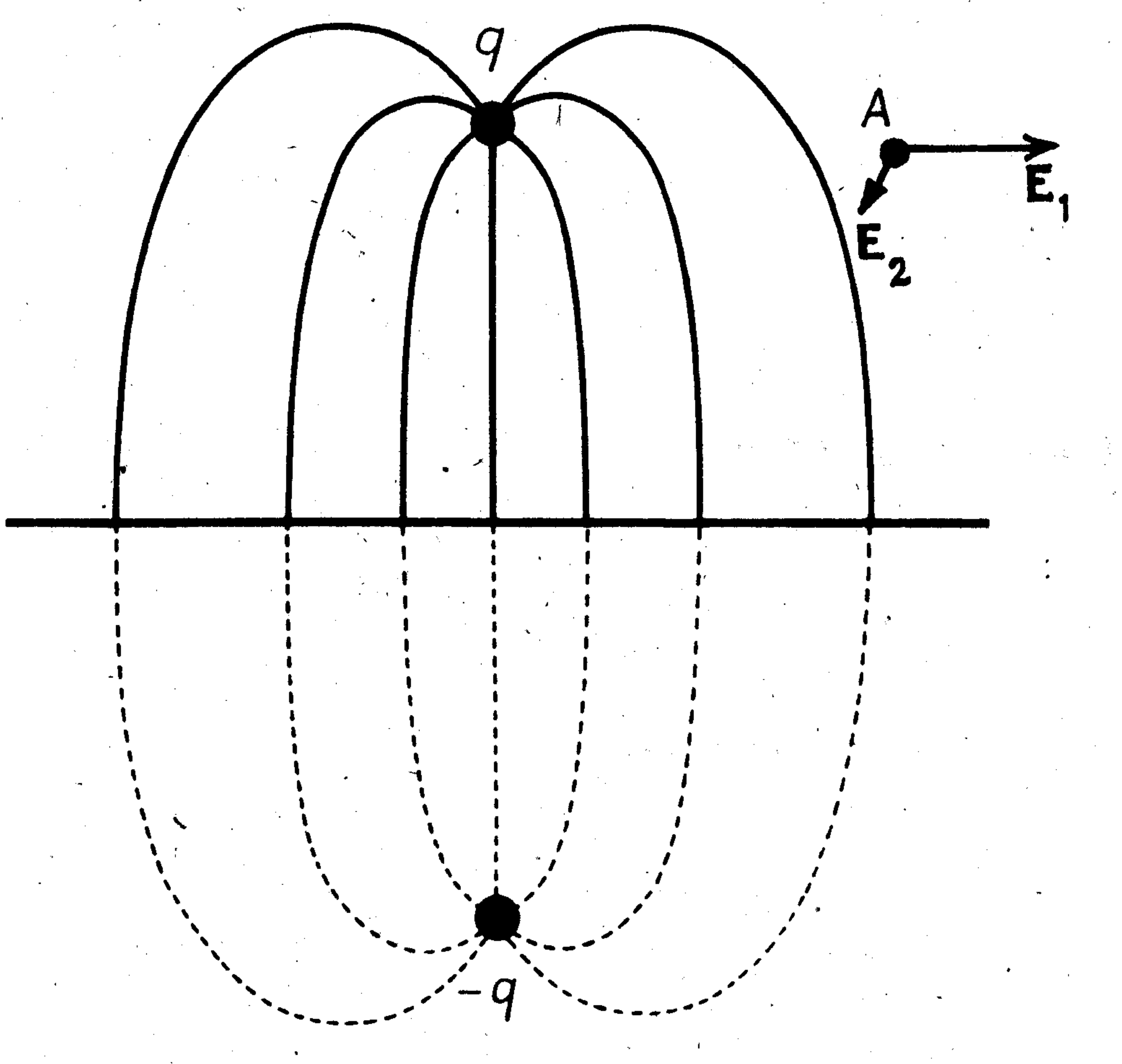


Рис. 1.24.

Вне сфер конфигурация силовых линий аналогична картине силовых линий поля точечного заряда. Это очевидно, так как в обоих рассматриваемых случаях поля обладают центральной симметрией.

Задача 9. Над бесконечной металлической плоскостью расположен заряд q на расстоянии a от плоскости. Определить силу, с которой заряд притягивается плоскостью, а также напряженность электрического поля в точке A (рис. 1.23).

Дано: q, a; F — ? E_A — ?

Решение. На поверхности плоскости индуцируются отрицательные электрические заряды. Силовые линии перпендикулярны поверхности проводника. Очевидно, что чем ближе точки плоскости к заряду, тем больше плотность индуцированного заряда. Возникающее поле аналогично полю, созданному двумя точечными разноименными зарядами q и $-q$, находящимися друг от друга на расстоянии $2a$. Конфигурация силовых линий напряженности показана на рис. 1.24. Сила, с которой заряд q притягивается к плоскости, равна силе, с которой заряды q и $-q$ притягиваются друг к другу:

$$F = k\frac{q^2}{4a^2} = \frac{q^2}{16\varepsilon_0 a^2}.$$

Напряженность электрического поля в точке A равна $\mathbf{E}_A = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2$, где $\mathbf{E}_1$ — напряженность поля, создаваемого зарядом q, $\mathbf{E}_2$ — напряженность поля, создаваемого зарядом $-q$:

$$E_1 = k\frac{q}{a^2}, \quad E_2 = k\frac{q}{5a^2}.$$

По теореме косинусов

$$E^2 = E_1^2 + E_2^2 - 2E_1E_2\cos\alpha,$$

где $\cos\alpha = a/a\sqrt{5} = 1/\sqrt{5}$. Следовательно,

$$E_A = k(q/a^2)\sqrt{1,04 - 0,4/\sqrt{5}} = 0,927kq/a^2.$$

Потенциал. Разность потенциалов

Работа электростатических сил по перемещению электрических зарядов не зависит от траектории, а зависит лишь от положения начальной и конечной точек траектории. Кулоновские силы являются консервативными потенциальными силами. Рассмотрим для простоты однородное электрическое поле. Пусть заряд перемещается из точки 1 в точку 2 (рис. 1.25). На заряд q действует сила $\mathbf{F} = q\mathbf{E}$, тогда работа этой силы на отрезке прямой $1 \to 2$ равна

$$A = Fl_{12}\cos\alpha,$$

где $l_{12}\cos\alpha = d$ — проекция отрезка l_{12} на силовые линии поля. Если заряд перемещается по траектории $1 \to 1' \to 2$, то работа на отрезке $1 \to 1'$ есть $A_{1\to 1'} = qEd$, а работа на отрезке $1' \to 2$ равна нулю, так как $\mathbf{E}$ перпендикулярна перемещению. Следовательно, суммарная работа силы равна $A = qEd$. При перемещении заряда по произвольной траектории изменяется на каждом малом перемещении Δs_i угол между направлениями силы и перемещения. На малом перемещении Δs_i работа равна

$$\Delta A_i = qE\Delta s_i\cos\alpha_i,$$

где $\Delta s_i\cos\alpha_i$ — проекция перемещения на силовые линии поля, т. е. $\Delta s_i\cos\alpha_i = \Delta d_i$. Отсюда

$$A = \sum_i \Delta A_i = qE\sum_i \Delta d_i = qEd,$$

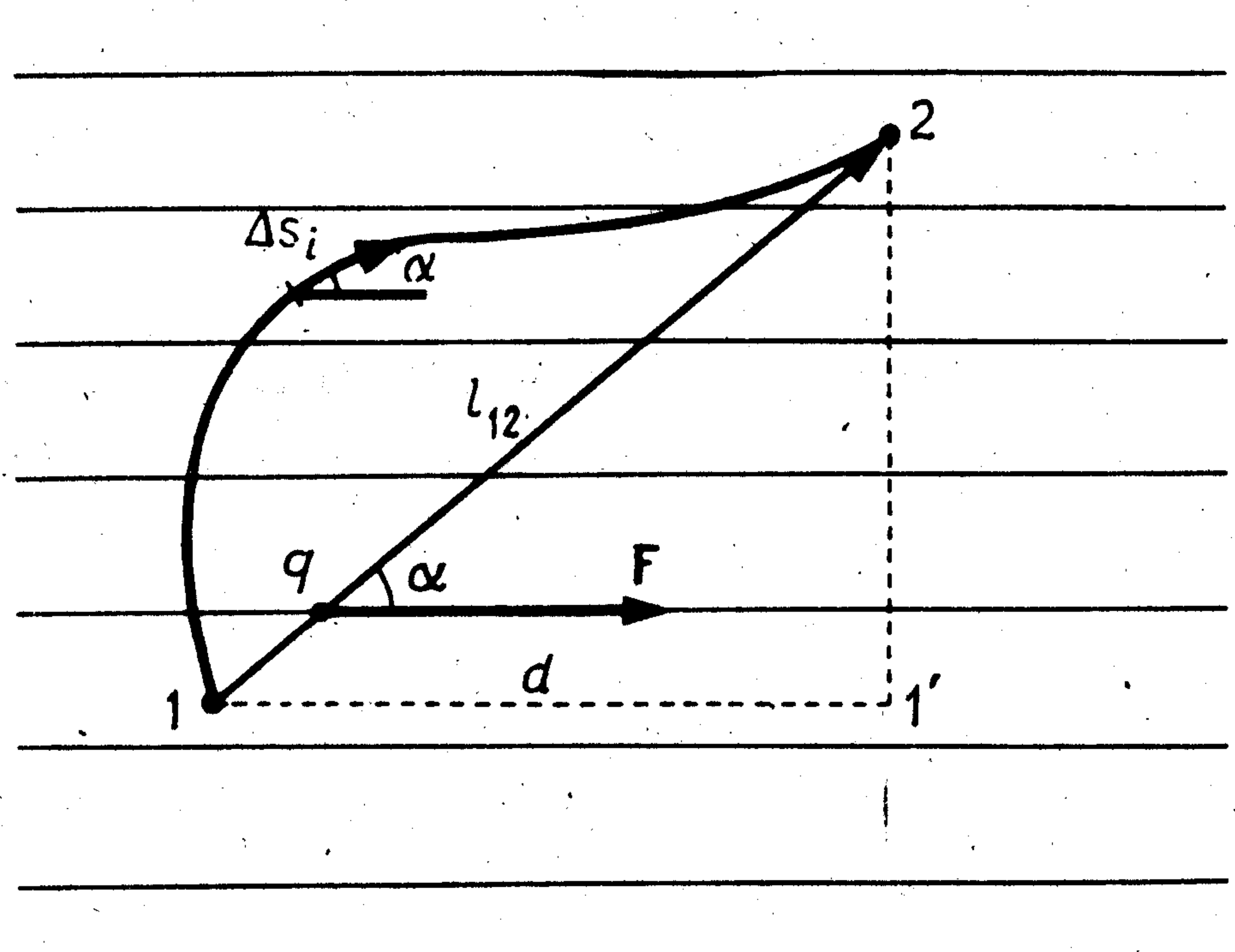


Рис. 1.25.

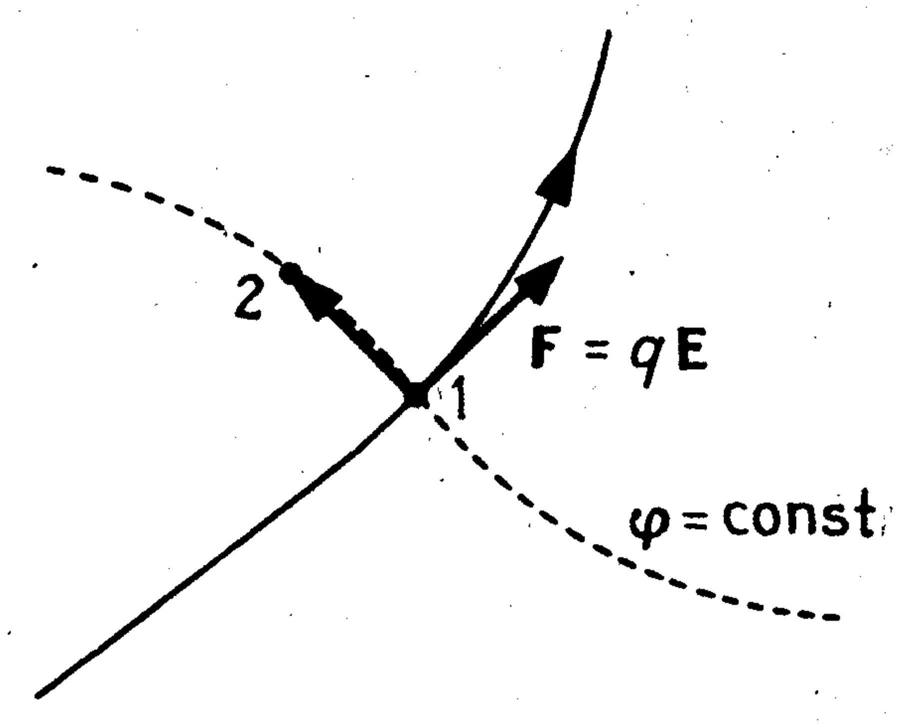


Рис. 1.26.

т. е. работа не зависит от траектории, по которой перемещается заряд в электрическом поле, а зависит только от положения начальной и конечной точек траектории. Сказанное выше справедливо не только для однородного, но для любого электростатического поля.

Разность потенциалов двух точек, скалярная энергетическая характеристика поля — величина, равная работе по перемещению единичного положительного заряда из одной точки поля в другую, т. е.

$$\varphi_1 - \varphi_2 = A_{1\to 2}/q. \tag{1.15}$$

Из этого определения следует, что можно говорить только о разности потенциалов. Однако удобно ввести потенциал данной точки поля, но при этом в качестве второй точки мы берем бесконечно удаленную точку поля, потенциал которой принимается равным нулю. Потенциал на бесконечности можно считать равным нулю, если заряд, создающий поле, не бесконечно большой. Таким образом, потенциал данной точки поля — величина, равная работе кулоновской силы по перемещению единичного заряда из данной точки 1 в бесконечно удаленную точку:

$$\varphi = A_{1\to\infty}/q. \tag{1.16}$$

Работа кулоновских (консервативных) сил равна изменению потенциальной энергии заряда, внесенного в поле, взятому с обратным знаком:

$$A_{1\to\infty} = -\Delta W_{\text{пот}},$$
$$q(\varphi_1 - \varphi_\infty) = -(W_\infty - W_{\text{пот}}),$$
$$\varphi_\infty \to 0, \quad W_\infty \to 0.$$

Отсюда $q\varphi_1 = W_{\text{пот}1}$, $\varphi_1 = W_{\text{пот}1}/q$. Здесь W_∞ — потенциальная энергия заряда на бесконечности, $W_\infty \to 0$, $W_{\text{пот}1}$ — потенциальная энергия заряда в точке 1.

Потенциал в данной точке поля равен потенциальной энергии, которой обладает единичный положительный заряд, помещенный в эту точку:

$$\varphi = W_{\text{пот}}/q. \tag{1.17}$$

Потенциал измеряется в вольтах: 1В = 1Дж/Кл = 1кг·м^2/А·с^3. Геометрическое место точек, имеющих одинаковый потенциал, называется *эквипотенциальной поверхностью.* Силовые линии поля перпендикулярны эквипотенциальным поверхностям. Докажем это. Предположим, что силовая линия неперпендикулярна эквипотенциальной поверхности (пунктирная линия на рис. 1.26). Перемещаем заряд из точки 1 в точку 2. Работа кулоновских сил, согласно (1.15),

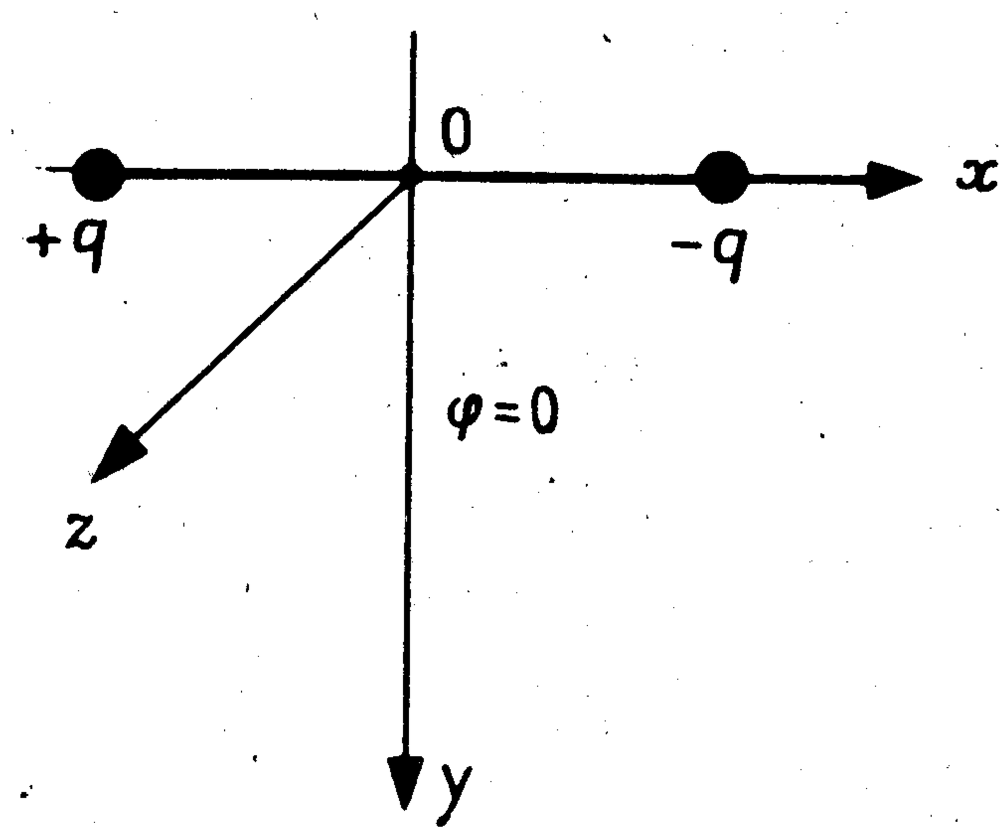


Рис. 1.27.

равна $A_{1\to2} = q(\varphi_1 - \varphi_2)$, а так как $\varphi_1 = \varphi_2$, то $A_{1\to2} = 0$. С другой стороны, $A = qE\Delta s\cos\alpha$. Так как $A = 0$, а q, E и Δs не равны нулю, то единственный сомножитель, который должен быть равен нулю, $\cos\alpha = 0$, откуда $\alpha = \pm\pi/2$, т. е. силовые линии должны быть перпендикулярны эквипотенциальным поверхностям. Поверхность проводника всегда является эквипотенциальной поверхностью. Потенциал во всех точках внутри проводника остается постоянным. Если бы это было не так, то разность потенциалов должна была бы вызвать перемещение зарядов и работа по перемещению была бы отличной от нуля, однако, так как в проводнике напряженность поля равна нулю, то и работа равна нулю, т. е. потенциал во всех точках внутри проводника постоянен и равен потенциалу поверхности.

Потенциал поля точечного заряда равен

$$\varphi = k\frac{q}{\varepsilon r} = \frac{q_0}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r}. \tag{1.18}$$

Рассмотрим поле диполя (рис. 1.27). Очевидно, что плоскость, перпендикулярная оси x, т. е. плоскость yOz, является эквипотенциальной поверхностью нулевого потенциала поля диполя, так как в любой точке этой плоскости $\varphi = kq/r + k(-q)/r = 0$. Если поле создается несколькими зарядами, то потенциал в данной точке определяется, согласно принципу суперпозиции, как алгебраическая сумма потенциалов полей, создаваемых в данной точке каждым источником в отдельности, т. е. $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \ldots$.

Связь напряженности электрического поля с потенциалом

На рис. 1.28 изображены две эквипотенциальные поверхности с потенциалами φ_1 и φ_2. Пусть заряд q перемещается из точки 1 в точку 2. Работа по перемещению заряда равна

$$A = qE\Delta s\cos\alpha,$$

Δs мало и можно под E понимать среднее значение напряженности на перемещении Δs. Из рисунка видно, что $\Delta s\cos\alpha$ равно $-\Delta r$ — кратчайшему расстоянию между двумя эквипотенциальными линиями, очевидно, что r указывает направление наибыстрейшего изменения потенциала. С другой стороны работа

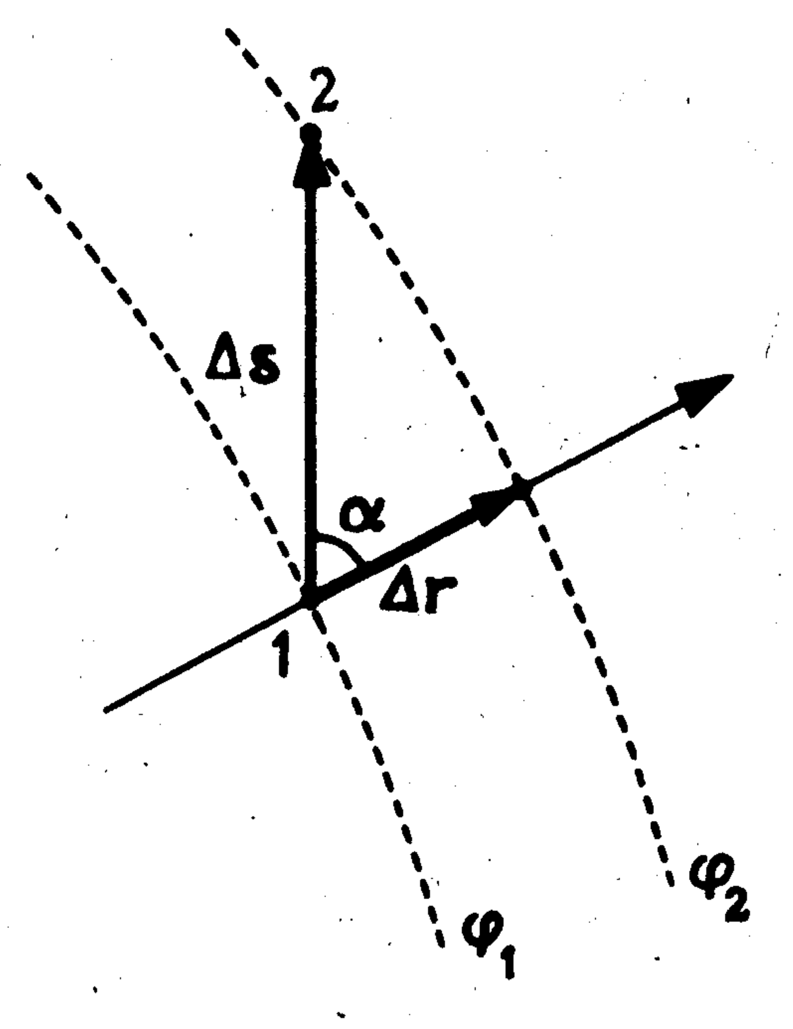


Рис. 1.28.

определяется выражением

$$A = q(\varphi_1 - \varphi_2) = -q\Delta\varphi.$$

Приравнивая написанные два выражения для работы, получим

$$qE\Delta s\cos\alpha = -q\Delta\varphi,$$

откуда

$$\Delta\varphi = -E\Delta s\cos\alpha.$$

Если $\alpha = 0$, то

$$E = -\Delta\varphi/\Delta r. \tag{1.19}$$

Силовые линии направлены в сторону уменьшения потенциала. При $\alpha = \pi/2$ разность потенциалов $\Delta\varphi = 0$, следовательно, силовые линии перпендикулярны эквипотенциальным поверхностям.

Соотношение (1.19) выражает связь напряженности электрического поля и потенциала. Знак минус показывает, что вектор напряженности направлен в сторону уменьшения потенциала. Если разность потенциалов $\varphi_1 - \varphi_2 = -\Delta\varphi$ обозначить через U, формулу (1.19) для однородного поля можно записать в виде

$$E = U/d, \tag{1.20}$$

где d — кратчайшее расстояние между эквипотенциальными поверхностями φ_1 и φ_2, а U — разность потенциалов между ними, причем, вследствие однородности поля никаких ограничений на длину отрезка d нет.

Примеры решения задач

Задача 1. Одинаковые одноименные точечные заряды $4\cdot10^{-7}$ Кл расположены в двух вершинах равностороннего треугольника со стороной $a = 1$ м. Определить значение напряженности и потенциала в третьей вершине A треугольника (рис. 1.29).

Дано: $q_1 = q_2 = q = 4\cdot10^{-7}$ Кл, $a = 1$ м; E_A — ? φ_A — ?

Решение. Согласно принципу суперпозиции,

$$\mathbf{E}_A = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2, \quad \varphi_A = \varphi_1 + \varphi_2,$$

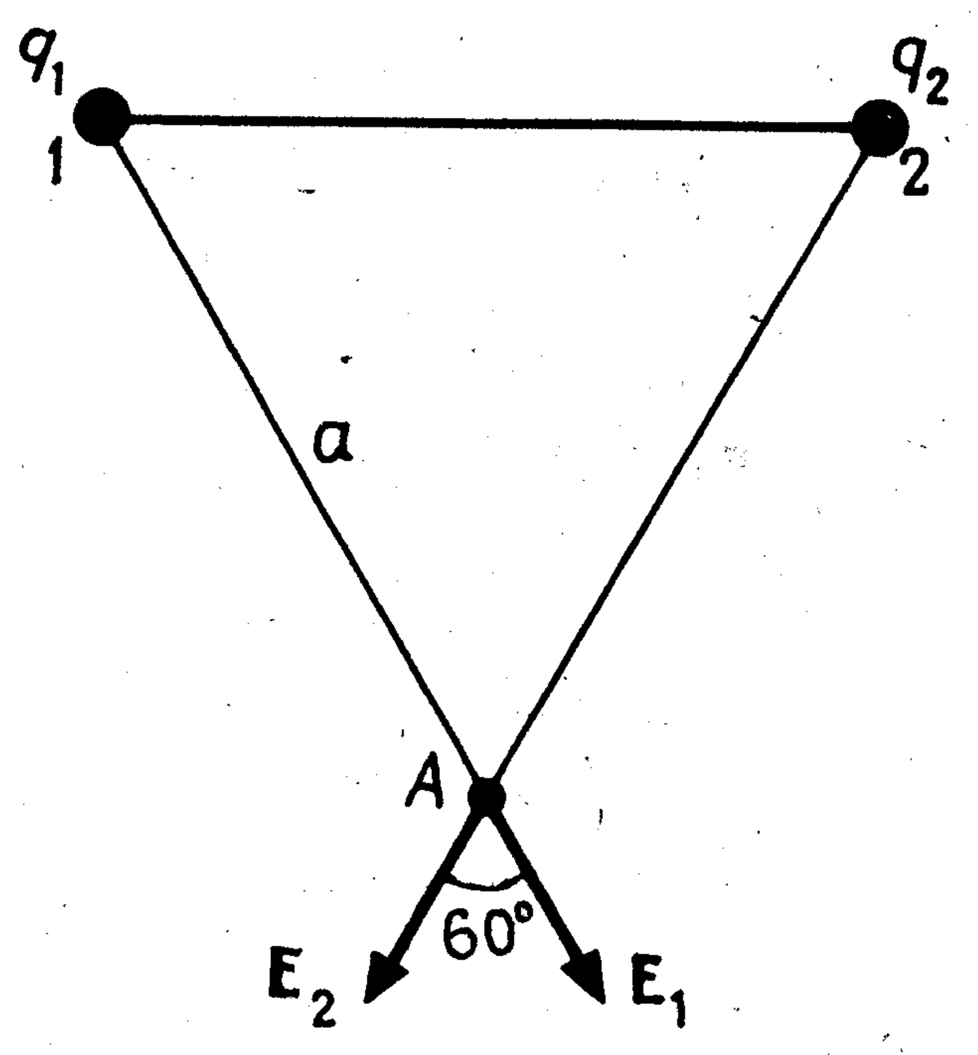


Рис. 1.29.

где $\mathbf{E}_1$ и $\mathbf{E}_2$ — напряженность полей, созданных в точке A зарядами q_1 и q_2, а φ_1 и φ_2 — потенциалы этих полей в точке A. Определим значения этих величин согласно формулам (1.10) и (1.18):

$$E_1 = E_2 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 a^2}; \quad \varphi_1 = \varphi_2 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 a}.$$

Результирующий вектор E_A является диагональю ромба со стороной a и острым углом 60°:

$$E_A = E_1 \cos 30^\circ + E_2 \cos 30^\circ = 2E_1 \cos 30^\circ = \sqrt{3}\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 a^2},$$

$$E_A = \sqrt{3}\frac{4 \cdot 10^{-7}}{4 \cdot 3,14 \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 1^2}\frac{\text{Н}}{\text{Кл}} = 6,1 \cdot 10^3\,\text{Н/Кл}.$$

Так как потенциалы полей, создаваемых в точке A зарядами q_1 и q_2, равны, то

$$\varphi = 2\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 a} = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 a},$$

откуда

$$\varphi = \frac{4 \cdot 10^{-7}}{2 \cdot 3,14 \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 1}\text{В} = 7200\,\text{В}.$$

Задача 2. Определить значение напряженности и потенциала поля в точке A, находящейся на расстоянии $l = 20$ см от поверхности заряженной проводящей сферы радиусом $R = 10$ см, если потенциал сферы равен $\varphi_0 = 240$ В.

Дано: $l = 20$ см (0,2 м), $R = 10$ см (0,1 м), $\varphi_0 = 240$ В; E_A — ? φ_A — ?

Решение. Напряженность поля сферы в точке A, согласно (1.13), равна

$$E_A = \frac{q_0}{4\pi\varepsilon_0 (R+l)^2}, \tag{1.21}$$

где q_0 — заряд сферы, а потенциал сферы и потенциал поля в точке A равны соответственно

$$\varphi_0 = \frac{q_0}{4\pi\varepsilon_0 R}, \tag{1.22}$$

$$\varphi_A = \frac{q_0}{4\pi\varepsilon_0 (R+l)}. \tag{1.23}$$

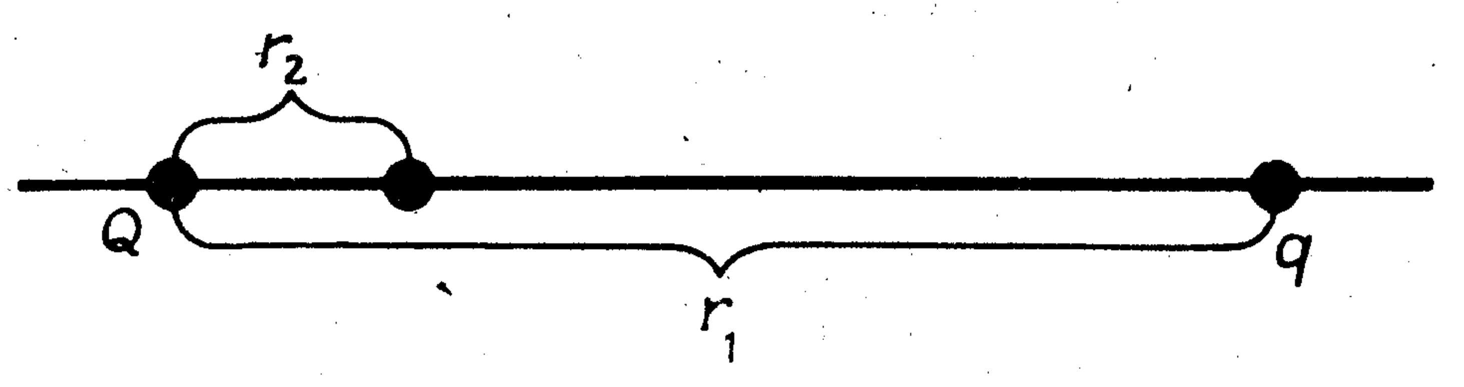


Рис. 1.30.

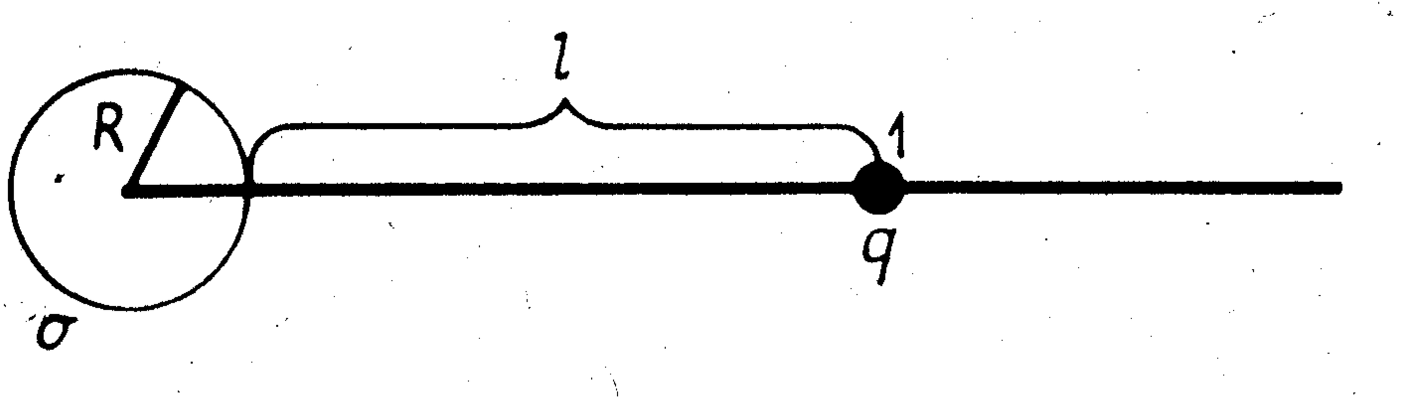


Рис. 1.31.

Выражая из (1.22) заряд сферы q_0 и подставляя полученное выражение в (1.21) и (1.23), получим для E_A и φ_A

$$E_A = \varphi_0 R/(R+l)^2, \quad \varphi_A = \varphi_0 R/(R+l).$$

Окончательно

$$E_A = 267\,\text{Н/Кл}, \quad \varphi_A = 80\,\text{В}.$$

Задача 3. Какую нужно совершить работу A, чтобы сблизить заряды $2\cdot 10^{-8}$ Кл и $3\cdot 10^{-8}$ Кл, находящиеся на расстоянии 10 см, до расстояния 1 см?

Дано: $q = 2\cdot 10^{-8}$ Кл, $Q = 3\cdot 10^{-8}$ Кл, $r_1 = 10$ см (0,1 м), $r_2 = 1$ см (0,01 м); A — ?

Решение. При сближении одноименных зарядов работу совершают внешние силы, работа этих сил с точностью до знака равна работе кулоновских сил (рис. 1.30), потенциальная энергия системы зарядов при этом увеличивается: $A = W_{\text{пот}2} - W_{\text{пот}1}$, где $W_{\text{пот}2}$ и $W_{\text{пот}1}$ — потенциальные энергии системы зарядов q и Q после и до их сближения:

$$W_{\text{пот}2} = \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0 r_2}, \quad W_{\text{пот}1} = \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0 r_1},$$

$$A = \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0}(1/r_2 - 1/r_1),$$

$$[A] = \frac{\text{Кл}^2}{\text{Кл}^2/\text{Н}\cdot\text{м}}(1/\text{м} - 1/\text{м}) = \text{Н}\cdot\text{м} = \text{Дж},$$

$$A = \frac{2\cdot 10^{-8}\cdot 3\cdot 10^{-8}}{4\cdot 3{,}14\cdot 8{,}85\cdot 10^{-12}}\left(\frac{1}{10^{-2}} - \frac{1}{10^{-1}}\right)\,\text{Дж} = 4{,}86\cdot 10^{-4}\,\text{Дж}.$$

Задача 4. Какую работу A необходимо совершить, чтобы перенести заряд $q = 3\cdot 10^{-8}$ Кл из бесконечности в точку, находящуюся на расстоянии $l = 90$ см от поверхности сферы радиусом $R = 10$ см, если поверхностная плотность заряда сферы $\sigma = 2\cdot 10^{-6}$ Кл/м^2?

Дано: $q = 3\cdot 10^{-8}$ Кл, $l = 90$ см (0,9 м), $R = 10$ см (0,1 м), $\sigma = 2\cdot 10^{-6}$ Кл/м^2; A — ?

Решение. Работа, совершаемая при перенесении заряда q из бесконечности в точку 1 (рис. 1.31), равна увеличению потенциальной энергии заряда:

$$A = \Delta W_{\text{пот}} = W_{\text{пот}1} - W_{\infty},$$

где $W_{\text{пот}1} = q\varphi_1$, φ_1 — потенциал поля сферы в точке 1, а $W_\infty = 0$. Так как заряд сферы равен $4\pi R^2\sigma$, то очевидно

$$\varphi_1 = \frac{\sigma 4\pi R^2}{4\pi\varepsilon_0(R+l)} = \frac{\sigma R^2}{\varepsilon_0(R+l)},$$

следовательно,

$$A = q\varphi_1 = \frac{q\sigma R^2}{\varepsilon_0(R+l)},$$

$$[A] = \frac{\text{Кл}\cdot(\text{Кл}/\text{м}^2)\cdot\text{м}^2}{(\text{Кл}^2/\text{Н}\cdot\text{м}^2)\cdot\text{м}} = \text{Н}\cdot\text{м} = \text{Дж}.$$

$$A = \frac{3\cdot10^{-8}\cdot2\cdot10^{-6}\cdot10^{-2}}{8,85\cdot10^{-12}\cdot(0,1+0,9)}\,\text{Дж} = 6,8\cdot10^{-5}\,\text{Дж}.$$

Задача 5. Два одинаковых шарика, имеющих одинаковые одноименные заряды, соединены пружиной, жесткость которой $k = 20$ Н/м, а длина $l_0 = 4$ см. Шарики колеблются так, что расстояние между ними меняется от 3 см до 6 см. Найти заряды шариков.

Дано: $k = 20$ Н/м, $l_0 = 4$ см ($4\cdot10^{-2}$ м), $l_1 = 3$ см ($3\cdot10^{-2}$ м), $l_2 = 6$ см ($6\cdot10^{-2}$ м); q — ?

Решение. Сила упругости и кулоновская сила — консервативные силы и, следовательно, суммарная энергия системы шарики—пружина, обусловленная силами Кулона и упругости, в моменты времени, когда шарики останавливаются, остается постоянной. Энергия системы при максимальном сближении шариков равна

$$W_1 = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 l_1} + \frac{k(l_1-l_0)^2}{2}.$$

Энергия системы при максимальном расстоянии между шариками:

$$W_2 = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 l_2} + \frac{k(l_2-l_0)^2}{2}.$$

Поскольку $W_1 = W_2$, имеем

$$\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 l_1} + \frac{k(l_1-l_0)^2}{2} = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 l_2} + \frac{k(l_2-l_0)^2}{2},$$

откуда

$$q = \sqrt{2\pi\varepsilon_0 k[(l_2-l_0)^2-(l_1-l_0)^2]l_1l_2/(l_2-l_1)},$$

$$[q] = \sqrt{\frac{\text{Кл}^2}{\text{Н}\cdot\text{м}^2}\cdot\frac{\text{Н}}{\text{м}}\cdot\text{м}^2\cdot\frac{\text{м}^2}{\text{м}}} = \text{Кл},$$

$$q = \sqrt{2{\cdot}3{,}14{\cdot}8{,}85{\cdot}10^{-12}{\cdot}20\,[4{\cdot}10^{-4}-1{\cdot}10^{-4}]\,\frac{3{\cdot}6{\cdot}10^{-4}}{(6-3){\cdot}10^{-2}}}\,\text{Кл} = 1{,}4{\cdot}10^{-7}\,\text{Кл}.$$

Задача 6. К закрепленному заряженному шарику зарядом $+q$ движется протон. На расстоянии $r = r_1$ скорость протона v_1. Определите, на какое минимальное расстояние приблизится протон к шарику.

Дано: $+q$, m_p, q_p, v_1, r_1; $r_{\min}$ — ?

Решение. Энергия протона на расстоянии r_1 равна сумме его потенциальной и кинетической энергий:

$$W_1 = k\frac{qq_p}{r_1} + \frac{mv_1^2}{2},$$

на расстоянии $r_{\min}$ (протон останавливается)—только потенциальной энергии:

$$W_2 = k\frac{qq_p}{r_{\min}}.$$

Кулоновская сила — консервативная, следовательно, можно записать закон сохранения энергии:

$$W_1 = W_2,$$

$$k\frac{qq_p}{r_1} + \frac{mv_1^2}{2} = k\frac{qq_p}{r_{\min}},$$

откуда

$$r_{\min} = kqq_p / \left(\frac{kq_pq}{r_1} + \frac{mv_1^2}{2}\right).$$

Задача 7. N одинаковых сферических капелек ртути заряжены до одного и того же потенциала φ_0. Каким будет потенциал большой капли, если все капли сольются в одну? При каких значениях зарядов капель это может произойти?

Дано: N, φ_0; φ — ? q — ?

Решение. Потенциал капли $\varphi_0 = kq_0/r_0$, где q_0, r_0 — заряд и радиус маленькой капли (ртуть—проводник), откуда $q_0 = r_0\varphi_0/k$. Заряд большой капли

$$q = Nq_0 = Nr_0\varphi_0/k.$$

Потенциал большой капли

$$\varphi = kq/R,$$

где R — радиус большой капли. Объем ртути не изменился, поэтому

$$\frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi r_0^3 N,$$

откуда $R = r_0\sqrt[3]{N}$. Окончательно имеем

$$\varphi = k\frac{Nr_0\varphi_0}{kr_0\sqrt[3]{N}} = N^{2/3}\varphi_0.$$

Ответим на второй вопрос задачи. Для этого оценим изменение потенциальной энергии системы.

При слиянии капель изменяется потенциальная энергия, обусловленная силами поверхностного натяжения. Ее изменение равно

$$\Delta W_{\text{пот.п.н.}} = \alpha(4\pi R^2 - N4\pi r^2) = \alpha 4\pi R^2(1 - N^{1/3}) < 0,$$

где α — коэффициент поверхностного натяжения.

Потенциальная энергия, обусловленная силами поверхностного натяжения, убывает. Потенциальная энергия заряженной большой капли равна

$$W_{\text{пот.эл.2}} = \frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0 R} = \frac{N^2q_0^2}{8\pi\varepsilon_0 R}.$$

Потенциальная энергия N маленьких заряженных капель, находящихся на больших расстояниях друг от друга, равна

$$W_{\text{пот.эл.1}} = N\frac{q_0^2}{8\pi\varepsilon_0 r} = \frac{q_0^2 N^{4/3}}{8\pi\varepsilon_0 R}.$$

Изменение потенциальной энергии, обусловленной кулоновскими силами, определиться выражением

$$\Delta W_{\text{пот.эл.}} = W_{\text{пот.эл.2}} - W_{\text{пот.эл.1}} = \frac{Nq_0^2}{8\pi\varepsilon_0 R}(N - N^{1/3}) > 0$$

и будет больше нуля.

Всякая система, как мы знаем, стремится к минимуму потенциальной энергии. Поэтому слияние капель может произойти, если общее изменение потенциальной энергии будет отрицательным (энергия убывает) $\Delta W_{\text{пот}} < 0$:

$$\Delta W_{\text{пот}} = \Delta W_{\text{пот.п.н.}} + \Delta W_{\text{пот.эл.}} = \alpha 4\pi R^2(1 - N^{1/3}) + \frac{N^{4/3}q_0^2}{8\pi\varepsilon_0 R}(N^{2/3} - 1) < 0.$$

Отсюда ясно, что заряд должен удовлетворять соотношению

$$q_0 < \frac{4\pi R}{N^{2/3}}\sqrt{\frac{2\varepsilon_0 R\alpha(N^{1/3} - 1)}{N^{2/3} - 1}}.$$

Отметим, что данная оценка произведена недостаточно строго, так как потенциальная энергия системы капель рассчитывалась в предположении, что они находятся на достаточно большом расстоянии друг от друга, однако для оценки порядка величин зарядов данное решение вполне подходит.

Задача 8. Незаряженный проводящий шар внесли в электрическое поле точечного заряда q. Расстояние между центром шара и зарядом r. Определите потенциал шара.

Дано: q, r; φ — ?

Решение. При внесении шара в электрическое поле на нем индуцируются заряды. Напряженность поля внутри шара равна векторной сумме напряженностей полей точечного заряда и заряда, индуцированного на шаре, и равна нулю:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 + \mathbf{E}_{\text{инд}} = 0,$$

где $\mathbf{E}_0$ — напряженность поля точечного заряда.

Поверхность шара является эквипотенциальной поверхностью. Внутри шара потенциал постоянен и равен потенциалу поверхности. Поэтому, определив потенциал в любой точке внутри шара или на его поверхности, мы решим задачу. Определим потенциал в центре сферы. Потенциал равен сумме потенциалов поля, создаваемого внешними зарядами, и потенциалов зарядов, индуцированных этим полем на поверхности шара:

$$\varphi_0 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} + k\frac{\Delta q_1}{R} + k\frac{\Delta q_2}{R} + \ldots = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} + k\frac{\sum_i \Delta q_i}{R},$$

где Δq_i — величина индуцированного заряда на малом элементе площади поверхности шара Δs_i, R — радиус шара. Поскольку первоначально шар не был заряжен, то $\sum_i \Delta q_i = 0$. Итак, потенциал шара равен потенциалу той точки поля, где оказался центр шара.

Задача 9. Две тонкие проводящие сферы радиусов R_1 и R_2 имеют заряды q_1 и q_2. Расстояние между центрами сфер l, $l > R_1 + R_2$. Определите потенциалы сфер до и после соединения их тонкой проволокой.

Дано: $R_1, R_2, q_1, q_2, l; \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ — ?

Решение. Потенциал сферы складывается из потенциала поля самой сферы и потенциала поля, создаваемого второй сферой в центре первой, потенциала поля индуцированного заряда на поверхности второй сферы и потенциала поля индуцированного заряда на поверхности самой сферы, который равен нулю (см. задачу 8):

$$\varphi_1 = kq_1/R_1 + kq_2/l + kq_2'/l,$$
$$\varphi_2 = kq_1/l + kq_2/R_2 + kq_1'/l.$$

Заряд, индуцированный на второй сфере, расположен на диаметрально противоположных ее сторонах и его поле сходно с полем диполя. Потенциал убывает с расстоянием по закону $\varphi \sim 1/l^2$, а так как $l > R_1 + R_2$ то последними слагаемыми в написанных равенствах можно пренебречь.

После соединения сфер начинается перетекание заряда, которое прекратится тогда, когда потенциалы сфер станут равны:

$$\varphi_1' = kq_1'/R_1 + kq_2'/l,$$
$$\varphi_2' = kq_2'/R_2 + kq_1'/l,$$

где q_1', q_2' — заряды сфер после перетекания,

$$\varphi_1' = \varphi_2' = \varphi_3,$$

откуда

$$q_1'/R_1 + q_2'/l = q_1'/l + q_2'/R_2. \tag{1.24}$$

По закону сохранения заряда

$$q_1 + q_2 = q_1' + q_2'. \tag{1.25}$$

Последние два уравнения составляют систему относительно неизвестных q_1' и q_2':

$$q_1' = (q_1 + q_2)\frac{R_2(R_1 - l)}{2R_1R_2 - l(R_1 + R_2)},$$
$$q_2' = (q_1 + q_2)\frac{R_1(R_2 - l)}{2R_1R_2 - l(R_1 + R_2)}.$$

Окончательно, имеем

$$\varphi_3 = k(q_1 + q_2)\frac{l^2 + R_1R_2}{l(l(R_1 + R_2) - 2R_1R_2)}.$$

Задача 10. Определить зависимость напряженности и потенциала электрического поля от расстояния от центра заряженной проводящей сферы радиуса R_0 и заряда q, окруженной проводящей сферической незаряженной оболочкой с внутренним радиусом R_1 и внешним R_2. Построить графики найденных зависимостей.

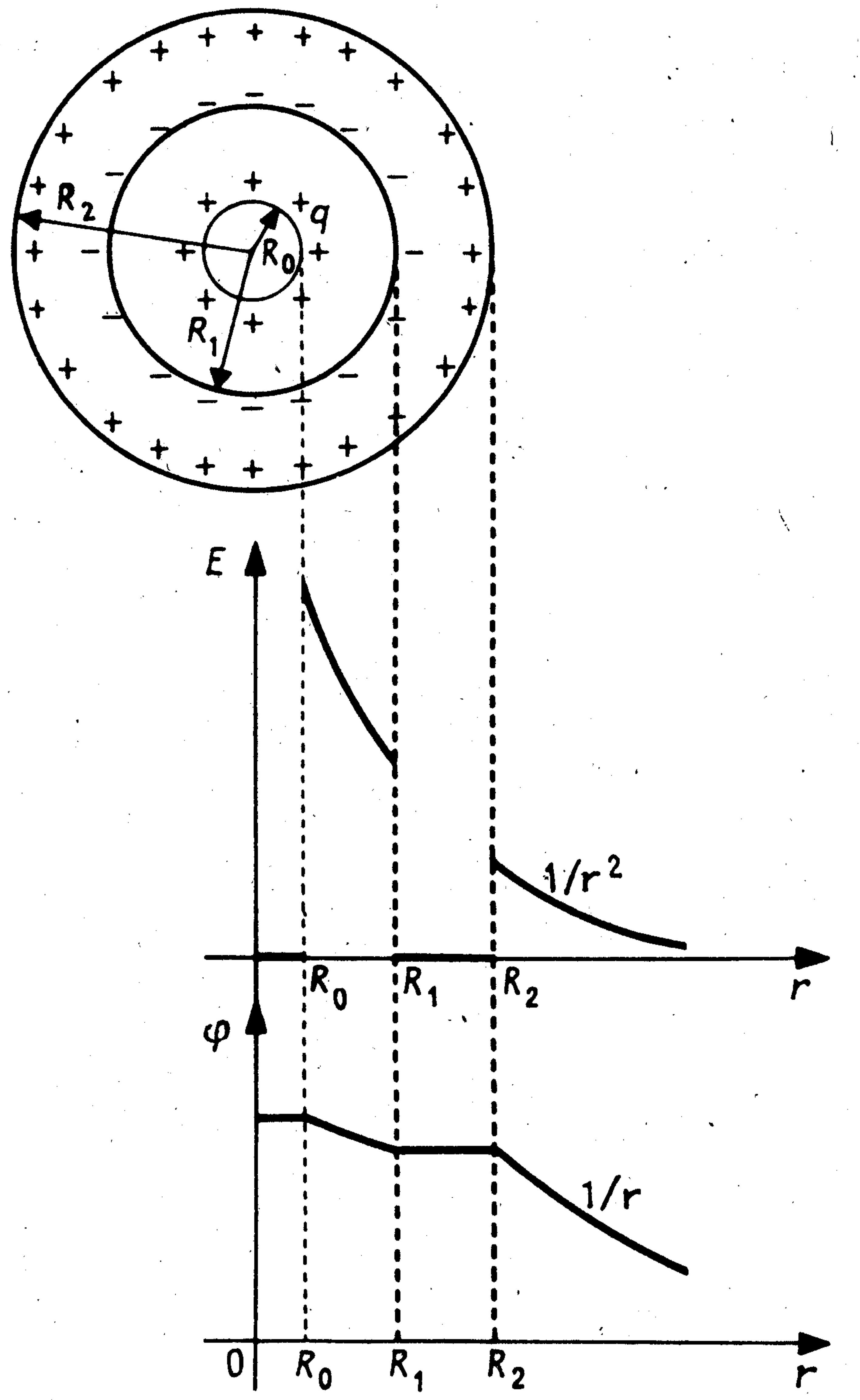


Рис. 1.32.

Дано: q, R_0, R_1, R_2; $E(r)$ — ? $\varphi(r)$ — ?

Решение. Напряженность поля внутри проводников равна нулю: $E = 0$ при $r < R_0$, $R_1 < r < R_2$. На оболочке индуцируются заряды (рис. 1.32). Поле при $R_0 < r < R_1$ и при $r > R_2$ сходно с полем точечного заряда, помещенного в центр сферы и равного заряду сферы:

$$E = kq/r^2.$$

Зависимость $E(r)$ показана на рис. 1.32. Потенциал в точках $R_0 < r < R_1$, складывается из потенциалов полей, создаваемых тремя заряженными сферическими поверхностями:

$$\varphi = kq/r - kq/R_1 + kq/R_2 = kq(1/r - 1/R_1 + 1/R_2).$$

При $r < R_0$ потенциал постоянен и равен

$$\varphi = kq(1/R_0 - 1/R_1 + 1/R_2).$$

При $r > R_2$ потенциал равен потенциалу поля сферы радиуса R_2 с зарядом q:

$$\varphi = kq/r.$$

Потенциал внешней сферической оболочки есть

$$\varphi = kq/R_2.$$

Зависимость $\varphi(r)$ показана на рис. 1.32.

Задача 11. Металлический шар радиуса r окружен тонкой концентрической проводящей сферой радиуса $2r$. Заряды шара q_1 и сферы q_2 таковы, что потенциал шара равен нулю, потенциал внешней сферы равен φ. Определите заряд шара и сферы.

Дано: $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = \varphi$, r, $2r$; q_1, q_2 — ?

Решение. Потенциал шара равен сумме потенциалов полей, создаваемых шаром и внешней сферой:

$$\varphi_1 = +kq_1/r + kq_2/2r = 0, \tag{1.26}$$

следовательно,

$$q_1 = -q_2/2.$$

Потенциал внешней сферы

$$\varphi_2 = k\frac{q_1 + q_2}{2r} = \varphi,$$

$$\varphi = k\frac{q_2 - q_2/2}{2r} = k\frac{q_2}{4r} = \frac{q_2}{16\pi\varepsilon_0 r},$$

откуда

$$q_2 = 16\pi\varepsilon_0\varphi r,$$

и соответственно

$$q_1 = -8\pi\varepsilon_0\varphi r.$$

Задача 12. Два небольших проводящих заряженных шара радиуса r расположены на расстоянии l друг от друга ($l > 2r$). Шары поочередно на некоторое время заземляют. Определить потенциал шара, который был заземлен первым. Первоначально каждый шар имел заряд q.

Дано: r, l, q; φ_{1x} — ?

Решение. При заземлении потенциал проводника всегда становится равным нулю, но это не означает, что его заряд также обращается в нуль, так как потенциал шара в данном случае складывается из потенциала поля самого шара, потенциалов полей, создаваемых зарядом q второго шара и индуцированным на нем зарядом. Потенциалом последнего можно пренебречь, так как по условию $l > 2r$. Потенциал первого шара после заземления равен

$$\varphi_1 = q'/4\pi\varepsilon_0 r + q/4\pi\varepsilon_0 l = 0.$$

Таким образом, на первом шаре возникает заряд

$$q' = -qr/l.$$

Потенциал второго шара после заземления есть

$$\varphi_2 = q'/4\pi\varepsilon_0 l + q''/4\pi\varepsilon_0 r = 0,$$

откуда заряд второго шара после заземления равен

$$q'' = -q'r/l = +q(r/l)^2.$$

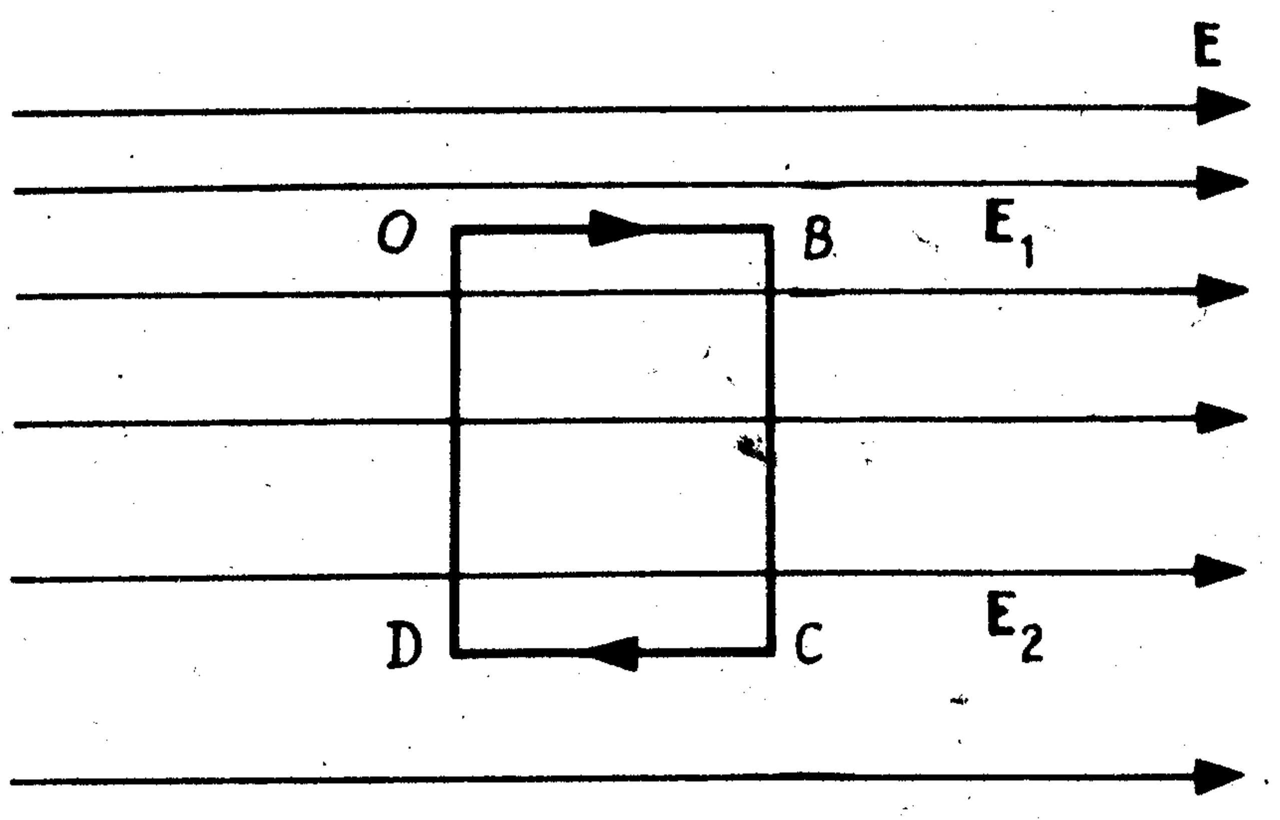


Рис. 1.33.

Окончательно после двух последовательных заземлений обоих шаров потенциал первого шара равен

$$\varphi_{1x} = q''/4\pi\varepsilon_0 l + q'/4\pi\varepsilon_0 r.$$

Подставив выражения для q' и q'', получим

$$\varphi_{1x} = -(q/4\pi\varepsilon_0 l)[1 - (r/l)^2].$$

Задача 13. Может ли существовать электростатическое поле, силовые линии которого — параллельные прямые, а напряженность возрастает в направлении, перпендикулярном силовым линиям поля?

Решение. Выберем некоторый произвольный контур (рис. 1.33), например $OBCD$, и вычислим работу, которую совершают кулоновские силы при перенесении заряда q ($q > 0$) по этому контуру.

По условию задачи поле неоднородно $E_1 > E_2$ (густота силовых линий показывает напряженность электрического поля). Работы кулоновских сил при перенесении заряда из точки B в точку C и из точки D в точку O равны нулю, так как сила перпендикулярна перемещению. Работа при перемещении заряда из точки O в точку B есть

$$A_1 = qE_1 l_{OB},$$

где l_{OB} — длина отрезка OB. Работа при перемещении заряда из точки C в точку D равна

$$A_2 = -qE_2 l_{CD}.$$

Поскольку $l_{OB} = l_{CD}$, суммарная работа сил по перемещению заряда по замкнутому контуру равна

$$A = A_1 + A_2 = ql_{OB}(E_1 - E_2) \neq 0.$$

Одним из фундаментальных свойств электростатического поля является то, что работа кулоновских сил по любому замкнутому контуру должна быть равна нулю, следовательно, такого электростатического поля существовать не может.

Задача 14. Три проводящие концентрические сферы радиусов r_0, $2r_0$ и $3r_0$ имеют заряд $q, 2q, -3q$ соответственно. Определите потенциал каждой из сфер и постройте график зависимости $\varphi(r)$.

Дано: $q, 2q, -3q$, r_0, $2r_0$, $3r_0$; φ_1, φ_2, φ_3 — ?

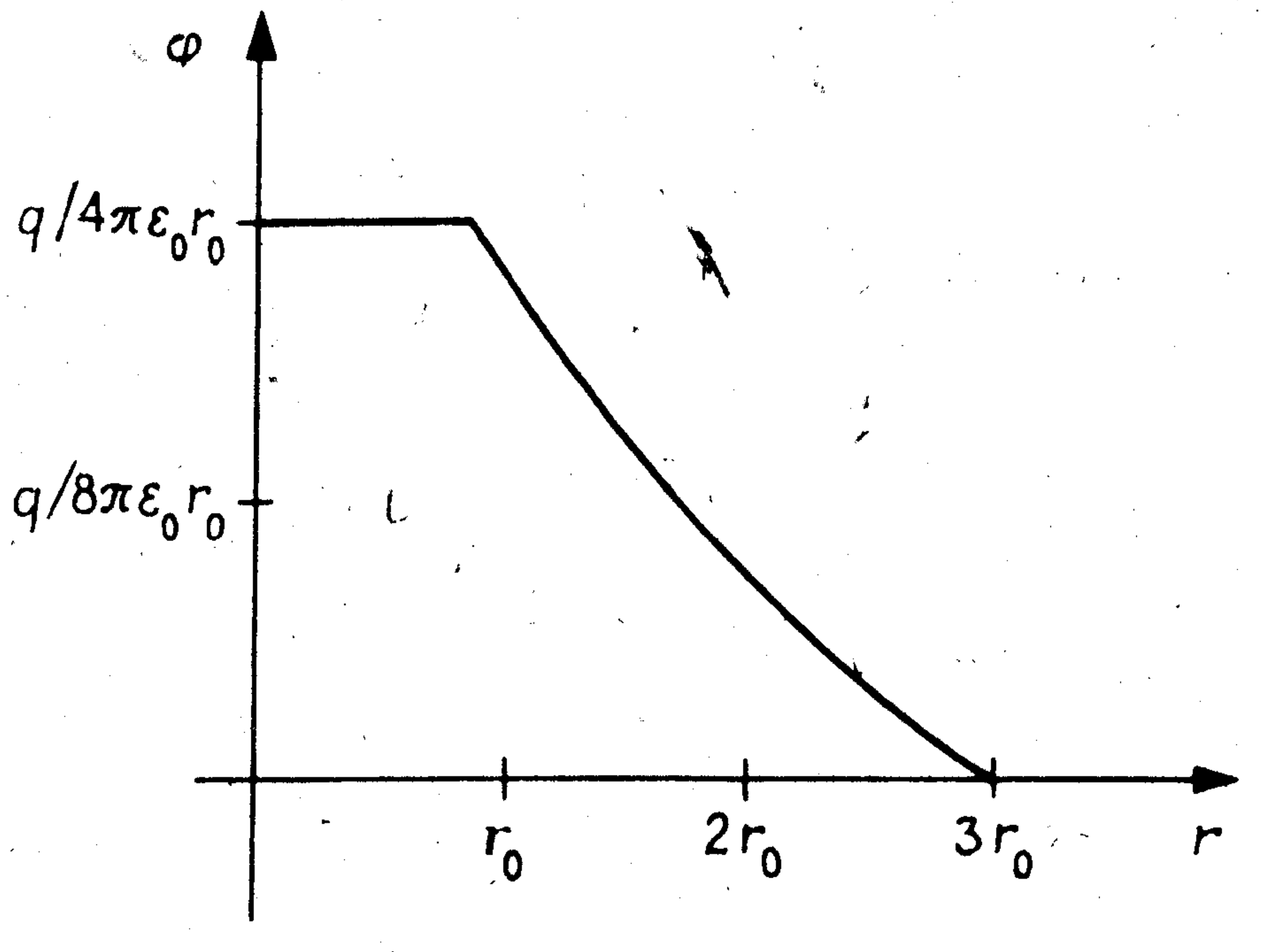


Рис. 1.34.

Решение. Потенциал сферы радиуса r_0 складывается из потенциалов трех сфер. Внутри проводящей сферы потенциал равен потенциалу поверхности. Итак,

$$\varphi_1 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r_0} + \frac{2q}{4\pi\varepsilon 2r_0} - \frac{3q}{4\pi\varepsilon_0 3r_0} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r_0}.$$

Потенциал поля вне сферы радиуса r_0 при $r_0 < r < 2r_0$ равен

$$\varphi(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}.$$

Потенциал второй сферы определяется потенциалом самой сферы, потенциалом поверхности внешней сферы и потенциалом поля внутренней сферы при $r = 2r_0$:

$$\varphi_2 = \frac{2q}{4\pi\varepsilon_0 2r_0} - \frac{3q}{4\pi\varepsilon_0 3r_0} + \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 2r_0} = \frac{q}{8\pi\varepsilon_0 r_0}.$$

При $2r_0 < r < 3r_0$ потенциал изменяется по закону

$$\varphi(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} + \frac{2q}{4\pi\varepsilon_0 r} - \frac{3q}{4\pi\varepsilon_0 3r_0} = \frac{3q}{4\pi\varepsilon_0 r} - \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r_0}.$$

Потенциал внешней сферы складывается из потенциалов полей первых двух сфер при $r = 3r_0$ и потенциала поля, создаваемого зарядом самой сферы:

$$\varphi_3 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 3r_0} + \frac{2q}{4\pi\varepsilon_0 3r_0} - \frac{3q}{4\pi\varepsilon_0 3r_0} = 0.$$

При $r > 3r_0$

$$\varphi(r) = 0.$$

На рис. 1.34. изображена зависимость $\varphi(r)$.

Электрическая емкость

Если изолированному проводнику сообщить заряд Δq, то его потенциал увеличится на $\Delta\varphi$, причем отношение $\Delta q/\Delta\varphi$ остается постоянным:

$$\Delta q/\Delta\varphi = C, \tag{1.27}$$

где C — электрическая емкость проводника, т. е. величина, численно равная заряду, который надо сообщить проводнику, чтобы повысить его потенциал на единицу (на 1 В).

Электрическая емкость проводников зависит от их размеров, формы, диэлектрических свойств среды, в которую они помещены, и расположения окружающих тел, но не зависит от материала проводника. Потенциал изолированной заряженной сферы радиуса r, помещенной в однородный безграничный диэлектрик, равен $\varphi = q/4\pi\varepsilon_0\varepsilon r$. Тогда из (1.27) следует, что электрическая емкость сферы равна

$$C = 4\pi\varepsilon_0\varepsilon r. \tag{1.28}$$

В СИ за единицу электрической емкости принимается 1 фарад (Ф):

$$[C] = 1\text{Ф} = 1\text{Кл}/1\text{В} = 1\text{А}^2 \cdot \text{с}^4/\text{кг} \cdot \text{м}^2.$$

Емкость, равная 1 Ф, очень велика, поэтому на практике чаще пользуются единицами микрофарад ($1\,\text{мкФ} = 10^{-6}$ Ф) или пикофарад ($1\,\text{пФ} = 10^{-12}$ Ф). Конденсатор представляет собой систему двух проводников (обкладок), не соединенных друг с другом. Часто между обкладками помещают диэлектрик. При сообщении этим проводникам одинаковых по величине, но разноименных зарядов поле, создаваемое этими проводниками, практически полностью локализовано в пространстве между ними (проводники ограничивают область электрического поля); краевыми эффектами как правило пренебрегают. Конденсаторы являются накопителями электрических зарядов. Отношение заряда на обкладках конденсатора (заряды по модулю равны) к разности потенциалов между ними — постоянная величина:

$$q/(\varphi_1 - \varphi_2) = C. \tag{1.29}$$

Плоский конденсатор состоит из двух пластин площадью S, расположенных на небольшом расстоянии d друг от друга (расстояние между пластинами d много меньше линейных размеров пластин), заряды на пластинах $+q$ и $-q$. Определим емкость плоского конденсатора. В общем случае, если пространство между пластинами заполнено диэлектриком с диэлектрической проницаемостью ε, то напряженность электростатического поля между пластинами равна сумме напряженностей полей, создаваемых каждой из пластин:

$$E = \sigma/2\varepsilon_0\varepsilon + \sigma/2\varepsilon_0\varepsilon = \sigma/\varepsilon_0\varepsilon.$$

(Считаем поле внутри конденсатора однородным, краевыми эффектами пренебрегаем.) Используя связь разности потенциалов с напряженностью электрического поля, получим

$$\Delta\varphi = Ed = \sigma d/\varepsilon_0\varepsilon = qd/\varepsilon_0\varepsilon S$$

($q = \sigma S$), откуда, согласно (1.29), для емкости плоского конденсатора получим формулу

$$C = \varepsilon_0\varepsilon S/d. \tag{1.30}$$

Из (1.30) следует, что емкость конденсатора зависит от площади пластин, расстояния между ними и диэлектрической проницаемости вещества, заполняющего пространство между пластинами конденсатора, и не зависит от заряда и разности потенциалов, приложенной к пластинам.

Последовательное и параллельное соединение конденсаторов

На практике конденсаторы часто соединяют различными способами. На рис. 1.35 представлено последовательное соединение трех конденсаторов. Если батарею конденсаторов подключить к источнику напряжения, то на левую пластину конденсатора C_1 перейдет заряд $+q$, на правую пластину конденсатора C_3 заряд $-q$. Вследствие электризации через влияние правая пластина конденсатора C_1 будет иметь заряд $-q$, а так как пластины конденсаторов C_1 и C_2 соединены и были электронейтральны, то вследствие закона сохранения заряда заряд левой пластины конденсатора C_2 будет равен $+q$, и т. д. На всех пластинах конденсаторов при таком соединении будет одинаковый по модулю заряд.

Найти эквивалентную емкость — это значит найти конденсатор такой емкости, который при той же разности потенциалов будет накапливать тот же заряд q, что и батарея конденсаторов. Разность потенциалов $\varphi_1 - \varphi_2$ складывается из суммы разностей потенциалов между пластинами каждого из конденсаторов:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = (\varphi_1 - \varphi_A) + (\varphi_A - \varphi_B) + (\varphi_B - \varphi_2). \tag{1.31}$$

Воспользовавшись формулой (1.29), запишем

$$q/C_{\text{экв}} = q/C_1 + q/C_2 + q/C_3,$$

откуда

$$1/C_{\text{экв}} = 1/C_1 + 1/C_2 + 1/C_3,$$

и в общем случае имеем

$$1/C_{\text{экв}} = \sum_i 1/C_i. \tag{1.32}$$

На рис. 1.36 изображена батарея параллельно соединенных конденсаторов. Разность потенциалов между пластинами всех конденсаторов одинакова и равна $\varphi_1 - \varphi_2$. Заряды на пластинах

$$\begin{aligned} q_1 &= C_1(\varphi_1 - \varphi_2), \\ q_2 &= C_2(\varphi_1 - \varphi_2), \\ q_3 &= C_3(\varphi_1 - \varphi_2). \end{aligned} \tag{1.33}$$

На эквивалентном конденсаторе емкостью $C_{\text{экв}}$ заряд на пластинах при той же разности потенциалов равен

$$q = q_1 + q_2 + q_3. \tag{1.34}$$

Согласно (1.29)

$$C_{\text{экв}}(\varphi_1 - \varphi_2) = C_1(\varphi_1 - \varphi_2) + C_2(\varphi_1 - \varphi_2) + C_3(\varphi_1 - \varphi_2),$$

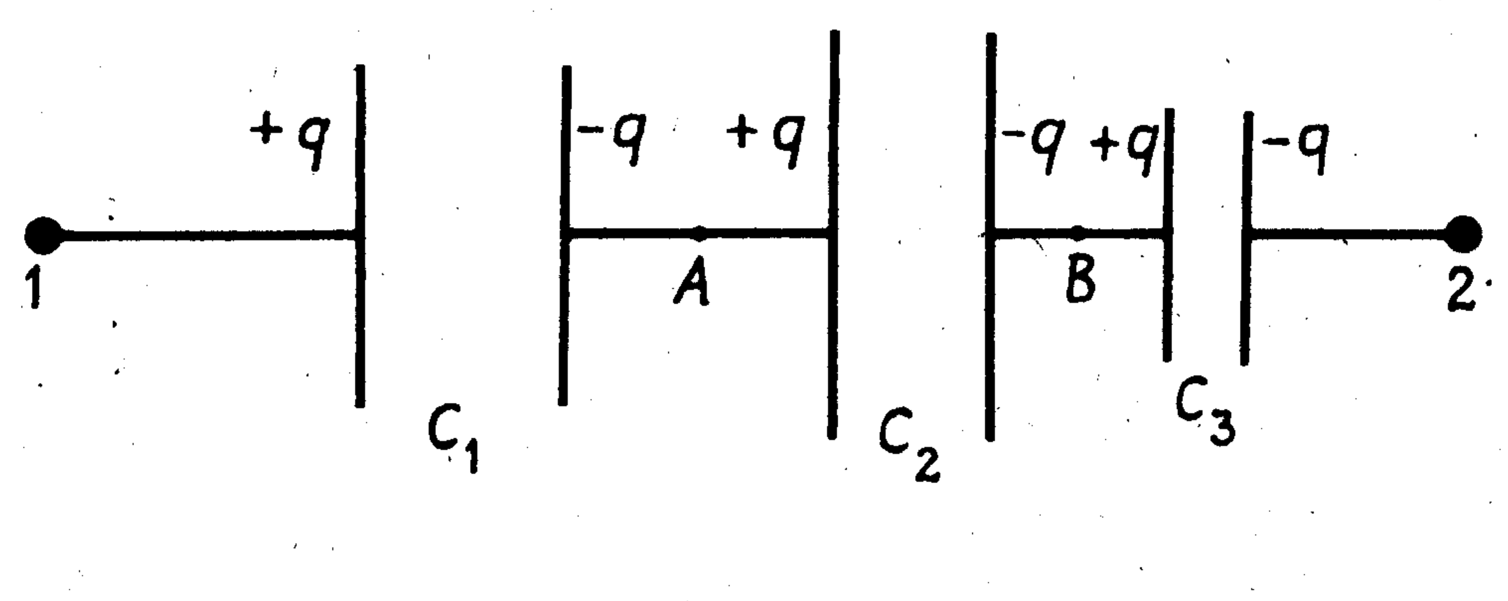


Рис. 1.35.

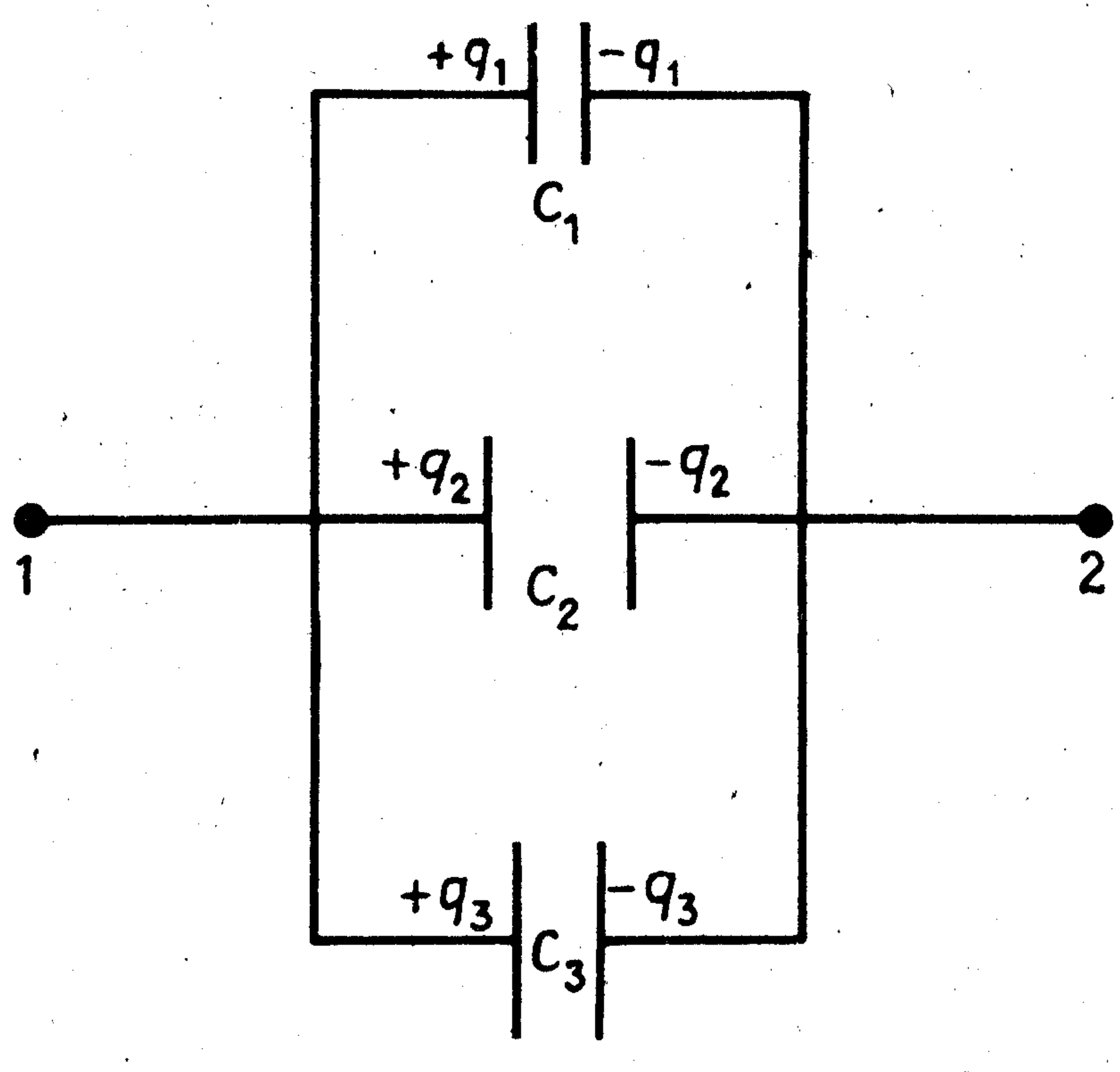


Рис. 1.36.

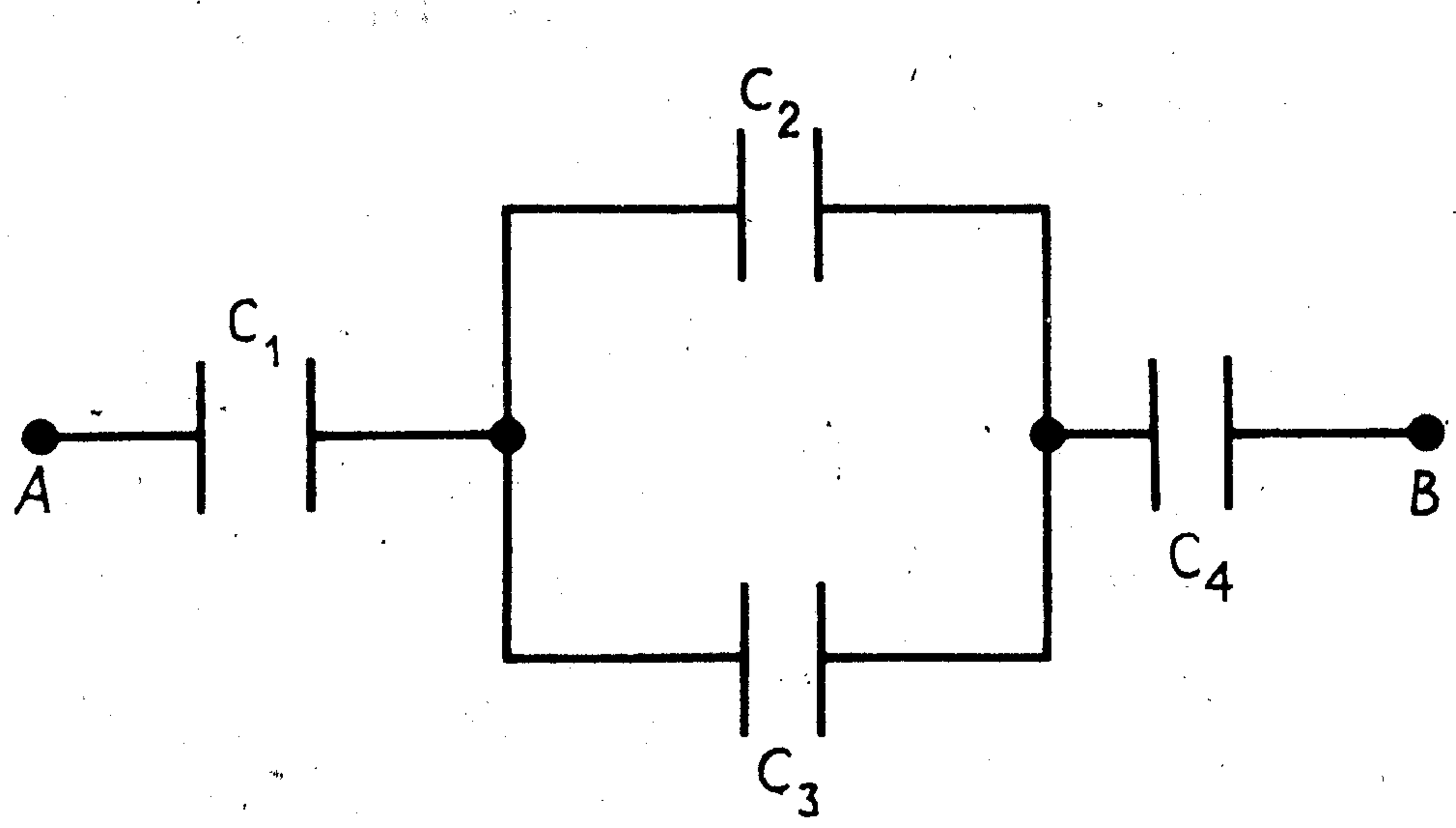


Рис. 1.37.

следовательно, $C_{экв} = C_1 + C_2 + C_3$, и в общем случае

$$C_{экв} = \sum_i C_i. \tag{1.35}$$

Примеры решения задач

Задача 1. Четыре конденсатора емкостями $C_1 = 1$ мкФ, $C_2 = 1$ мкФ, $C_3 = 3$ мкФ, $C_4 = 2$ мкФ соединены, как показано на рис. 1.37. К точкам A и B подводится напряжение $U = 140$ В. Найти заряд q_i и напряжение U_i на каждом из конденсаторов.

Дано: $C_1 = 1$ мкФ ($1{\cdot}10^{-6}$ Ф), $C_2 = 1$ мкФ ($1{\cdot}10^{-6}$ Ф), $C_3 = 3$ мкФ ($3{\cdot}10^{-6}$ Ф), $C_4 = 2$ мкФ ($2 \cdot 10^{-6}$ Ф), $U = 140$ В; q_i — ? U_i — ?

Решение. Для определения заряда и напряжения прежде всего найдем емкость батареи конденсаторов. Эквивалентная емкость второго и третьего конденсаторов, согласно (1.35), равна $C_{2,3} = C_2 + C_3$, а эквивалентная емкость всей батареи конденсаторов, представляющей собой три последовательно соединенных конденсатора емкостями $C_1, C_{2,3}, C_4$ равна

$$1/C_{экв} = 1/C_1 + 1/C_{2,3} + 1/C_4.$$

Заряды на этих конденсаторах одинаковы:

$$q_1 = q_{2,3} = q_4 = C_{\text{экв}}U.$$

Для упрощения вычислений определим сначала $C_{\text{экв}}$:

$$\frac{1}{C_{\text{экв}}} = \left[\frac{1}{10^{-6}} + \frac{1}{(1+3)\cdot 10^{-6}} + \frac{1}{2\cdot 10^{-6}}\right]\frac{1}{\Phi} = \frac{7}{4\cdot 10^{-6}}\frac{1}{\Phi},$$

откуда $C_{\text{экв}} = (4/7)\cdot 10^{-6}$ Ф.

Для заряда имеем $q_1 = q_{2,3} = q_4 = (4/7)\cdot 10^{-6}\cdot 140$ Кл $= 8\cdot 10^{-5}$ Кл. Следовательно, заряд первого конденсатора равен $q_1 = 8\cdot 10^{-5}$ Кл, а разность потенциалов между его обкладками, или напряжение, равно

$$U_1 = q_1/C_1 = \frac{8\cdot 10^{-5}}{1\cdot 10^{-6}}\text{ В} = 80\text{ В}.$$

Для четвертого конденсатора аналогично имеем

$$q_4 = 8\cdot 10^{-5}\text{ Кл},\quad U_4 = q_4/C_4 = \frac{8\cdot 10^{-5}}{2\cdot 10^{-6}}\text{ В} = 40\text{ В}.$$

Найдем напряжение на втором и третьем конденсаторах:

$$U_2 = U_3 = q_{2,3}/C_{2,3} = \frac{8\cdot 10^{-5}}{4\cdot 10^{-6}}\text{ В} = 20\text{ В}.$$

Таким образом, на втором конденсаторе заряд равен

$$q_2 = C_2U_2 = 1\cdot 10^{-6}\cdot 20\text{ Кл} = 2\cdot 10^{-5}\text{ Кл},$$

а на третьем конденсаторе

$$q_3 = C_3U_3 = 3\cdot 10^{-6}\cdot 20\text{ Кл} = 6\cdot 10^{-5}\text{ Кл}.$$

Отметим, что $q_{2,3} = q_2 + q_3$ (см. формулу (1.34)).

Задача 2. Две проводящие сферы радиуса $R_1 = 4$ см и $R_2 = 12$ см, находящиеся на большом расстоянии друг от друга и имеющие электрические заряды $q_1 = 4\cdot 10^{-7}$ Кл и $q_2 = -1\cdot 10^{-7}$ Кл, соединяют тонкой проволокой, которую затем убирают. Определить заряд каждой из сфер после соединения.

Дано: $R_1 = 4$ см ($4\cdot 10^{-2}$ м), $R_2 = 12$ см ($12\cdot 10^{-2}$ м), $q_1 = 4\cdot 10^{-7}$ Кл, $q_2 = -1\cdot 10^{-7}$ Кл; q_1' — ? q_2' — ?

Решение. При соединении сфер проволокой перетекание заряда происходит до тех пор, пока потенциалы сфер не станут равны, т. е.

$$\varphi_1' = \varphi_2', \tag{1.36}$$

где φ_1' и φ_2' — потенциалы сфер после соединения. По закону сохранения заряда для изолированной системы, имеем:

$$q_1 + q_2 = q_1' + q_2', \tag{1.37}$$

где q_1 и q_2 — заряды сфер до соединения, q_1' и q_2' — заряды сфер после соединения. Так как сферы по условию задачи находятся на большом расстоянии друг от друга, потенциал каждой из сфер определится только зарядом самой сферы, влиянием поля второй сферы можно пренебречь. Поэтому

$$\varphi_1' = q_1'/4\pi\varepsilon_0 R_1,\quad \varphi_2' = q_2'/4\pi\varepsilon_0 R_2.$$

Подставим эти выражения для φ_1' и φ_2' в (1.36):

$$q_1'/4\pi\varepsilon_0 R_1 = q_2'/4\pi\varepsilon_0 R_2, \quad \text{или} \quad q_1'/R_1 = q_2'/R_2$$

и, используя (1.37), получим

$$q_1'/R_1 = (q_1 + q_2 - q_1')/R_2,$$

откуда

$$q_1' = (q_1 + q_2)/(1 + R_2/R_1),$$

$$q_1' = \frac{(4 \cdot 10^{-7} - 1 \cdot 10^{-7})}{1 + 12 \cdot 10^{-2}/4 \cdot 10^{-2}} \text{ Кл} = 0,75 \cdot 10^{-7} \text{ Кл}.$$

Очевидно,

$$q_2' = (q_1 + q_2) - q_1' = (4 \cdot 10^{-7} - 1 \cdot 10^{-7}) - 0,75 \cdot 10^{-7} \text{ Кл} = 2,25 \cdot 10^{-7} \text{ Кл}.$$

Задача 3. Конденсатор емкостью $C_1 = 1$ мкФ, заряженный до разности потенциалов $U_1 = 100$ В и отключенный от источника, соединили параллельно с конденсатором емкостью $C_2 = 3$ мкФ, заряженным до разности потенциалов $U_2 = 60$ В. Определить заряд каждого из конденсаторов и разность потенциалов между обкладками после их соединения, если

1) соединяются обкладки, имеющие одноименные заряды;
2) соединяются обкладки, имеющие разноименные заряды.

Дано: $C_1 = 1$ мкФ ($1 \cdot 10^{-6}$ Ф), $U_1 = 100$ В, $C_2 = 3$ мкФ ($3 \cdot 10^{-6}$ Ф), $U_2 = 60$ В; q_1' — ? q_2' — ? U_0' — ? q_1'' — ?; q_2'' — ? U_0'' — ?

Решение. 1) При параллельном соединении конденсаторов общая емкость батареи конденсаторов определяется по формуле (1.35) $C_{\text{экв}} = C_1 + C_2$, а общий заряд равен (1.34) $q = q_1 + q_2 = C_1 U_1 + C_2 U_2$, где q_1 — заряд первого конденсатора до соединения, q_2 — заряд второго конденсатора до соединения. Разность потенциалов после соединения на обкладках каждого из конденсаторов

$$U_0' = q/C_{\text{экв}} = (C_1 U_1 + C_2 U_2)/C_{\text{экв}},$$

а заряд каждого конденсатора после соединения равен

$$q_1' = C_1 U_0' \quad \text{и} \quad q_2' = C_2 U_0'.$$

Окончательно имеем

$$U_0' = \frac{1 \cdot 10^{-6} \cdot 100 + 3 \cdot 10^{-6} \cdot 60}{1 \cdot 10^{-6} + 3 \cdot 10^{-6}} \text{ В} = 70 \text{ В},$$

$$q_1' = 1 \cdot 10^{-6} \cdot 70 \text{ Кл} = 7 \cdot 10^{-5} \text{ Кл},$$

$$q_2' = 3 \cdot 10^{-6} \cdot 70 \text{ Кл} = 21 \cdot 10^{-5} \text{ Кл}.$$

2) Во втором случае при соединении обкладок, имеющих разноименные заряды, общий заряд $q = |q_1 - q_2| = |C_1 U_1 - C_2 U_2|$. Разность потенциалов на обкладках каждого из конденсаторов будет равной

$$U_0'' = \frac{|C_1 U_1 - C_2 U_2|}{C_1 + C_2};$$

$$U_0'' = \frac{1 \cdot 10^{-6} \cdot 100 - 3 \cdot 10^{-6} \cdot 60}{1 \cdot 10^{-6} + 3 \cdot 10^{-6}} \text{ В} = 20 \text{ В},$$

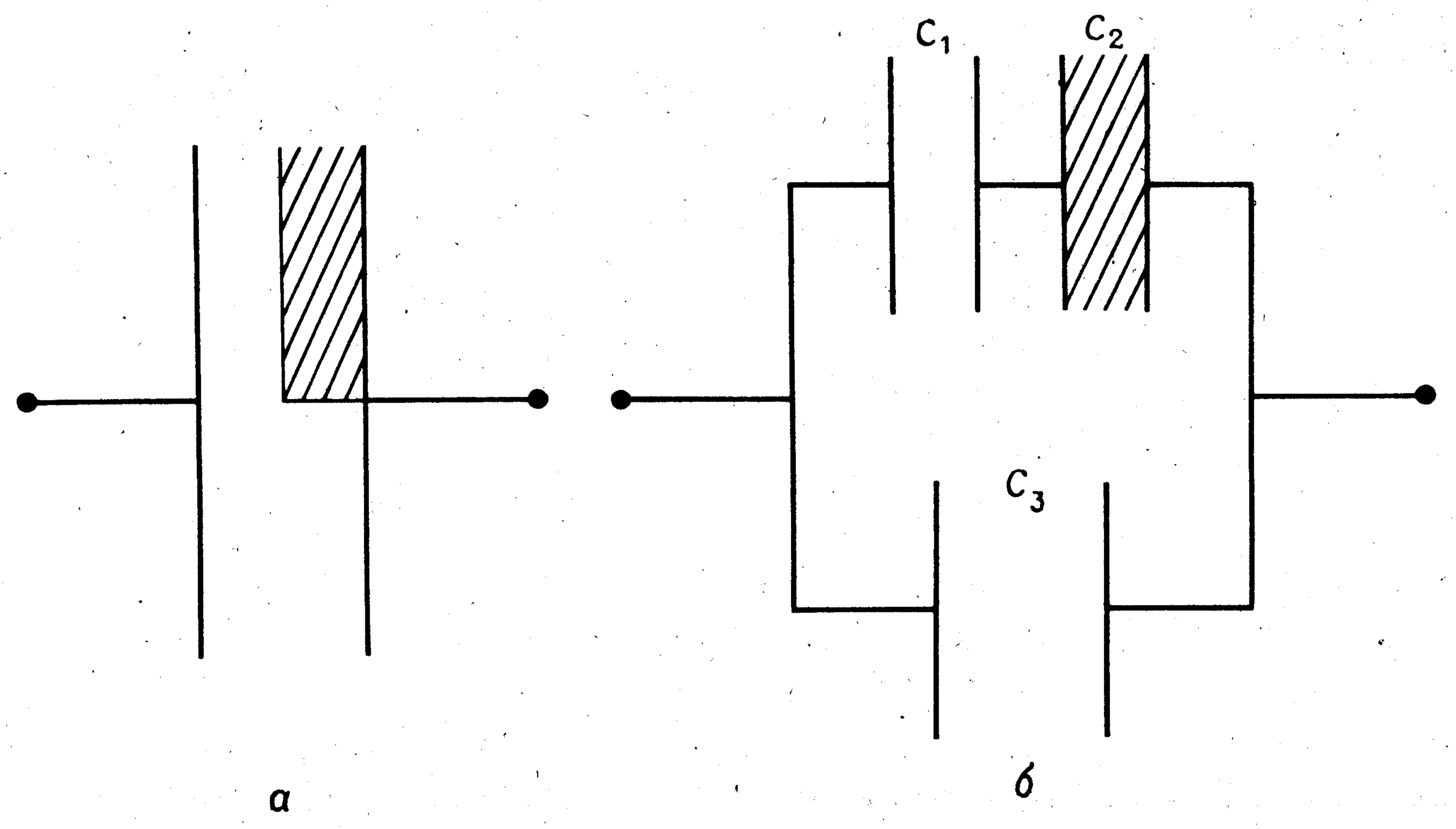


Рис. 1.38.

а заряды каждого из конденсаторов после соединения будут равны

$$q_1'' = C_1 U_0''; \quad q_1'' = 1 \cdot 10^{-6} \cdot 20\,\text{Кл} = 2 \cdot 10^{-5}\,\text{Кл},$$

$$q_2'' = C_2 U_0''; \quad q_2'' = 3 \cdot 10^{-6} \cdot 20\,\text{Кл} = 6 \cdot 10^{-5}\,\text{Кл}.$$

Задача 4. В воздушный конденсатор емкости C_0 вводят пластину с диэлектрической проницаемостью ε, как указано на рис. 1.38,*а*. Конденсатор какой емкости надо включить последовательно с данным, чтобы емкость батареи была равна C_0?

Дано: C_0, ε; C_x — ?

Решение. Считаем, что при внесении диэлектрической пластины силовые линии поля остаются параллельными друг другу и перпендикулярными пластинам конденсатора, т. е. в этом случае можно считать, что поляризация диэлектрика происходит таким образом, что поляризованный заряд равномерно распределяется по вертикальным боковым поверхностям диэлектрика. Тогда данный конденсатор можно представить как два конденсатора, соединенных последовательно, и к ним параллельно подключен еще один (рис. 1.38,*б*).

Емкость воздушного конденсатора $C_0 = \varepsilon_0 S/d$, где S — площадь пластин конденсатора, d — расстояние между пластинами. Емкость полученного конденсатора определим, как емкость батареи, изображенной на рис. 1.38,*б*, где

$$C_1 = \frac{\varepsilon_0 S/2}{d/2}; \quad C_2 = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon S/2}{d/2}; \quad C_3 = \frac{\varepsilon_0 S/2}{d}.$$

Согласно (1.32) и (1.35)

$$C_{\text{экв}} = C_{1,2} + C_3,$$

где $1/C_{1,2} = 1/C_1 + 1/C_2$,

$$C_{\text{экв}} = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} + C_3 = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon S}{d(\varepsilon + 1)} + \frac{\varepsilon_0 S}{2d} = \frac{(3\varepsilon + 1)}{2(\varepsilon + 1)} C_0.$$

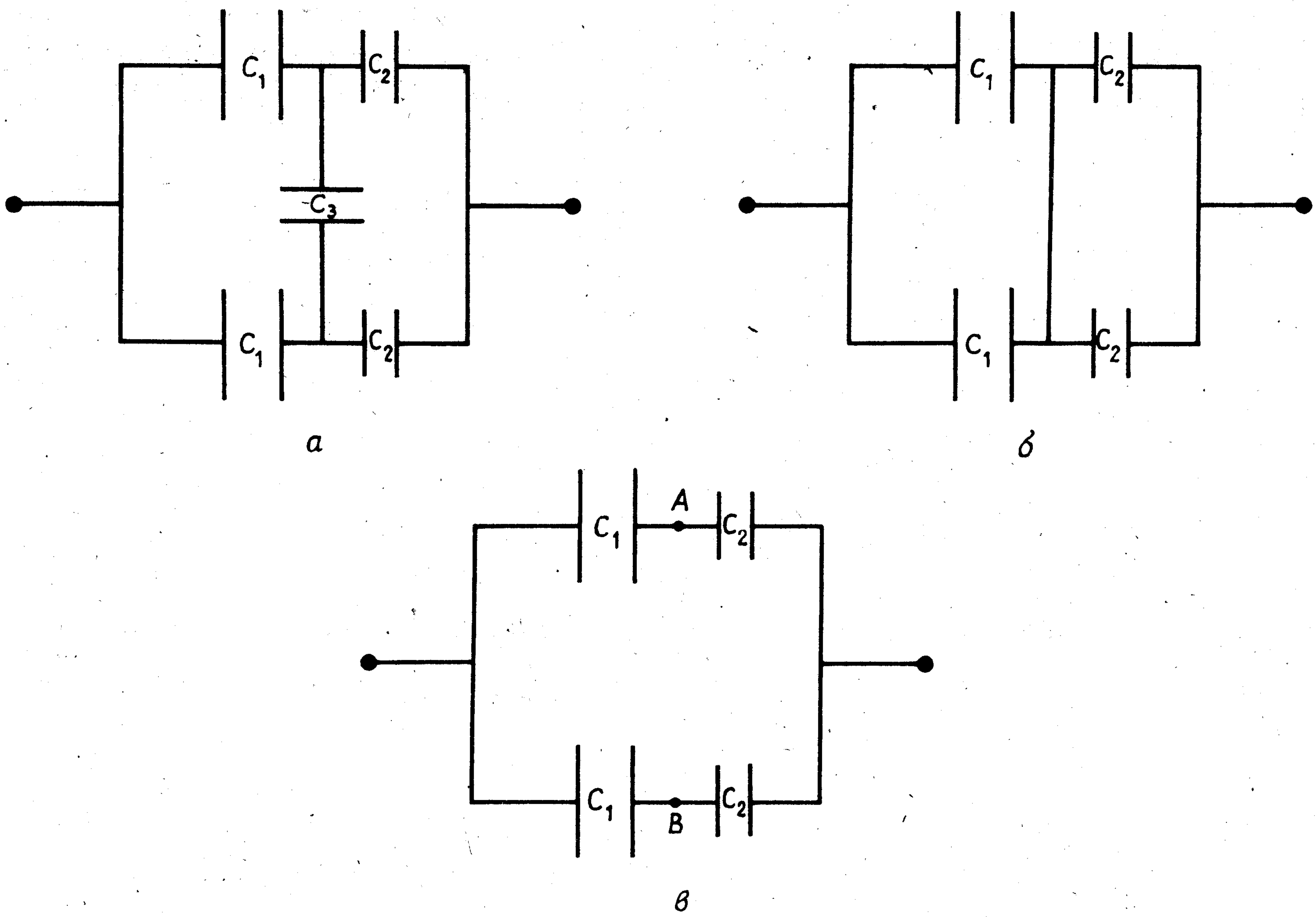


Рис. 1.39.

Если последовательно конденсатору емкостью $C_{\text{экв}}$ подключить конденсатор емкостью C_x, то по условию задачи емкость батареи должна быть равна C_0:

$$1/C_0 = 1/C_{\text{экв}} + 1/C_x,$$

откуда после выполнения необходимых преобразований получим

$$C_x = \frac{C_0 C_{\text{экв}}}{C_{\text{экв}} - C_0} = \frac{3\varepsilon + 1}{\varepsilon - 1} C_0.$$

Задача 5. Определить эквивалентную электрическую емкость в цепи, изображенной на рис. 1.39.

Дано: C_1, C_2, C_3; $C_{\text{экв}}$ — ?

Решение. Часто при решении задач, в которых требуется определить эквивалентную электрическую емкость, соединение конденсаторов не очевидно. В этом случае, если удается определить точки цепи, в которых потенциалы равны, то можно соединить эти точки или исключить конденсаторы, присоединенные к этим точкам, так как они не могут накапливать заряд ($\Delta\varphi = 0$) и, следовательно, не играют роли при распределении зарядов.

В приведенной на рис. 1.39 схеме нет очевидного параллельного или последовательного соединений конденсаторов, так как в общем случае $\varphi_A \neq \varphi_B$ и к электрическим емкостям C_1 приложены разные напряжения, так же как и к C_2. Однако заметим, что в силу симметрии и равенства емкостей соответствующих конденсаторов потенциалы точек A и B равны. Следовательно, можно, например, соединить точки A и B. Тогда схема преобразуется к виду, изображенному на рис. 1.39,*а*. Тогда конденсаторы с емкостями C_1, а также C_2 будут соединены параллельно и $C_{экв}$ определится по формуле

$$1/C_{экв} = 1/2C_1 + 1/2C_2,$$

откуда

$$C_{экв} = \frac{2C_1C_2}{C_1 + C_2}.$$

Можно также не учитывать присутствие в схеме конденсатора C_3, так как заряд на нем равен нулю. Тогда схема преобразуется к виду, изображенному на рис. 1.39,*б*. Конденсаторы C_1 и C_2 соединены последовательно, следовательно,

$$C'_{экв} = \frac{C_1C_2}{C_1 + C_2}.$$

Система конденсаторов с $C'_{экв}$ соединены параллельно, так что окончательно имеем

$$C_{экв} = 2C'_{экв} = \frac{2C_1C_2}{C_1 + C_2}.$$

Задача 6. Определить емкость воздушного сферического конденсатора. Радиусы сфер R_1, R_2.

Дано: R_1, R_2; C — ?

Решение. Предположим, что заряд внутренней сферы радиуса R_1 равен q, внешней радиуса R_2 – $(-|q|)$. Тогда потенциал внутренней сферы равен

$$\varphi_1 = \left(\frac{q}{R_1} - \frac{q}{R_2}\right)\frac{1}{4\pi\varepsilon_0},$$

потенциал внешней сферы

$$\varphi_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q}{R_1} - \frac{q}{R_2}\right) = 0.$$

Разность потенциалов $\varphi_1 - \varphi_2$ определится формулой

$$\varphi_1 - \varphi_2 = (q/4\pi\varepsilon_0)(1/R_1 - 1/R_2).$$

Воспользовавшись формулой (1.29), найдем

$$C = \frac{4\pi\varepsilon_0 R_1R_2}{R_2 - R_1}.$$

Задача 7. Найти заряд каждого конденсатора в цепи, показанной на рис. 1.40.

Дано: $C_1 = 4$ мкФ, $C_2 = 1$ мкФ, $C_3 = 3$ мкФ, $\mathcal{E} = 4$ В; q_1, q_2, q_3 — ?

Решение. Конденсаторы C_2 и C_3 соединены параллельно, поэтому

$$C'_{экв} = C_2 + C_3.$$

Конденсатор емкостью $C'_{экв}$ соединен с конденсатором C_1 последовательно, отсюда

$$1/C_{экв} = 1/C'_{экв} + 1/C_1,$$

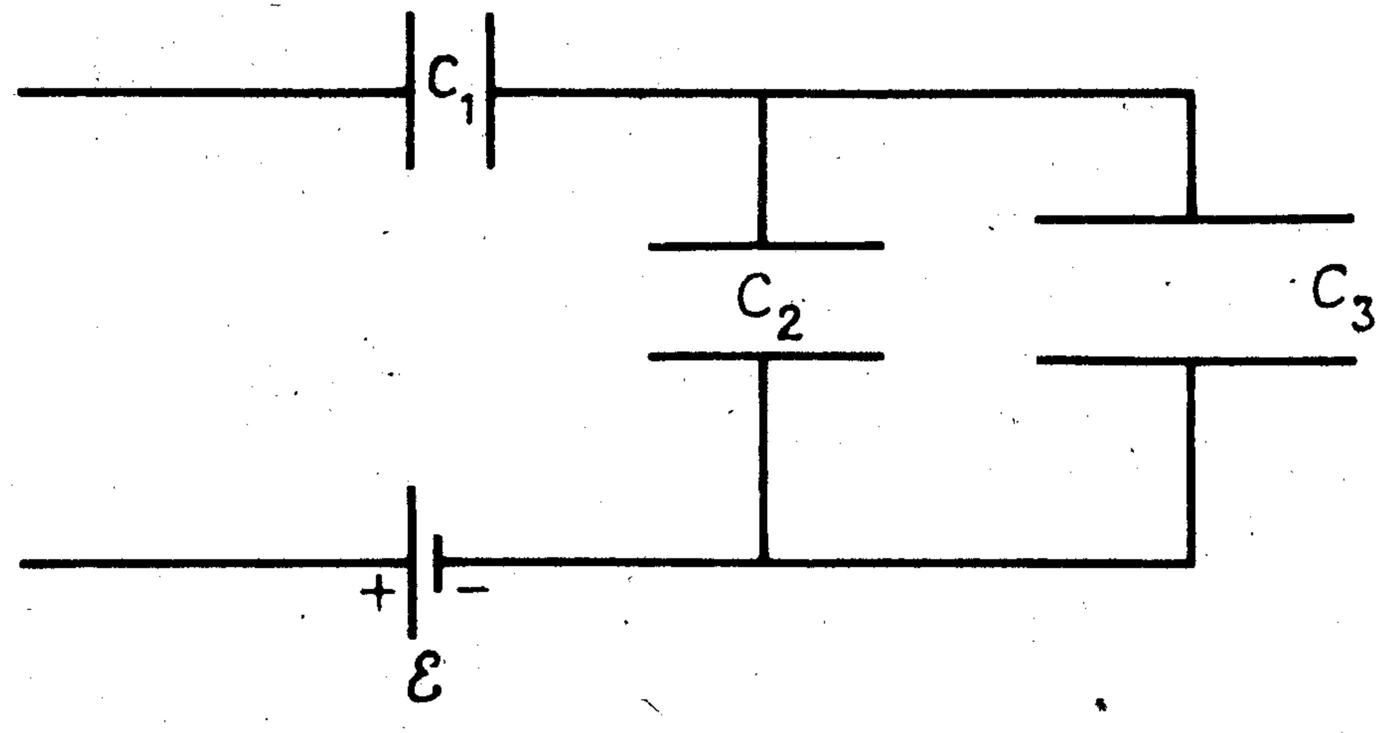


Рис. 1.40.

$$C_{\text{экв}} = \frac{C'_{\text{экв}} C_1}{C_1 + C'_{\text{экв}}} = \frac{(C_2 + C_3)C_1}{C_1 + C_2 + C_3}.$$

Суммарный заряд системы $q = C_{\text{экв}}\mathcal{E}$ и равен заряду конденсатора C_1, т. е. q_1. Такой же заряд распределяется между конденсаторами C_2 и C_3. Так как они соединены параллельно:

$$q_2/C_2 = q_3/C_3, \quad q_2 + q_3 = q,$$

$$q_1 = \frac{C_1(C_2 + C_3)\mathcal{E}}{C_1 + C_2 + C_3},$$

откуда

$$q_2 = \frac{q}{1 + C_3/C_2} = \frac{C_1 C_2 \mathcal{E}}{(C_1 + C_2 + C_3)},$$

$$q_3 = \frac{C_3 C_1 \mathcal{E}}{(C_1 + C_2 + C_3)}.$$

Подставляя числовые значения, получим

$$q_1 = \frac{4 \cdot 10^{-6} \cdot 4 \cdot 10^{-6} \cdot 4}{8 \cdot 10^{-6}}\,\text{Кл} = 8 \cdot 10^{-6}\,\text{Кл},$$

$$q_2 = \frac{4 \cdot 10^{-6} \cdot 4 \cdot 10^{-6} \cdot 1 \cdot 10^{-6} \cdot 4}{8 \cdot 10^{-6} \cdot 4 \cdot 10^{-6}}\,\text{Кл} = 2 \cdot 10^{-6}\,\text{Кл},$$

$$q_3 = \frac{3 \cdot 10^{-6} \cdot 4 \cdot 10^{-6} \cdot 4 \cdot 10^{-6} \cdot 4}{8 \cdot 10^{-6} \cdot 4 \cdot 10^{-6}}\,\text{Кл} = 6 \cdot 10^{-6}\,\text{Кл}.$$

Задача 8. Определите емкость системы конденсаторов, изображенной на рис. 1.41,*а*, если система подключается к схеме точками а) A, D, б) A, E.

Дано: C; $C'_{\text{экв}}$ — ? $C''_{\text{экв}}$ — ?

Решение. а) В данной системе ищем точки с равными потенциалами. В силу симметрии очевидно, что это будут точки B и E:

$$\varphi_B = \varphi_E.$$

Тогда эквивалентная схема имеет вид, показанный на рис. 1.41,*б*. Конденсатор C_5 можно исключить из схемы, $q_5 = 0$, конденсаторы C_1 и C_2, C_6 и C_4, попарно соединены последовательно и их эквивалентная емкость равна $C'_{\text{экв}} = C''_{\text{экв}} = C/2$. Два конденсатора с емкостями $C/2$ и конденсатор C_3 соединены параллельно, поэтому окончательно имеем $C_{\text{экв}} = C/2 + C/2 + C = 2C$.

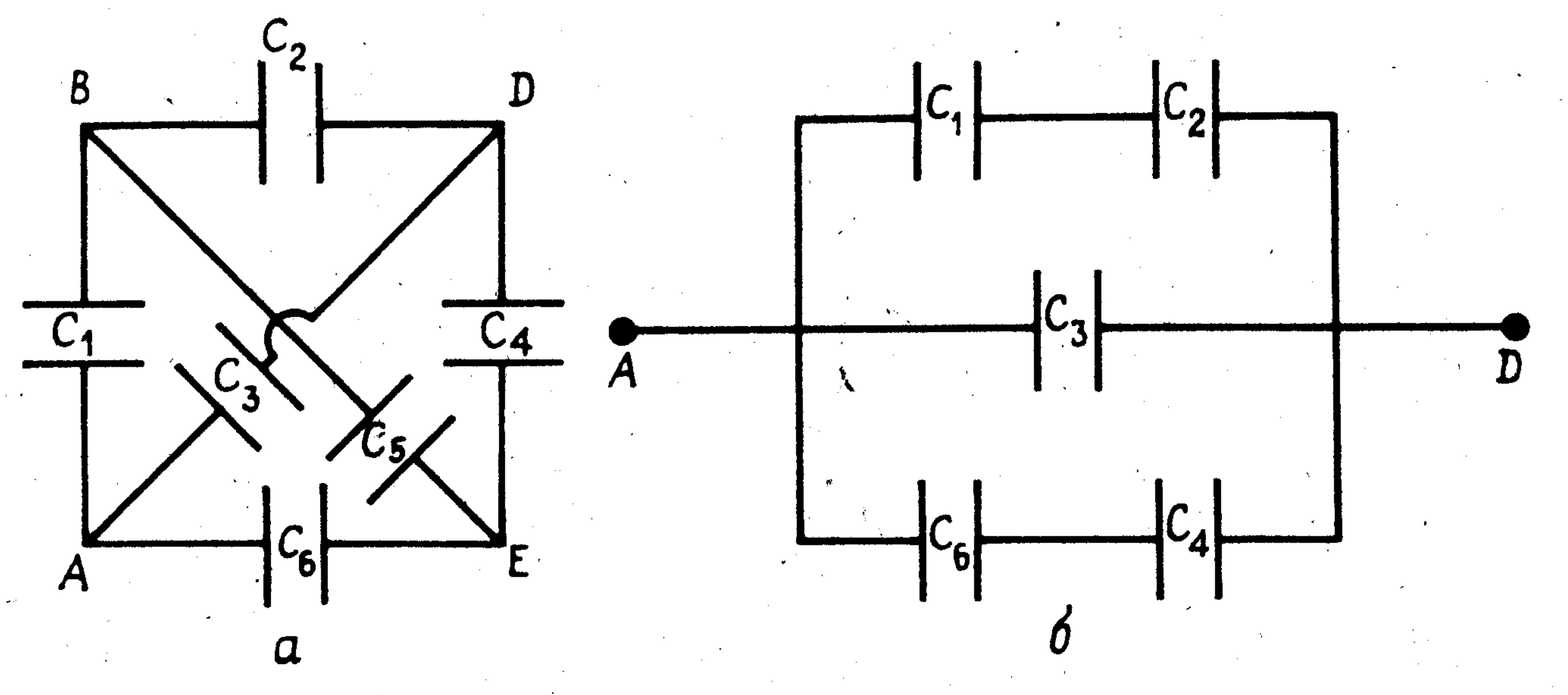


Рис. 1.41.

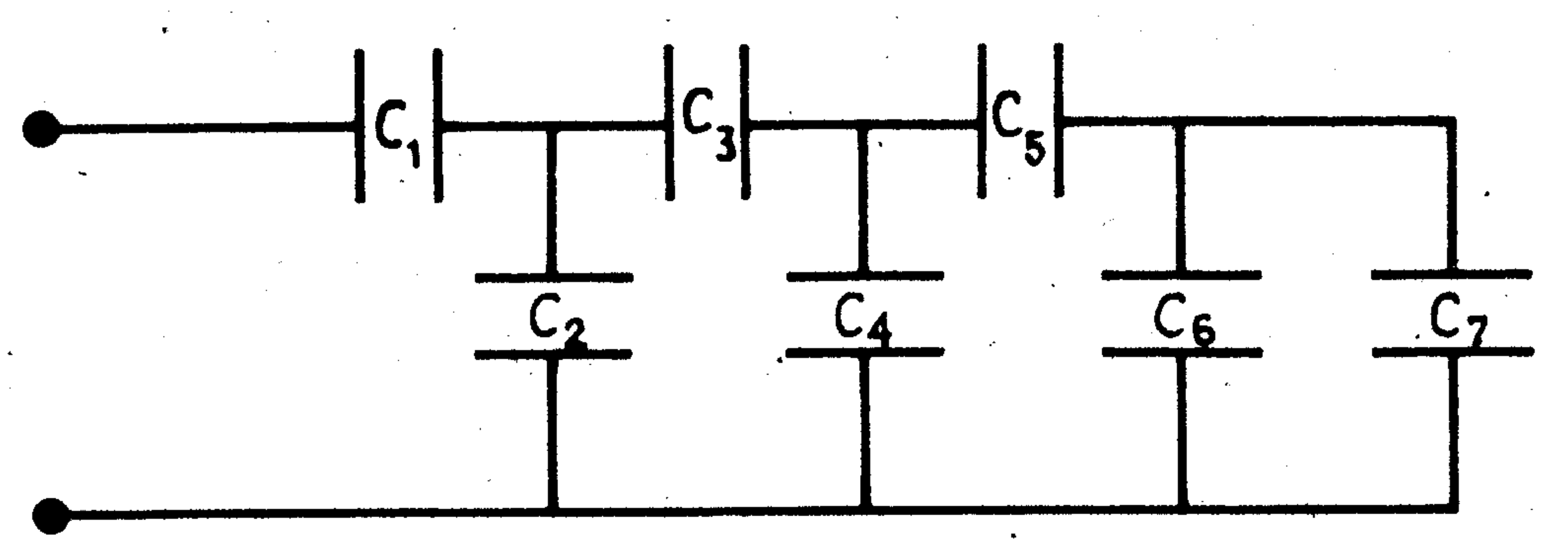


Рис. 1.42.

б) В этом случае точки B и D находятся под одним потенциалом, так как они через одинаковые емкости присоединены к точкам с потенциалами φ_A и φ_E. Эквивалентная схема совпадает со схемой, изображенной на рис. 1.41,*б* и в этом случае равна

$$C_{\text{экв}} = 2C.$$

Задача 9. Определить емкость системы, изображенной на рис. 1.42, если $C_1 = C_2 = C_3 = C_4 = C_5 = C, \quad C_6 = C_7 = C/2.$

Дано: C; $C_{\text{экв}}$ — ?

Решение. В схеме прежде всего всегда ищем очевидные соединения конденсаторов — последовательные или параллельные. Из рисунка очевидно, что конденсаторы C_6 и C_7 соединены параллельно и их эквивалентная емкость $C_{6,7} = C/2 + C/2 = C$. Конденсатор с емкостью $C_{6,7}$ соединен последовательно с конденсатором C_5.

Эквивалентная емкость конденсаторов $C_5 - C_7$ равна

$$1/C_{5,6,7} = 1/C_{6,7} + 1/C = 2/C,$$

$$C_{5,6,7} = C/2.$$

Система конденсаторов $C_5 - C_7$ соединена с конденсатором C_4 параллельно и эквивалентная емкость $C_4 - C_7$:

$$C_{4,5,6,7} = C/2 + C = (3/2)C.$$

Дальнейшие аналогичные вычисления дают

$$C_{\text{экв}} = (8/13)C.$$

Энергия электрического поля

Если проводник заряжен, то для увеличения его заряда внешние силы должны совершить положительную работу. Работа совершается против сил кулоновского поля. Энергия заряженного проводника при этом увеличивается. Энергия заряженного проводника равна

$$W = q\varphi/2, \tag{1.38}$$

где q — заряд проводника, φ — его потенциал.

Энергия конденсатора также увеличивается с увеличением заряда на его пластинах. Пусть две пластины плоского конденсатора находятся на расстоянии d_1 друг от друга. Заряд на пластинах q, площадь пластин S. Пластины притягиваются друг к другу с силой $F = qE_1$, где E_1 — напряженность электрического поля одной из пластин, $E_1 = \sigma/2\varepsilon_0$, σ — поверхностная плотность заряда, $\sigma = q/S$. Для увеличения расстояния между пластинами до d_2 необходимо, чтобы внешние силы совершили работу

$$A = F_{\text{вн}}(d_2 - d_1), \quad F_{\text{вн}} = F,$$

$$A = q(\sigma/2\varepsilon_0)(d_2 - d_1) = (q_2/2\varepsilon_0 S)(d_2 - d_1).$$

Исходная емкость конденсатора была равна $C_1 = \varepsilon_0 S/d_1$, а после увеличения расстояния между пластинами до d_2 стала $C_2 = \varepsilon_0 S/d_2$, отсюда получим выражение для работы внешней силы

$$A = \frac{q^2}{2C_2} - \frac{q^2}{2C_1}.$$

Положительная работа, внешней силы привела к изменению величины $q^2/2C$, которая определяет энергию электрического поля конденсатора:

$$W = q^2/2C, \tag{1.39}$$

или

$$W = CU^2/2. \tag{1.40}$$

Если конденсатор отключен от источника, то заряд будет постоянным и удобно пользоваться формулой (1.39); если конденсатор подключен к источнику, то постоянной будет разность потенциалов и удобно использовать формулу (1.40).

Примеры решения задач

Задача 1. Энергия плоского воздушного конденсатора $W_1 = 2 \cdot 10^{-7}$ Дж. Определить энергию конденсатора после заполнения его диэлектриком с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon = 2$, если

1) конденсатор отключен от источника питания;

2) конденсатор подключен к источнику питания.

Дано: $\varepsilon = 2$, $W_1 = 2 \cdot 10^{-7}$ Дж; W_2 — ?

Решение. 1) Найдем энергию конденсатора после его заполнения диэлектриком в первом случае по формуле (1.39):

$$W_2 = q_0^2/2C_2,$$

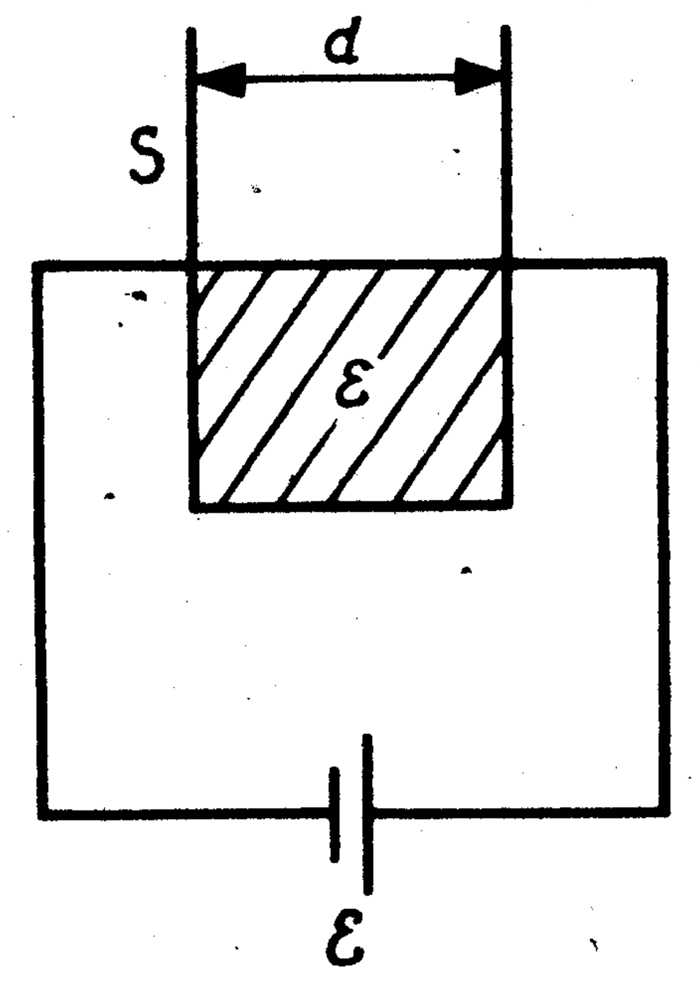


Рис. 1.43.

где q_0 — заряд конденсатора, который не изменился при его заполнении диэлектриком,

$$C_2 = \varepsilon_0 \varepsilon S/d = \varepsilon C_1,$$

где $C_1 = \varepsilon_0 S/d$ — емкость воздушного конденсатора. Тогда

$$W_2 = q_0^2/2\varepsilon C_1 = W_1/\varepsilon,$$

$$W_2 = \frac{2 \cdot 10^{-7}}{2} \text{Дж} = 10^{-7}\,\text{Дж}.$$

2) Так как конденсатор подключен к источнику питания, энергию после его заполнения диэлектриком определим по формуле (1.40):

$$W_2 = C_2 U_0^2/2,$$

где U_0 — напряжение на конденсаторе, которое остается неизменным. Поскольку $C_2 = \varepsilon C_1$

$$W_2 = \varepsilon C_1 U_0^2/2 = \varepsilon W_1.$$

Окончательно,

$$W_2 = 2 \cdot 2 \cdot 10^{-7}\,\text{Дж} = 4 \cdot 10^{-7}\,\text{Дж}.$$

Задача 2. Пластины плоского конденсатора подключены к источнику с $\mathcal{E} = 2$ В. Определите изменение емкости и энергии электрического поля конденсатора, если конденсатор наполовину заполнен диэлектриком с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon = 2$. Расстояние между пластинами $d = 1$ см, площадь пластин $S = 50\,\text{см}^2$.

Дано: $d = 1$ см (0,01 м), $S = 50\,\text{см}^2$ $(5 \cdot 10^{-3}\,\text{м}^2)$, $\varepsilon = 2$, $\mathcal{E} = 2$ В; ΔC — ? ΔW — ?

Решение. Для того, чтобы определить емкость конденсатора, заполненного диэлектриком так, как показано на рисунке (рис. 1.43), можно представить его как два параллельно соединенных конденсатора с площадью пластин $S' = S/2$, один из которых заполнен диэлектриком. Емкость первого конденсатора

$$C_1 = \varepsilon_0 S'/d = \varepsilon_0 S/2d,$$

второго

$$C_2 = \varepsilon_0 \varepsilon S/2d.$$

Емкость наполовину заполненного диэлектриком конденсатора равна

$$C = C_1 + C_2 = (\varepsilon_0 S/2d)(\varepsilon + 1).$$

Изменение емкости

$$\Delta C = C - C_0 = (\varepsilon_0 S/2d)(\varepsilon + 1) - \varepsilon_0 S/d = (\varepsilon_0 S/2d)(\varepsilon - 1),$$

где $C_0 = \varepsilon_0 S/d$. Так как $\varepsilon > 1$, то $\Delta C > 0$, т. е. емкость конденсатора увеличивается. Изменение энергии удобно определить по формуле (1.40), так как разность потенциалов между обкладками постоянна и равна $\mathcal{E}$:

$$\Delta W = C\mathcal{E}^2/2 - C_0\mathcal{E}^2/2 = \Delta C\mathcal{E}^2/2,$$

$$\Delta W = (\varepsilon_0 S/2d)(\varepsilon - 1)\mathcal{E}^2/2 = \varepsilon_0 S(\varepsilon - 1)\mathcal{E}^2/4d, \quad \mathcal{E}^2 > 0.$$

Энергия электрического поля конденсатора увеличилась. При внесении диэлектрика в электрическое поле конденсатора происходит поляризация диэлектрика, поле ослабляется, однако, благодаря источнику заряд на пластинах увеличивается и, соответственно, напряжение остается прежним. Увеличение энергии электрического поля происходит за счет работы источника:

$$\Delta C = \frac{8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 1 \cdot 5 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 0,01}\,\Phi = 2,21 \cdot 10^{-12}\,\Phi,$$

$$\Delta W = \frac{2 \cdot 5 \cdot 10^{-3} \cdot 4 \cdot 8,85 \cdot 10^{-12}}{4 \cdot 0,01}\,\text{Дж} = 8,85 \cdot 10^{-12}\,\text{Дж}.$$

Задача 3. В плоский воздушный конденсатор вставляется металлическая пластина толщиной d_0. Заряд на обкладках конденсатора q. Конденсатор отключен от источника. Расстояние между пластинами d, площадь пластин S. Определите изменение емкости конденсатора и энергии его электрического поля.

Дано: q, d_0, d, S; ΔC — ? ΔW — ?

Решение. На металлической пластине индуцируется заряд, причем внутри пластины поле отсутствует. Конденсатор с вставленной пластиной можно представить как два последовательно соединенных конденсатора с емкостями

$$C_1 = \varepsilon_0 S/l_1, \quad C_2 = \varepsilon_0 S/l_2,$$

где l_1 и l_2 — расстояния от обкладок до металлической пластины (рис. 1.44,*а,б*). Эквивалентная емкость равна

$$1/C_{\text{экв}} = 1/C_1 + 1/C_2 = l_1/\varepsilon_0 S + l_2/\varepsilon_0 S = (l_1 + l_2)/\varepsilon_0 S,$$

$$l_1 + l_2 = d - d_0,$$

$$C_{\text{экв}} = \varepsilon_0 S/(d - d_0).$$

Изменение

$$\Delta C = C_{\text{экв}} - C_0 = \varepsilon_0 S/(d - d_0) - \varepsilon_0 S/d = \varepsilon_0 S d_0/(d - d_0)d > 0.$$

Электроемкость конденсатора не зависит от локализации пластины. Изменение энергии электрического поля

$$\Delta W = W_2 - W_1,$$

$$\Delta W = \frac{q^2}{2C_{\text{экв}}} - \frac{q^2}{2C_0} = \frac{q^2}{2}\left(\frac{d - d_0}{\varepsilon_0 S} - \frac{d}{\varepsilon_0 S}\right) = \frac{-q^2 d_0}{2\varepsilon_0 S} < 0.$$

Энергия электрического поля уменьшилась, так как уменьшается объем, в котором создается поле, напряженность же поля в пространстве между пластинами остается прежней.

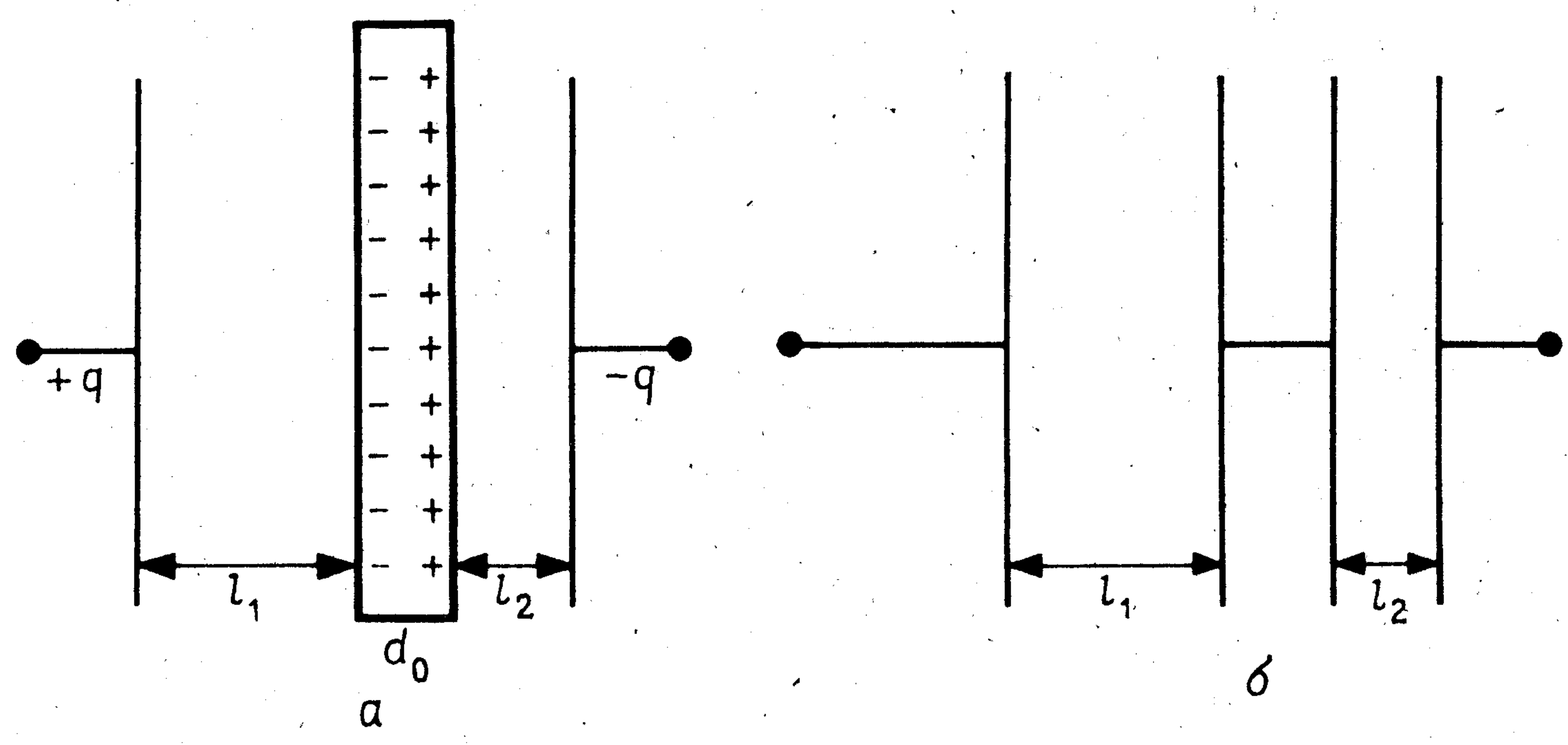


Рис. 1.44.

Задачи для самостоятельного решения

Задача 1. Два маленьких шарика одинаковой массы, которым сообщили одинаковые заряды $q = 9 \cdot 10^{-7}$ Кл, подвешены в воздухе на нитях длиной 1 м. Нити разошлись на угол 60°. Определить массы шариков.

Ответ: $m = 1,2 \cdot 10^{-3}$ кг.

Задача 2. Электрон в атоме водорода движется по орбите радиуса $r_1 = 0,5 \cdot 10^{-10}$ м (первая боровская орбита). Какую энергию ΔW должен поглотить атом, чтобы электрон перешел на вторую боровскую орбиту $r_2 = r_1 2^2 = 4r_1$?

Ответ: $\Delta W = 0,16 \cdot 10^{-17}$ Дж.

Задача 3. Расстояние между зарядами $q_1 = 10^{-8}$ Кл и $q_2 = -10^{-8}$ Кл равно 20 см. Определите напряженность E в точке, в которой потенциал равен нулю, если точка лежит на прямой, соединяющей заряды.

Ответ: $E = 18 \cdot 10^3$ В/м.

Задача 4. Какое расстояние d пройдет электрон вдоль силовой линии однородного электрического поля напряженностью $E = 100$ В/м до момента, когда его скорость станет равной нулю, если начальная скорость электрона $v = 10^5$ м/с?

Ответ: $d = 2,8 \cdot 10^{-4}$ м.

Задача 5. Проводящий шар радиусом 10 см заряжен до потенциала 900 В. Определить работу A поля при перемещении заряда -10^{-7} Кл из точки, находящейся на расстоянии 90 см от поверхности шара, к точке вблизи его поверхности.

Ответ: $A = 8,1 \cdot 10^{-5}$ Дж.

Задача 6. Железный шар радиусом 1 см помещен в керосин, плотность которого 800 кг/м^3. Заряд шара 10^{-5} Кл. Чему равна напряженность E однородного электрического поля, если шар плавает в керосине. Плотность железа 7800 кг/м^3.

Ответ: $E = 2,93 \cdot 10^3$ В/м.

Задача 7. Точечные одинаковые заряды q расположены в вершинах равностороннего треугольника со стороной a. Какова потенциальная энергия W этой системы.

Ответ: $W = 3q^2/4\pi\varepsilon_0 a$.

Задача 8. Проводящую сферу радиуса r_0, потенциал которой φ_0, окружают незаряженной сферической оболочкой радиуса r и соединяют с ней. Найти потенциал сферы φ после соединения.

Ответ: $\varphi = \varphi_0 r_0 / r$.

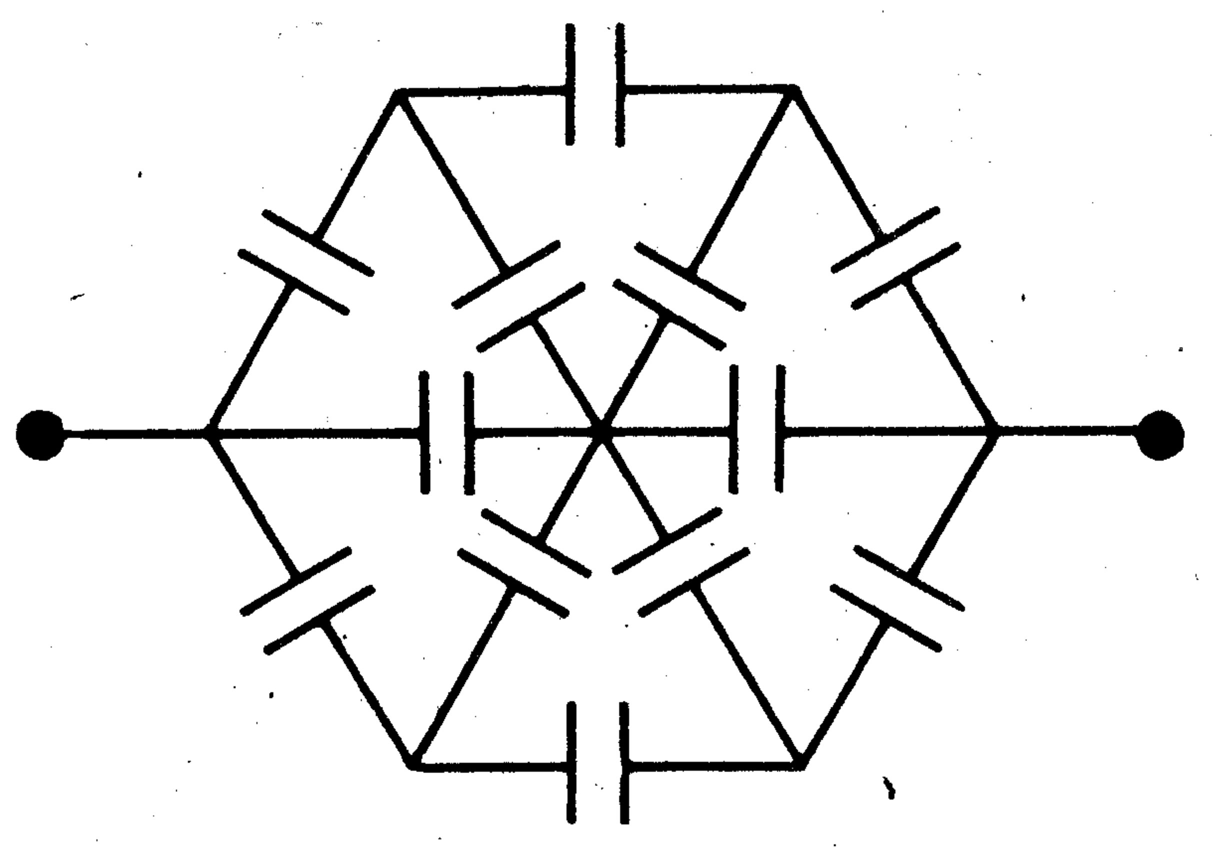


Рис. 1.45.

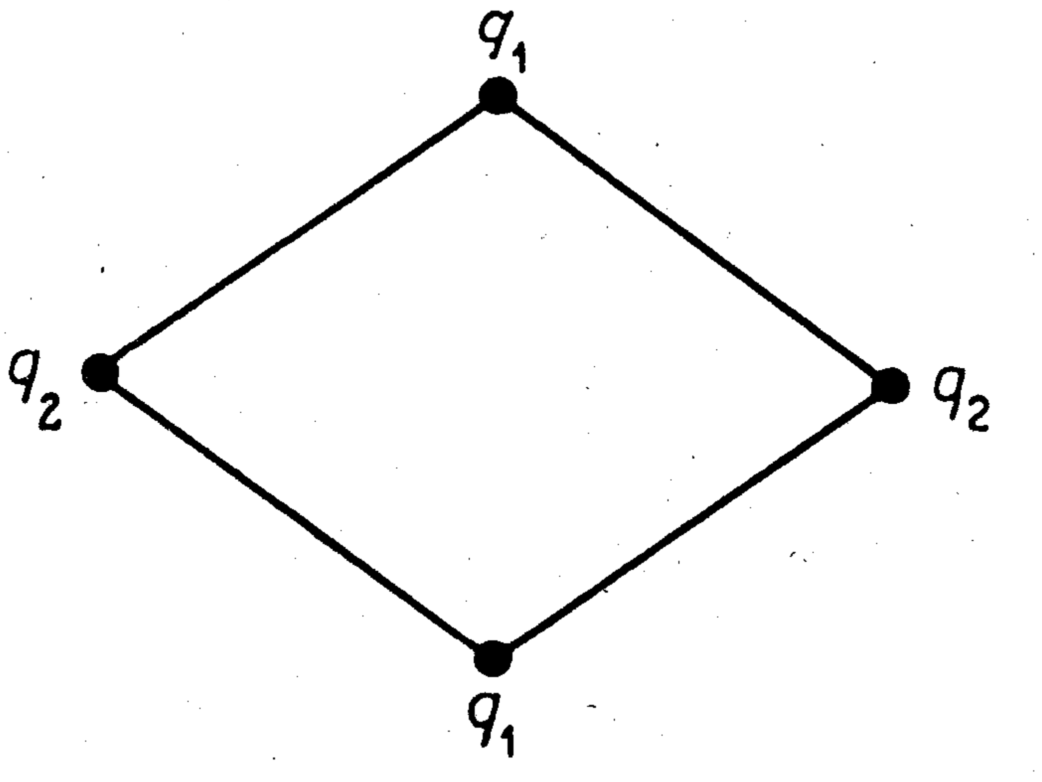


Рис. 1.46.

Задача 9. Мыльному пузырю сообщается заряд, вследствие чего его радиус увеличивается втрое. Определить изменение энергии заряда, находящегося на пузыре, при увеличении его радиуса.

Ответ: уменьшается в 3 раза.

Задача 10. Имеются два одинаковых конденсатора переменной емкости с диапазоном от 10^{-6} Ф до $6 \cdot 10^{-6}$ Ф. Каков будет диапазон емкости батареи при соединении конденсаторов а) параллельно, б) последовательно?

Ответ: а) $5 \cdot 10^{-7}\,\Phi \le C' \le 3 \cdot 10^{-6}\,\Phi$, б) $2 \cdot 10^{-6}\,\Phi \le C'' \le 1,2 \cdot 10^{-5}\,\Phi$.

Задача 11. Два конденсатора с одинаковыми емкостями $3 \cdot 10^{-6}$ Ф соединили параллельно и, зарядив до разности потенциалов 100 В , отключили от источника. Потом увеличили расстояние между обкладками одного из них в два раза. Как изменится заряд q на обкладках конденсатора?

Ответ: $\Delta q = 10^{-4}$ Кл.

Задача 12. Определить эквивалентную емкость $C_{\text{экв}}$ конденсаторов, подключенных по схеме, приведенной на (рис. 1.45). Электрические емкости всех конденсаторов равны C.

Ответ: $C_{\text{экв}} = (5/4)C$.

Задача 13. В вершинах равностороннего треугольника со стороной 1 см находятся 3 электрона. Определить скорость v электронов при увеличении расстояния между ними до 2 см.

Ответ: $v = 1,6 \cdot 10^2$ м/с.

Задача 14. Четыре отрицательно заряженных тела связаны нитями, каждая длиной l (рис. 1.46). Определить силы натяжения $F_{\text{н}}$ нитей между зарядами q_1 и q_2, причем $q_1 = 2q_2$.

Ответ: $F_{\text{н}} = (q_2^2/4\sqrt{3}\pi\varepsilon_0 l^2)(1/3 + 4\sqrt{3})$.

Глава 2
Постоянный электрический ток

Ток — это направленное движение заряженных частиц. В металлах носителями тока являются свободные электроны, в электролитах — отрицательные и положительные ионы, в полупроводниках — электроны и дырки, в газах — ионы и электроны. Количественной характеристикой тока является сила тока. ***Сила тока*** I определяется количеством электричества, протекающего через поперечное сечение проводника за 1 с. Если I — постоянная величина, то

$$I = q/t, \tag{2.1}$$

откуда следует, что за промежуток времени t через поперечное сечение проводника протекает количество электричества, равное

$$q = It.$$

Если сила тока изменяется со временем, то

$$I = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta t} = q'.$$

Пусть сила тока изменяется по закону, изображенному на рис. 2.1,*а*, тогда, разбивая промежуток времени на N малых интервалов Δt_i, в пределах каждого из которых сила тока I_i постоянна, можно определить количество электричества q:

$$q = \sum_{i=1}^{N} I_i \Delta t_i,$$

т. е. количество электричества, протекшее через поперечное сечение проводника за промежуток времени t, численно равно площади криволинейной трапеции.

В металлах носителями тока являются электроны, которые в отсутствие внешнего электрического поля движутся хаотически, подобно молекулам газа.

Согласно классической электронной теории металлов, при наложении внешнего электрического поля электроны начинают двигаться направленно, однако скорость хаотического теплового движения $v_т$ больше, чем скорость направленного $v_н$ ($v_н \ll v_т$). Пусть концентрация свободных электронов в проводнике n_e, заряд их q_e. За промежуток времени Δt через поперечное сечение проводника (рис. 2.1,*б*) пройдет N электронов:

$$N = n_e v_н \Delta t S,$$

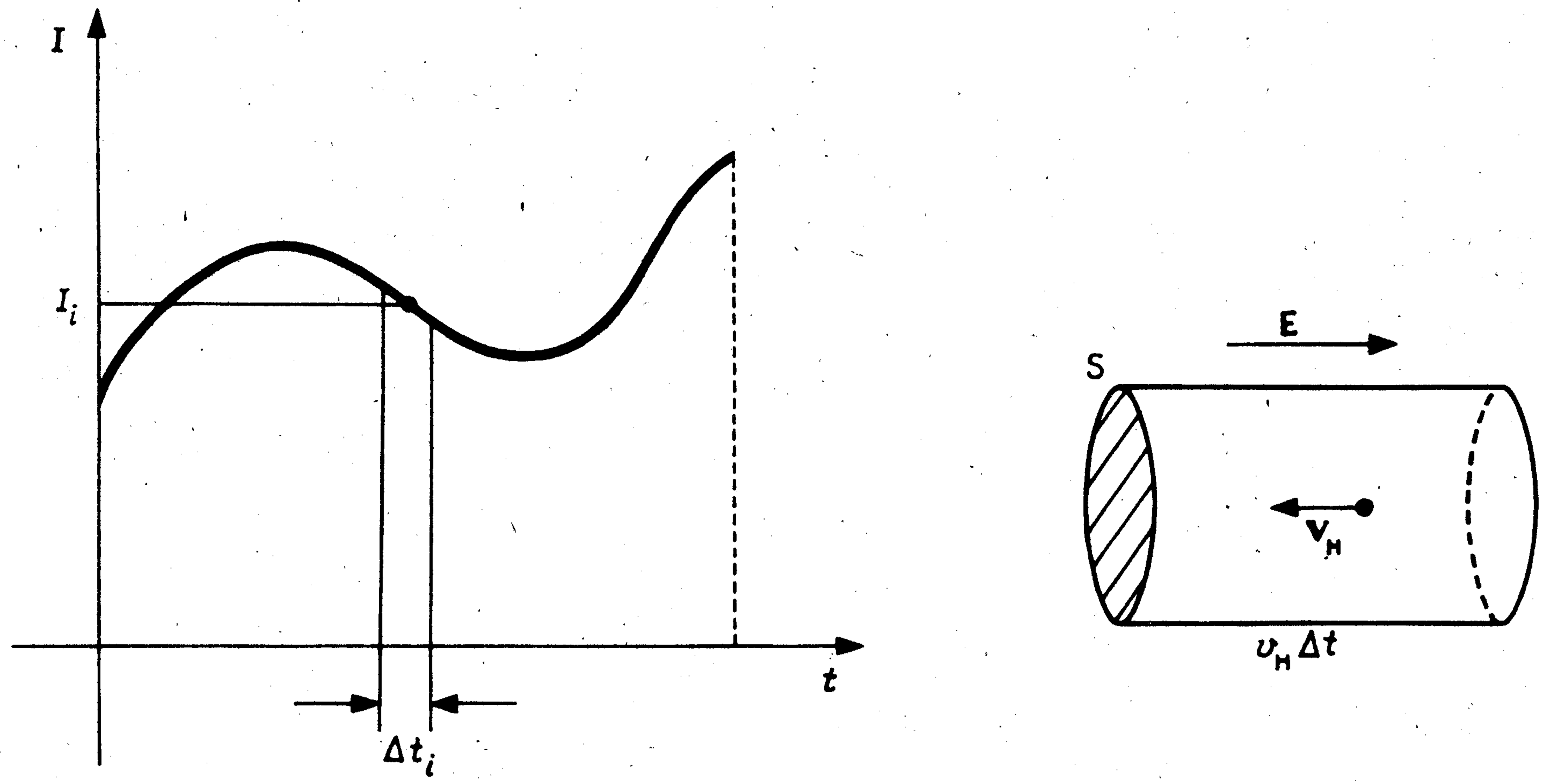


Рис. 2.1.

где S — поперечное сечение проводника. Количество электричества, прошедшее за время Δt через сечение S, равно

$$\Delta q = q_e n_e v_{н} S \Delta t,$$

откуда сила тока равна

$$I = \Delta q / \Delta t = q_e n_e v_{н} S. \tag{2.2}$$

Законы постоянного тока

Закон Ома для однородного участка цепи

Если к проводнику приложить разность потенциалов $\varphi_1 - \varphi_2$, то по проводнику потечет электрический ток. Сила тока прямо пропорциональна разности потенциалов (напряжению) на концах проводника, т. е.

$$(\varphi_1 - \varphi_2)/I = \mathrm{const}, \tag{2.3}$$

$$\varphi_1 - \varphi_2 = U, \quad U/I = R,$$

где R — *омическое* (активное) *сопротивление*. Сопротивление R зависит от свойств проводника и от его геометрических размеров:

$$R = \rho l / S, \tag{2.4}$$

где ρ — *удельное сопротивление*, т. е. сопротивление проводника длиной 1 м с единичной площадью поперечного сечения, l — длина проводника, S — площадь поперечного сечения.

Сопротивление зависит от температуры, при увеличении температуры увеличивается вероятность столкновения электронов с колеблющимися ионами кристаллической решетки, так как с ростом температуры амплитуда колебаний увеличивается. Сталкиваясь с ионами, электроны теряют скорость направленного движения ($v_{н} = 0$). Удельное сопротивление зависит от температуры:

$$\rho = \rho_0 (1 + \alpha t^\circ\mathrm{C}), \tag{2.5}$$

где ρ_0 — удельное сопротивление при 0°C, α — термический коэффициент сопротивления, зависящий от свойств проводника. Размерность удельного сопротивления Ом · м. Удельное сопротивление, например, медной проволоки $\rho = 1{,}7 \cdot 10^{-8}$ Ом · м $= 1{,}7 \cdot 10^{-2}$ Ом · мм^2/м, таким сопротивлением обладает проволока длиной 1 м и площадью поперечного сечения 1мм^2. За направление электрического тока принято направление движения положительных зарядов. Поэтому ток течет от большего потенциала к меньшему. Произведение силы тока на сопротивление иногда называется *падением напряжения*

$$U = IR.$$

Последовательное и параллельное соединение сопротивлений

На рис. 2.2 изображены три последовательно соединенных сопротивления R_1, R_2, R_3. Найти *эквивалентное сопротивление* — это значит найти такое сопротивление $R_{\text{экв}}$, которое при той же разности потенциалов $\varphi_A - \varphi_B$ пропускает тот же ток I, что и три сопротивления:

$$\varphi_A - \varphi_B = IR_{\text{экв}}.$$

Сила тока, текущего через последовательно соединенные сопротивления, одинакова. Разность потенциалов $\varphi_A - \varphi_B$ равна сумме падений напряжений на сопротивлениях R_1, R_2, R_3:

$$\varphi_A - \varphi_B = IR_1 + IR_2 + IR_3,$$

следовательно,

$$R_{\text{экв}} = R_1 + R_2 + R_3,$$

или в общем случае при соединении n сопротивлений

$$R_{\text{экв}} = \sum_{i=1}^{n} R_i. \tag{2.6}$$

При параллельном соединении (рис. 2.3) все сопротивления находятся под одной разностью потенциалов, но токи, текущие через разные сопротивления, будут различны. Ток, текущий через эквивалентное сопротивление, должен быть равен сумме токов, текущих через R_1, R_2, R_3:

$$I = I_1 + I_2 + I_3. \tag{2.7}$$

Из (2.3) и (2.7) следует:

$$\frac{\varphi_A - \varphi_B}{R_{\text{экв}}} = \frac{\varphi_A - \varphi_B}{R_1} + \frac{\varphi_A - \varphi_B}{R_2} + \frac{\varphi_A - \varphi_B}{R_3},$$

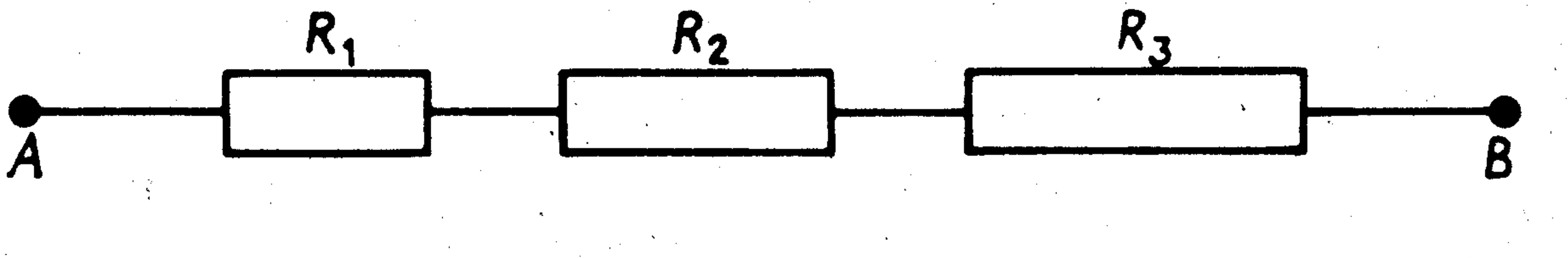


Рис. 2.2.

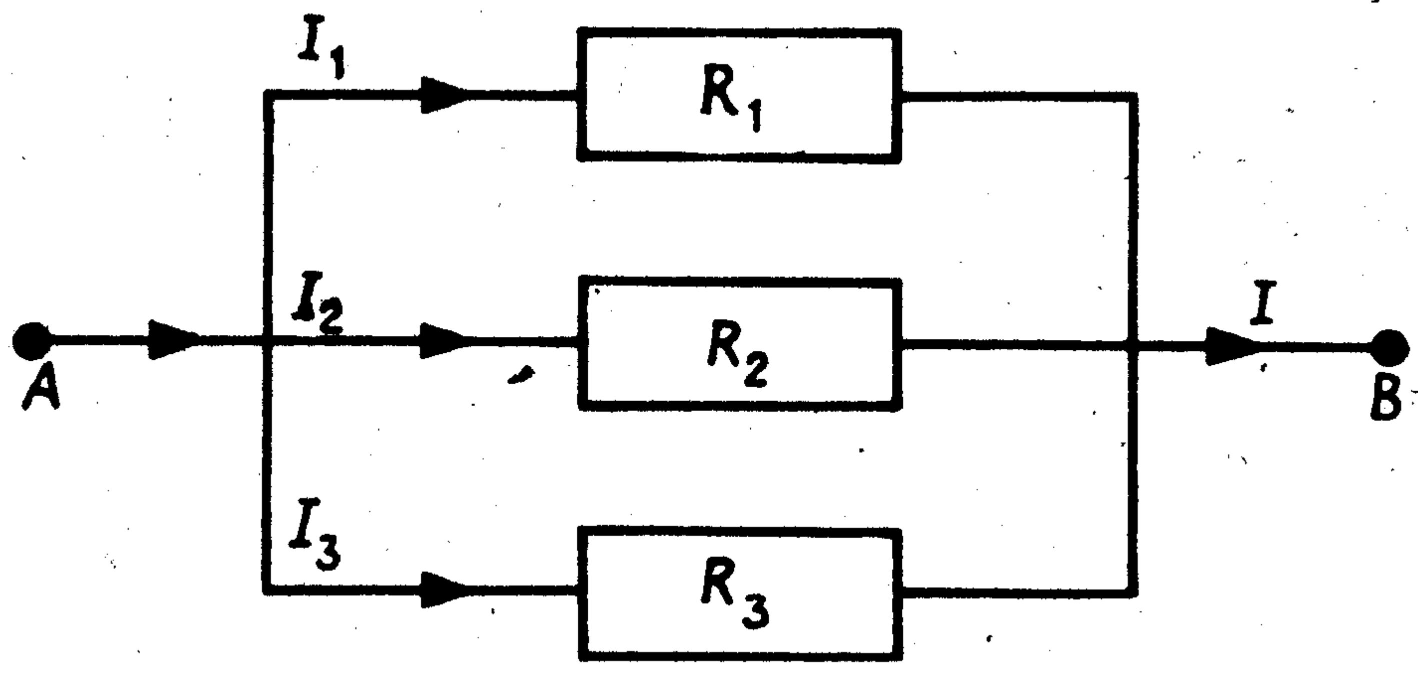


Рис. 2.3.

или

$$\frac{1}{R_{\text{экв}}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}.$$

В общем случае при параллельном соединении n сопротивлений

$$\frac{1}{R_{\text{экв}}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{R_i}. \tag{2.8}$$

Видно, что формулы (2.6) и (2.7) обратны формулам для определения эквивалентной емкости.

Шунтирование приборов

Сила тока в цепи измеряется амперметром. Сопротивление амперметра мало, так как он включается в цепь последовательно и не должен существенно повлиять на значение силы тока в цепи.

Если сила тока I в цепи больше, чем максимальное значение силы тока, которую может измерить амперметр $I_{A\max}$, то к амперметру параллельно подключают шунт, так что часть тока $I_{\text{ш}}$ начинает течь через шунт. Для существенного увеличения диапазона измерения необходимо, чтобы сопротивление шунта было много меньше сопротивления амперметра. Итак,

$$I = I_{A\max} + I_{\text{ш}}. \tag{2.9}$$

Падения напряжения на сопротивлениях амперметра и шунта одинаковы (параллельное включение, рис. 2.4,*а*), поэтому

$$I_{A\max} R_A = I_{\text{ш}} R_{\text{ш}},$$

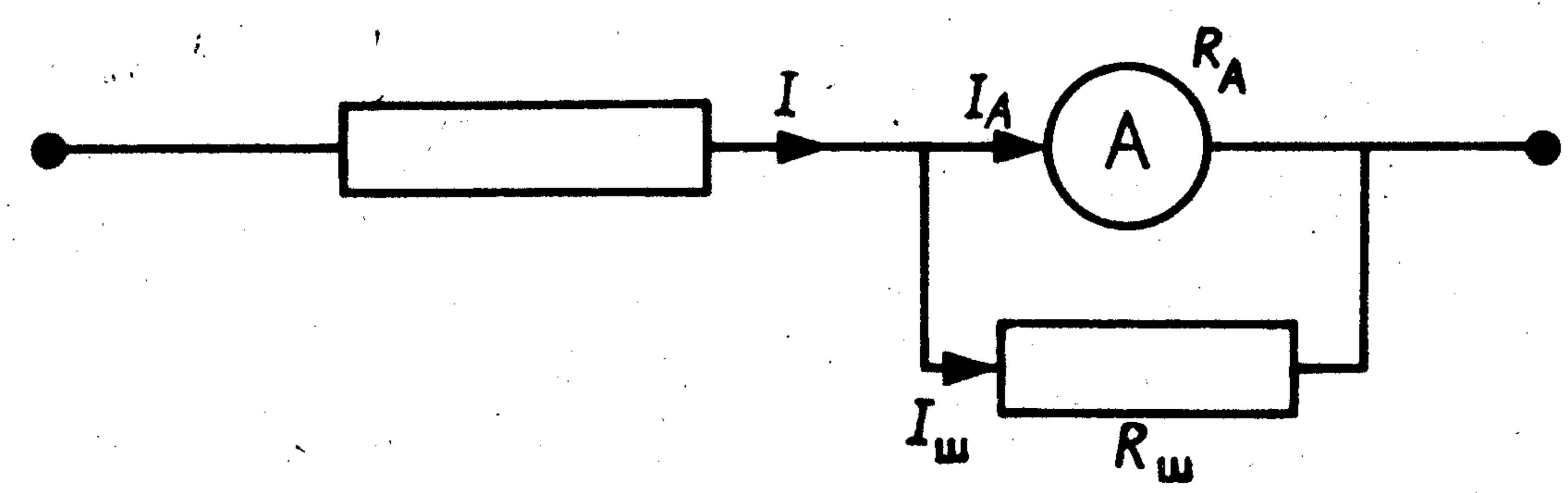
$$I_{\text{ш}} = I_{A\max}(R_A/R_{\text{ш}}).$$

Подставив в (2.9) выражение для $I_{\text{ш}}$, получим

$$I = I_{A\max}\left(1 + \frac{R_A}{R_{\text{ш}}}\right),$$

$$\frac{I}{I_{A\max}} = 1 + \frac{R_A}{R_{\text{ш}}}.$$

Если необходимо измерить силу тока, в n раз большую, чем можно измерить



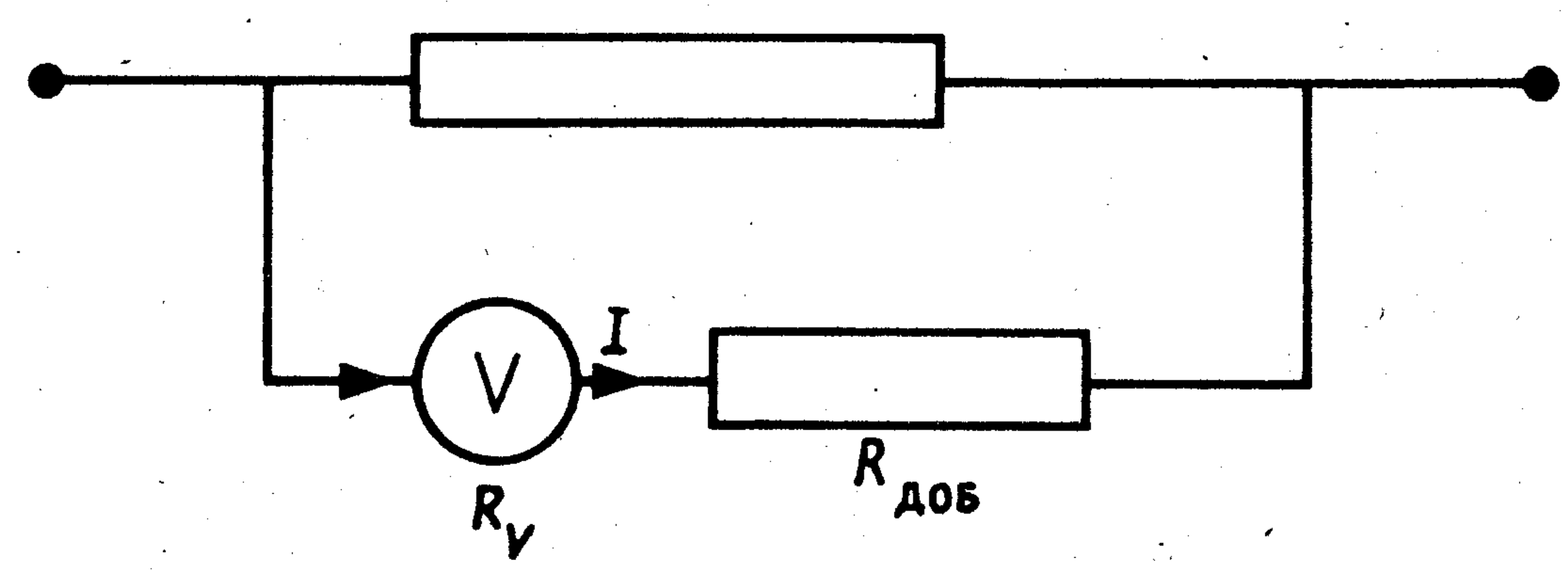


Рис. 2.4.

данным амперметром, т. е. $I/I_A = n$, то следует подключить шунт с сопротивлением

$$R_ш = R_A/(n-1). \tag{2.9$'$}$$

Напряжение на различных участках цепи измеряется вольтметром, который подключается параллельно. Показания вольтметра определяются падением напряжения на сопротивлении вольтметра $U_V = I_V R_V$ и равны падению напряжения на сопротивлении R. Если измеряемое напряжение больше, чем максимальное напряжение, которое может измерить данный вольтметр ($U > U_{V\max}$), то к вольтметру последовательно подключают добавочное сопротивление $R_{доб}$. Тогда $U = U_{V\max} + U_{доб}$. Токи, текущие через вольтметр и добавочное сопротивление, одинаковы (последовательное соединение, рис. 2.4,*б*)

$$I_V = I_{доб}, \quad \text{т. е.} \quad \frac{U_{V\max}}{R_V} = \frac{U_{доб}}{R_{доб}},$$

откуда

$$U_{доб} = \frac{R_{доб}}{R_V} U_{V\max},$$

$$U = U_{V\max}\left(1 + \frac{R_{доб}}{R_V}\right). \tag{2.10}$$

Чтобы расширить диапазон измерения вольтметра, необходимо, чтобы

$$R_{доб} \gg R_V.$$

Если нужно измерить напряжение, в n раз большее, чем то напряжение, которое может измерить данный вольтметр, т. е. $n = U/U_{V\max}$, то необходимо подключить добавочное сопротивление

$$R_{доб} = (n-1)R_V.$$

Электродвижущая сила. Закон Ома для полной цепи

Для поддержания постоянного электрического тока в цепи необходимо подключить источник. При этом очевидно, что кулоновские силы не могут поддержи-

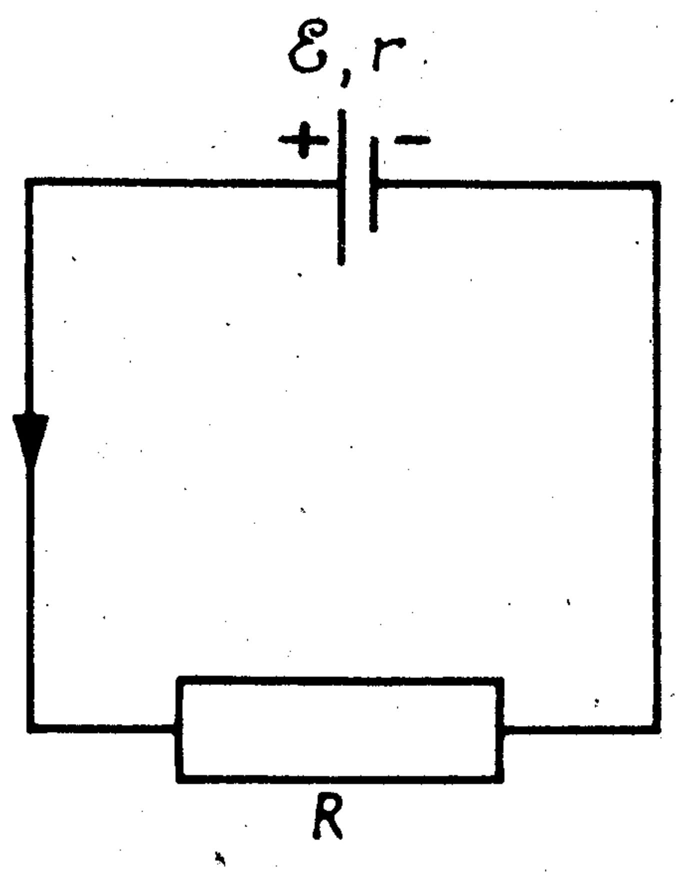


Рис. 2.5.

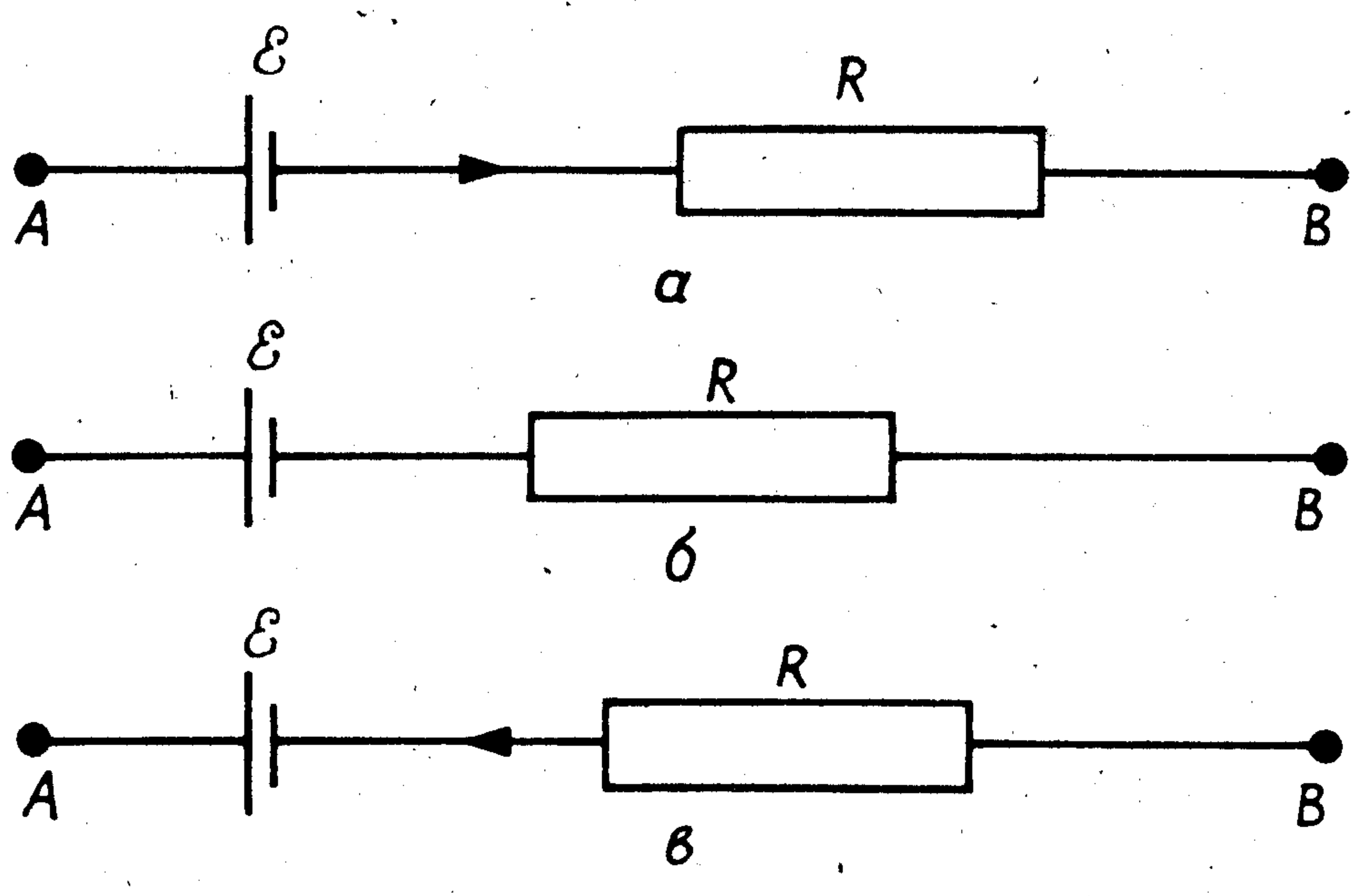


Рис. 2.6.

вать ток, так как работа этих сил по замкнутому контуру равна нулю, а известно, что когда по цепи течет электрический ток, выделяется тепло. Следовательно, в цепи должны действовать электрические силы некулоновского происхождения, работа которых по замкнутому контуру не равна нулю. Устройство, в котором эти силы возникают, называется источником. Это могут быть химические силы (гальванические элементы), силы со стороны магнитного поля и т. д. Источники тока характеризуются *электродвижущей силой* (эдс). Эдс — физическая величина, равная работе сторонних сил $A_{\text{ст}}$ по перемещению единичного положительного заряда по замкнутой цепи:

$$\mathcal{E} = A_{\text{ст}}/q_0. \tag{2.11}$$

Полная электрическая цепь состоит из источника с эдс $\mathcal{E}$ и внутренним сопротивлением r и внешнего сопротивления R (рис. 2.5). Сила тока, текущего по цепи, прямо пропорциональна эдс и обратно пропорциональна полному сопротивлению, т. е.

$$I = \mathcal{E}/(R + r) \tag{2.12}$$

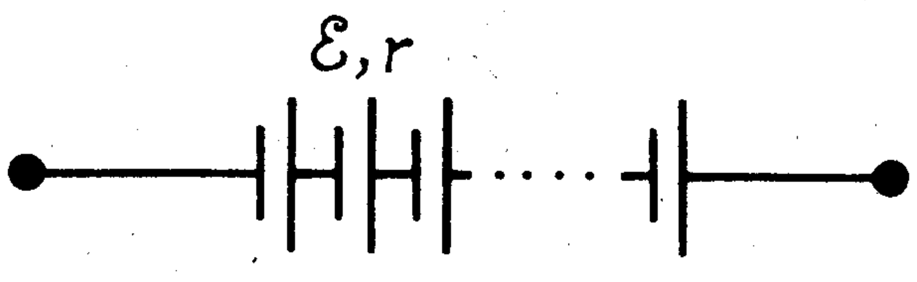
(закон Ома для полной цепи). Линии тока замкнуты. Во внешней цепи ток течет от (+) к (−), во внутренней цепи, т. е. в самом источнике от (−) к (+).

Закон Ома для неоднородного участка цепи

Неоднородный участок цепи состоит из источника $\mathcal{E}$ и сопротивления R (рис. 2.6). Падение напряжения на сопротивлении R равно сумме удельных работ кулоновских сил и сил стороннего поля:

$$IR = \mathcal{E} + (\varphi_A - \varphi_B).$$

Если $\varphi_A - \varphi_B > \mathcal{E}$ (рис. 2.6,*а*), то ток течет от точки A к точке B, кулоновские силы больше сил стороннего поля; если $\varphi_A - \varphi_B = \mathcal{E}$ (рис. 2.6,*б*), то сила тока равна нулю; если $\varphi_B > \varphi_A$ (рис. 2.6,*в*), то заряды движутся и под действием кулоновских сил и под действием сторонних сил в одном направлении.



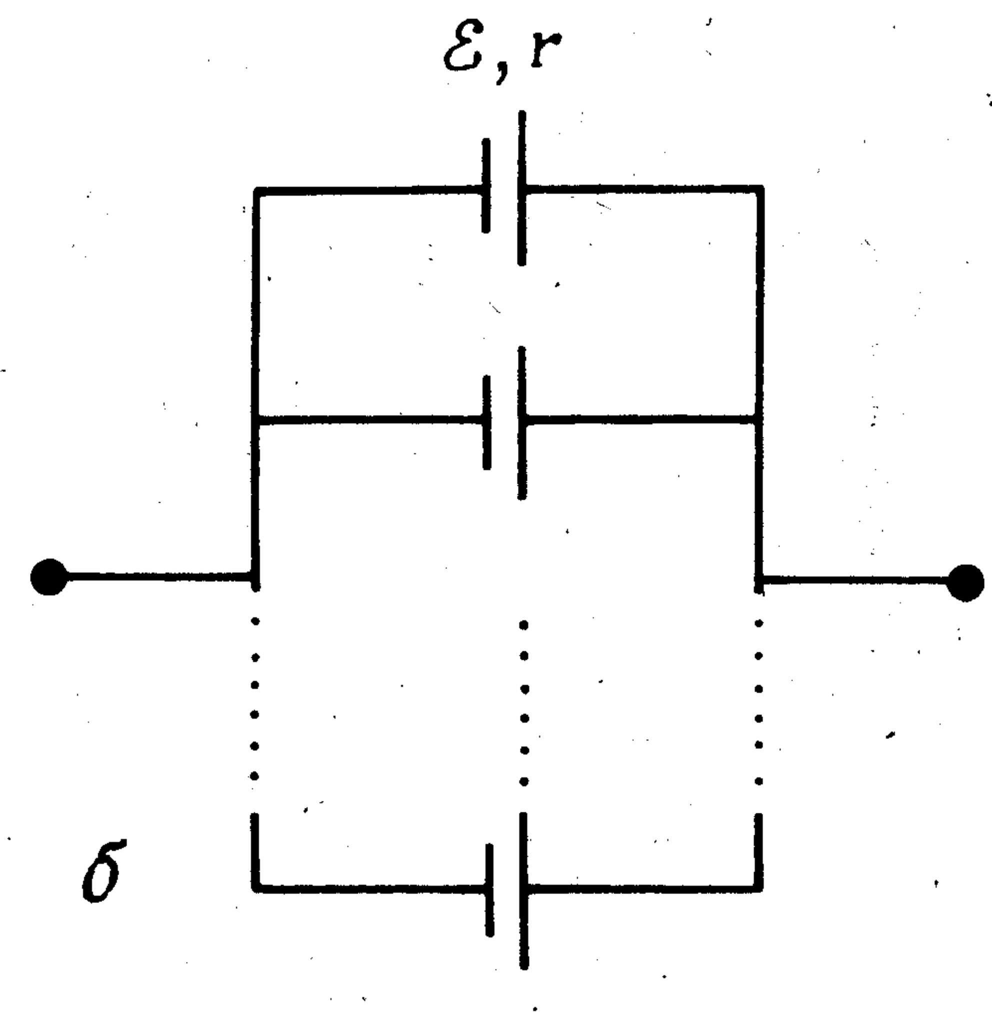


Рис. 2.7.

Последовательное и параллельное соединение источников тока

При последовательном соединении нескольких источников тока (рис. 2.7,*а*) полная эдс батареи равна алгебраической сумме эдс всех источников, а суммарное сопротивление равно сумме сопротивлений, т. е.

$$\mathcal{E}_\Sigma = \sum_i \mathcal{E}_i, \quad r_\Sigma = \sum_i r_i. \tag{2.13}$$

При параллельном подключении n источников с одинаковыми эдс $\mathcal{E}$ и внутренними сопротивлениями r (рис. 2.7,*б*) суммарная эдс равна эдс одного источника $\mathcal{E}_\Sigma = \mathcal{E}$, а внутреннее сопротивление $r_\Sigma = r/n$. Если эдс источников различны, то для расчетов значений сил токов в различных участках цепи удобно пользоваться *правилами Кирхгофа*.

Правила Кирхгофа

Первое правило Кирхгофа. Точка соединения нескольких проводников называется *узлом*. Алгебраическая сумма токов в узле равна нулю:

$$\sum_i I_i = 0. \tag{2.14}$$

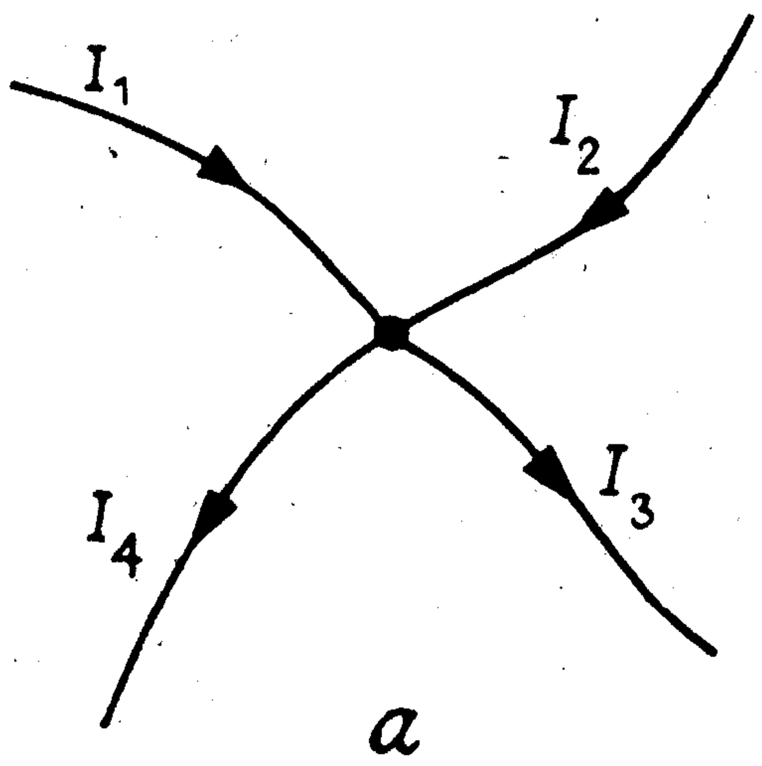
Токи, текущие к узлу, будем считать положительными, от узла отрицательными. Тогда для узла, изображенного на рис. 2.8,*а*, первое правило Кирхгофа запишется в виде:

$$I_1 + I_2 - I_3 - I_4 = 0.$$

Второе правило Кирхгофа. Алгебраическая сумма падений напряжений на замкнутом контуре разветвленной цепи равна алгебраической сумме эдс:

$$\sum_i I_i R_i = \sum_i \mathcal{E}_i. \tag{2.15}$$

Запишем второе правило Кирхгофа для контура, изображенного на рис. 2.8,*б*. Пусть токи направлены так, как показано на рисунке. Если направления токов



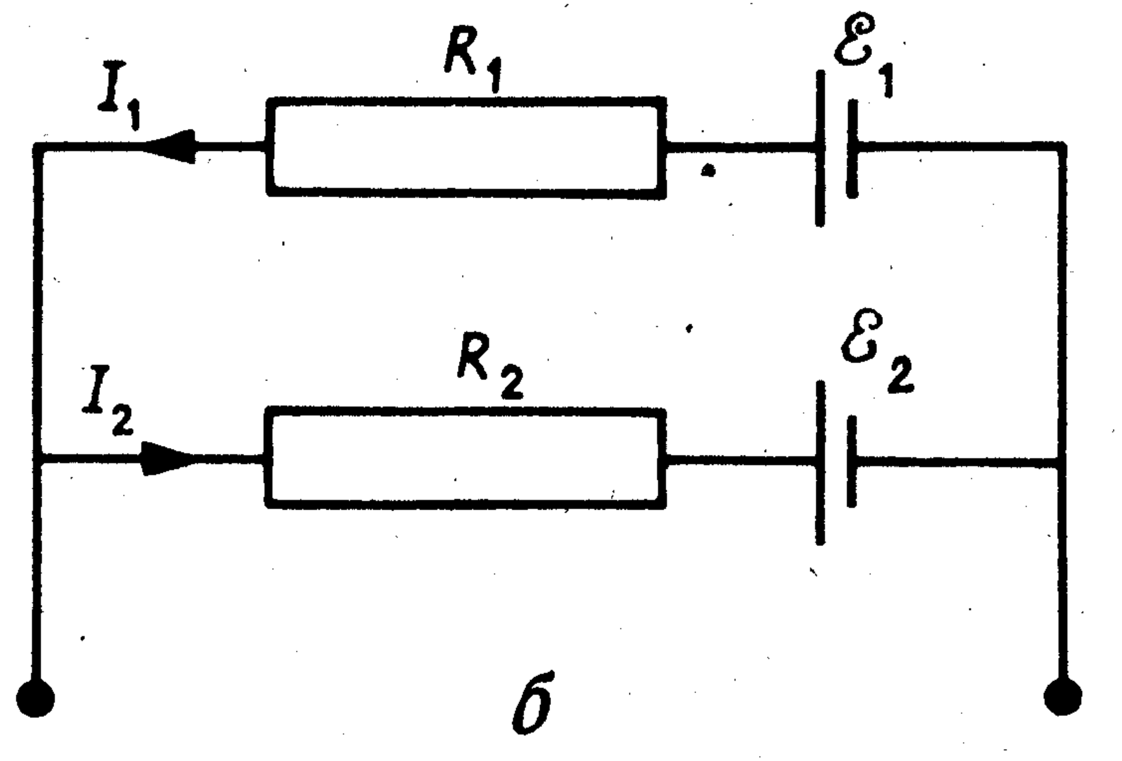


Рис. 2.8.

выбраны неверно, то значения сил токов получатся отрицательными, и, следовательно, они текут в направлении, противоположном выбранному.

Выберем направление обхода контура против часовой стрелки. Тогда второе правило Кирхгофа запишется в виде

$$I_1R_1 + I_2R_2 = \mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2$$

($\mathcal{E}_2$ берется со знаком (−), так как она вызывает движение зарядов в направлении, противоположном выбранному направлению обхода контура).

Тепловое действие тока

Если через сопротивление R течет ток I, то кулоновские силы совершают положительную работу:

$$A = qU = IUt,$$

где q — количество электричества, протекшее через поперечное сечение проводника за промежуток времени t: $q = It$. При этом происходит выделение тепла Q. Очевидно, что $Q = A$, или

$$Q = IUt = I^2Rt = (U^2/R)t$$

(*закон Джоуля — Ленца*). *Мощность тока* — работа, совершенная за единицу времени и равная

$$P = A/t = IU = I^2R = U^2/R. \tag{2.16}$$

Полная мощность P_0, развиваемая источником, идет на выделение тепла во внешнем и внутреннем сопротивлениях и равна

$$P_0 = I^2(R+r) = I\mathcal{E} = \mathcal{E}^2/(R+r). \tag{2.17}$$

Мощность, выделяемая во внешнем сопротивлении, называется *полезной мощностью* (это понятие используется в электронагревательных и осветительных приборах) и равна

$$P_{\text{полез}} = I^2R = IU = \mathcal{E}^2R/(R+r)^2. \tag{2.18}$$

Мощность, выделяемая во внутреннем сопротивлении, использована быть не может и называется теряемой мощностью

$$P_{\text{тер}} = I^2r = \mathcal{E}^2r/(R+r)^2. \tag{2.19}$$

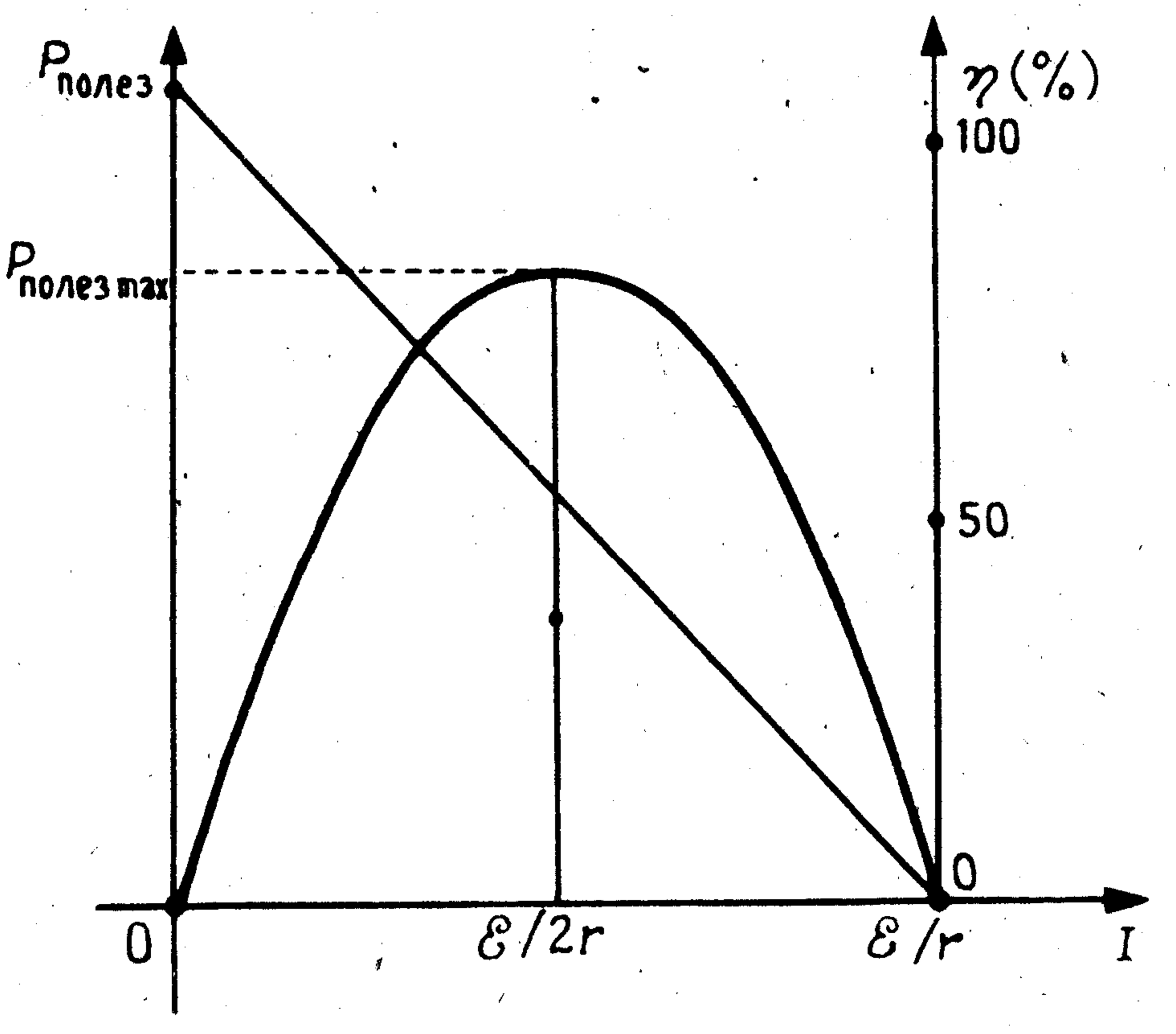


Рис. 2.9.

В этом случае кпд (η) равен

$$\eta = \frac{P_{\text{полез}}}{P_0} \cdot 100\% = \frac{R}{R+r} \cdot 100\%.$$

Из выражения (2.18) следует, что $P_{\text{полез}}$ зависит от двух переменных: I и U или I и R. Для исследования зависимости $P_{\text{полез}}$ перепишем выражение для полезной мощности, как функции одной переменной, например, I:

$$P_{\text{полез}} = IU = I(\mathcal{E} - Ir).$$

На рис. 2.9 изображена зависимость $P_{\text{полез}}(I)$. Ясно, что кривая, выражающая зависимость $P_{\text{полез}}(I)$, — парабола, ветви параболы направлены вниз. Максимум находим из условия обращения в нуль первой производной $P'_{\text{полез}} = 0$, или $\mathcal{E} - 2Ir = 0$,

$$I = \mathcal{E}/2r,$$

а так как $I = \mathcal{E}/(R+r)$, то очевидно, что полезная мощность будет максимальна при $r = R$ и равна

$$P_{\text{полез}\,\max} = \mathcal{E}^2/4r.$$

При $I_{\max} = \mathcal{E}/r$ (короткое замыкание) $P_{\text{полез}} = 0$, также $P_{\text{полез}} = 0$ при $R \to \infty$ (разомкнутая цепь). На рис. 2.9 изображена также зависимость кпд от тока. При разомкнутой цепи кпд равен 100% (ток не течет и нет потерь). При короткозамкнутой цепи кпд равен 0 (ток течет, но нет внешнего сопротивления, полезной мощности негде выделиться) и при $r = R$ кпд = 50%. Подчеркнем, что когда выделяется максимальная полезная мощность, это не означает, что кпд максимален.

Ток в электролитах

В электролитах (растворы солей, кислот, щелочей и расплавы солей) имеются положительные и отрицательные ионы. В растворе устанавливается динамическое равновесие между процессами диссоциации и рекомбинации ионов. Под действием электрического поля ионы приобретают направленное движение —

положительные ионы (*катионы*) движутся к катоду, отрицательные (*анионы*) — к аноду. При электролизе в растворах солей масса катода увеличивается, так как на катоде осаждаются положительные ионы. Например, если электролитом является раствор медного купороса и мы берем медные электроды, то масса катода увеличивается со временем.

Электролизом называется явление выделения вещества на электродах при прохождении через электролит электрического тока. Для электролиза справедливы два *закона Фарадея*:

1. Масса вещества, выделившегося при электролизе, прямо пропорциональна протекшему через электролит количеству электричества (заряду):

$$m = kq = kIt, \tag{2.20}$$

где k — *электрохимический эквивалент* данного вещества. Физический смысл электрохимического эквивалента состоит в следующем: k численно равен количеству вещества, выделившемуся при прохождении через электролит заряда 1 Кл (СИ), $[k]$ = кг/Кл.

2. Второй закон Фарадея устанавливает связь между электрохимическим и химическим эквивалентами данного вещества:

$$k = x/F, \tag{2.21}$$

где x — химический эквивалент вещества, равный отношению атомной массы вещества A к его валентности n: $x = A/n$, F — постоянная Фарадея, не зависящая от свойств электролита, $F = 9,65 \cdot 10^4$ Кл/моль. Подставив (2.21) в (2.20), получим объединенный закон Фарадея

$$m = \frac{1}{F}\frac{A}{n}It, \tag{2.22}$$

т. е. масса выделившегося вещества прямо пропорциональная атомной массе, силе тока и времени и обратно пропорциональна валентности вещества.

Если выделившаяся масса вещества численно равна его химическому эквиваленту, то постоянная Фарадея численно равна заряду, который должен пройти через электролит, чтобы на электроде выделилась масса вещества, численно равная его химическому эквиваленту.

Примеры решения задач

Задача 1. На рис. 2.10 все сопротивления равны R. Определить эквивалентное сопротивление.

Дано: $R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = R_5 = R_6 = R$; $R_{экв}$ — ?

Решение. Трудно определить, как соединены сопротивления $R_1 - R_3$ последовательно, или параллельно. В подобных схемах всегда ищем сопротивления, соединения которых очевидны. Так, очевидно, что сопротивления R_5 и R_6 соединены последовательно. Значит, $R_{5,6} = R_5 + R_6 = 2R$. Сопротивление $R_{5,6}$ соединено параллельно с сопротивлением R_4. Отсюда

$$\frac{1}{R_{4,5,6}} = \frac{1}{R_{5,6}} + \frac{1}{R_4},$$

$$R_{4,5,6} = \frac{2R \cdot R}{2R + R} = \frac{2}{3}R.$$

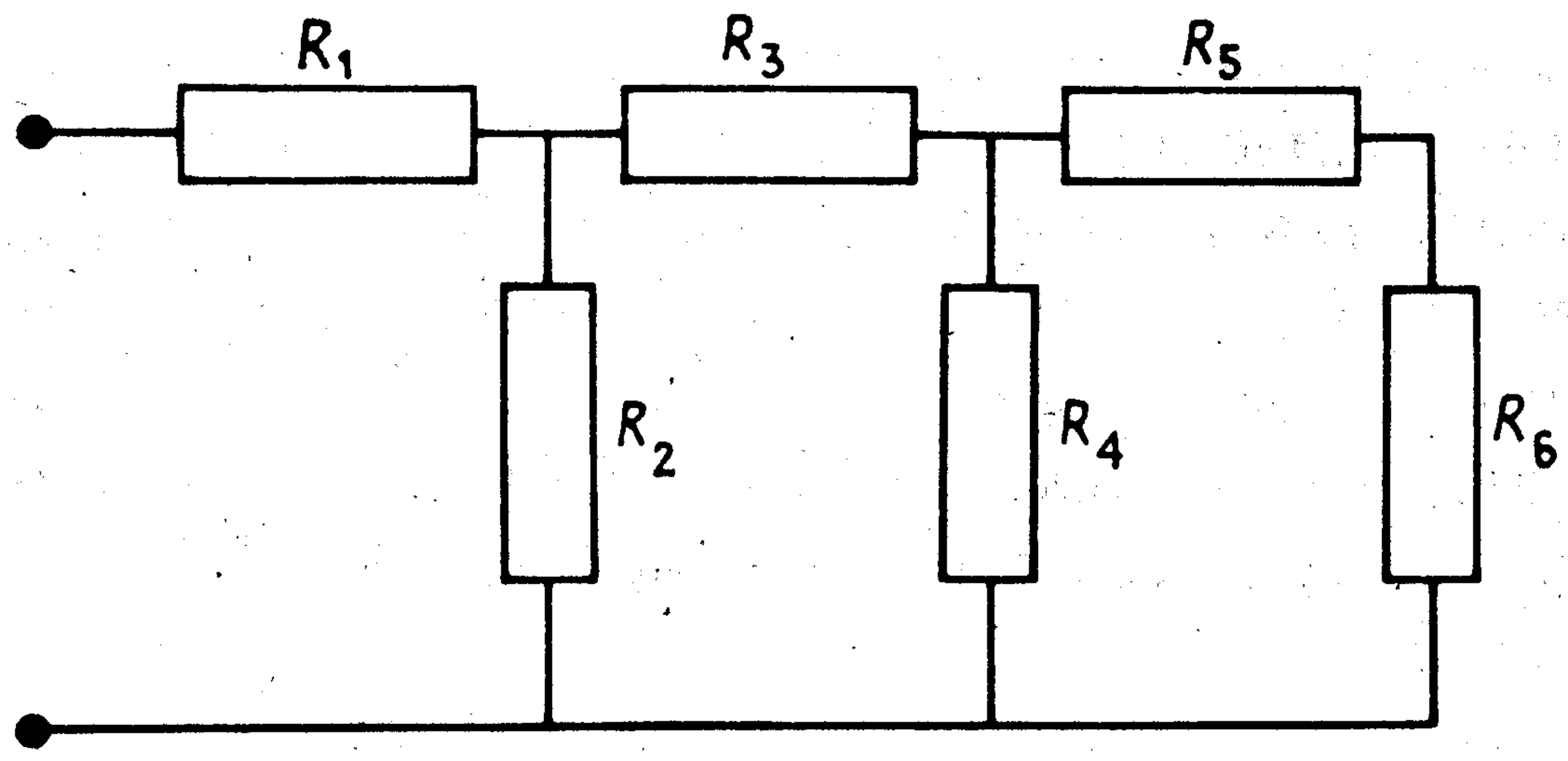


Рис. 2.10.

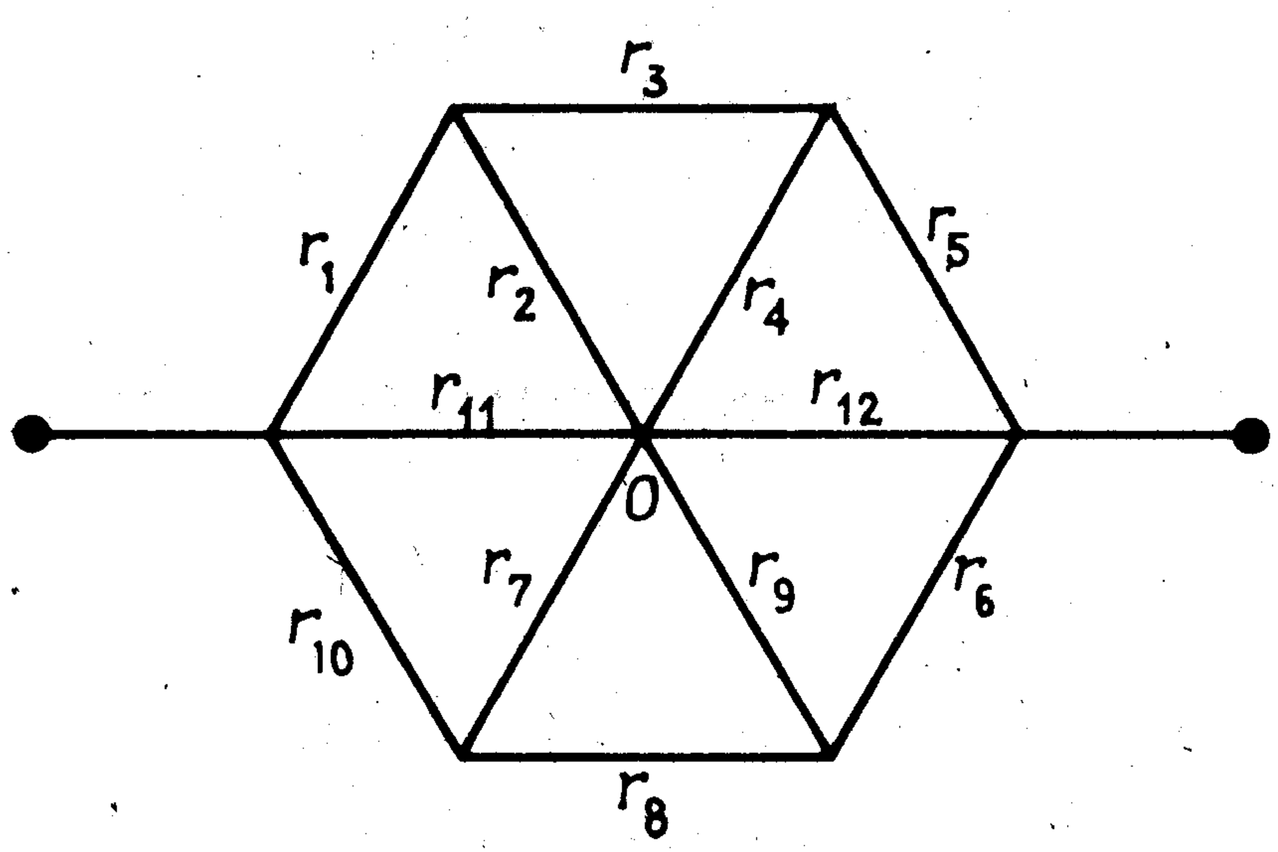


Рис. 2.11.

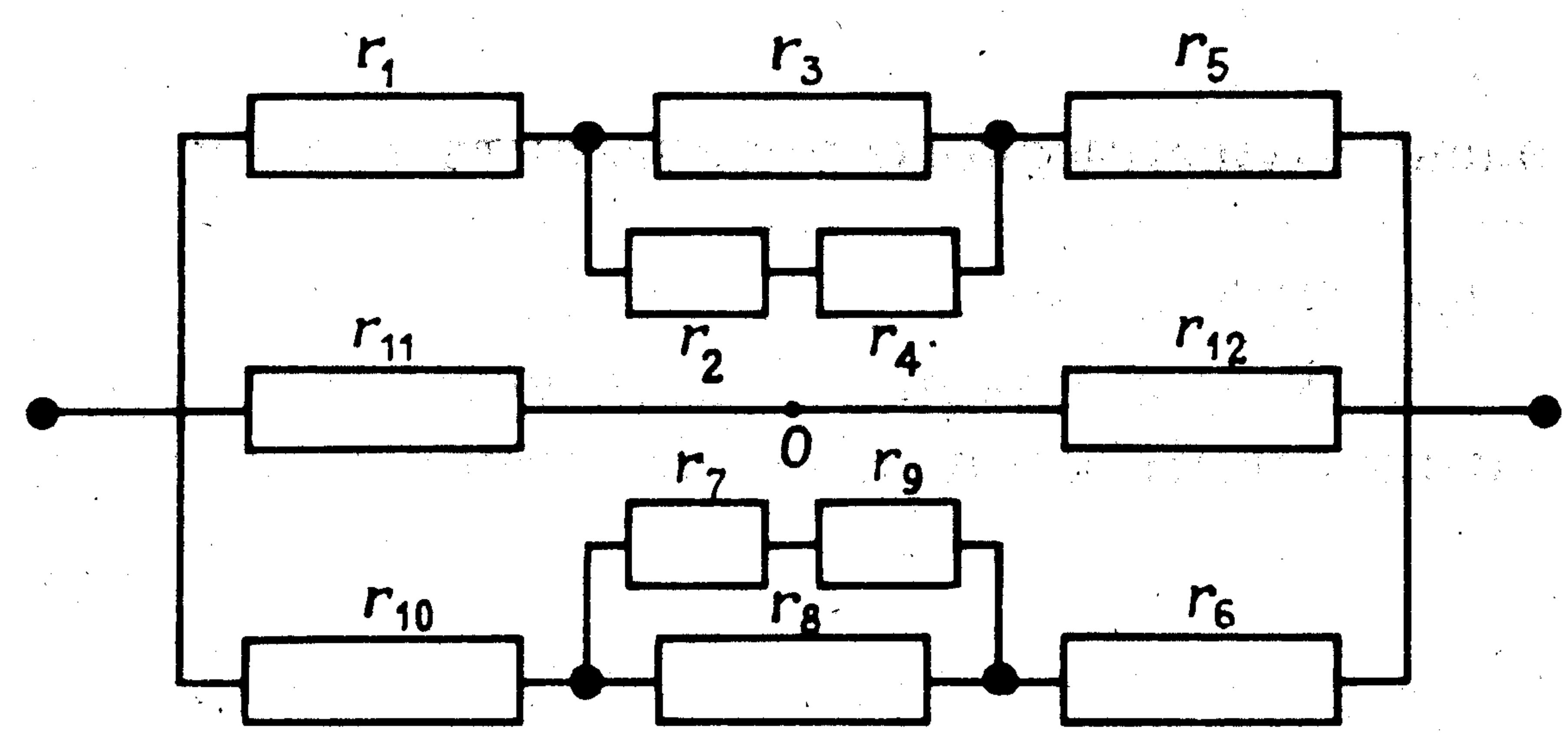


Рис. 2.12.

Сопротивление $R_{4,5,6}$ в свою очередь соединено последовательно с сопротивлением R_3:

$$R_{3-6} = R_3 + R_{4,5,6} = R + (2/3)R = (5/3)R,$$

а R_{3-6} параллельно с R_2:

$$R_{2-6} = \frac{R_{3-6} \cdot R_2}{R_{3-6} + R_2} = \frac{(5/3)R \cdot R}{(5/3)R + R} = \frac{5}{8}R.$$

И, наконец, R_{2-6} подключено последовательно к R_1, так что

$$R_{\text{экв}} = R_1 + R_{2-6} = R + \frac{5}{8}R = \frac{13}{8}R.$$

Задача 2. Определить $R_{\text{экв}}$ соединения проводников в виде шестиугольника. Сопротивление каждой проволочки равно r (рис. 2.11).

Дано: r; $R_{\text{экв}}$ — ?

Решение. В силу симметрии очевидно, что токи, текущие по сопротивлениям r_2, r_4, r_7, r_9, одинаковы. Следовательно, ток через узел O отсутствует. Можно нарисовать эквивалентную схему (рис. 2.12). Сопротивления r_2, r_4 между собой соединены последовательно и параллельно с сопротивлением r_3. Тогда

$$R_{2,3,4} = \frac{2rr}{3r} = \frac{2}{3}r.$$

Эквивалентное сопротивление $R_{2,3,4}$ соединено последовательно с сопротивлениями 1 и 5, тогда

$$R_{1\to 5} = 2/3r + r + r = (8/3)r.$$

Эквивалентное сопротивление проводников 6–10 равно $R_{1\to5}$:

$$R_{6\to10} = (8/3)r.$$

Сопротивления 11 и 12 соединены последовательно:

$$R_{11,12} = 2r.$$

И, наконец, $R_{1\to5}$, $R_{6\to10}$ и $R_{11,12}$ соединены параллельно:

$$1/R_{\text{экв}} = 1/R_{6\to10} + 1/R_{1\to5} + 1/R_{11,12},$$

$$1/R_{\text{экв}} = \frac{3}{8r} + \frac{3}{8r} + \frac{1}{2r} = \frac{5}{4r},$$

$$R_{\text{экв}} = (4/5)r.$$

Задача 3. Определите, какой шунт надо подключить к амперметру, имеющему 20 делений с ценой деления $I_1 = 5$ мкА и внутреннее сопротивление 90 Ом, чтобы можно было измерить силу тока до $I = 1$ мА.

Дано: $n = 20$, $I_1 = 5 \cdot 10^{-6}$ А/дел, $R_A = 90$ Ом, $I = 1 \cdot 10^{-3}$ А; $R_{\text{ш}}$ — ?

Решение. Максимальная сила тока, которую можно измерить данным амперметром, равна

$$I_A = nI_1 = 10^{-4}\text{А}.$$

Требуется измерить силу тока $I = 10^{-3}$ А, т. е. в 10 раз большую:

$$I/I_A = 10.$$

Шунт к амперметру подключается параллельно и, согласно (2.9′),

$$R_{\text{ш}} = R_A/(I/I_a - 1) = (90/9)\,\text{Ом} = 10\,\text{Ом}.$$

Задача 4. При подключении вольтметра с сопротивлением $R_V = 200$ Ом непосредственно к зажимам источника он показывает $U = 20$ В. Если же этот источник замкнуть на сопротивление $R = 8$ Ом, то ток в цепи становится равным 0,5 А. Найти эдс и внутреннее сопротивление источника.

Дано: $R_V = 200$ Ом, $U = 20$ В, $R = 8$ Ом, $I_2 = 0,5$ А; $\mathcal{E}$ — ? r — ?

Решение. По закону Ома для замкнутой цепи в первом случае в цепи течет ток $I_1 = \mathcal{E}/(R_V + r)$, во втором случае — $I_2 = \mathcal{E}/(R + r)$, отсюда $I_1(R_V + r) = I_2(R+r)$. Показания вольтметра дают падение напряжения на сопротивлении самого вольтметра, т. е. $U = I_1R_V$. Для внутреннего сопротивления источника тока, используя полученные равенства, запишем:

$$r = \frac{I_1R_V - I_2R}{I_2 - I_1} = \frac{U - I_2R}{I_2 - U/R_V} = \frac{(U - I_2R)R_V}{I_2R_V - U},$$

а эдс $\mathcal{E}$ равна

$$\mathcal{E} = I_1R_V\frac{(I_2R_V - I_2R)}{I_2R_V - U} = U\frac{I_2(R_V - R)}{I_2R_V - U}.$$

Подставим числовые данные в полученные выражения:

$$\mathcal{E} = \frac{20 \cdot (0,5 \cdot 200 - 0,5 \cdot 8)}{0,5 \cdot 200 - 20}\text{В} = 24\,\text{В},$$

$$r = \frac{(20 - 0,5 \cdot 8) \cdot 200}{0,5 \cdot 200 - 20}\text{Ом} = 40\,\text{Ом}.$$

Задача 5. Определить ток короткого замыкания $I_{\text{к.з.}}$ для источника, который при токе в цепи $I_1 = 10$ А имеет полезную мощность $P_1 = 500$ Вт, а при токе $I_2 = 5$ А — мощность $P_2 = 375$ Вт.

Дано: $I_1 = 10$ А, $P_1 = 500$ Вт, $I_2 = 5$ А, $P_2 = 375$ Вт; $I_{\text{к.з.}}$ — ?

Решение. Ток короткого замыкания равен $I_{\text{к.з.}} = \mathcal{E}/r$ и является характеристикой источника. Полезная мощность $P = IU$, где U — напряжение на зажимах источника или падение напряжения на внешнем сопротивлении. Напряжения на зажимах источника в первом и во втором случаях равны

$$U_1 = P_1/I_1 = \mathcal{E} - I_1 r, \tag{2.23}$$

$$U_2 = P_2/I_2 = \mathcal{E} - I_2 r. \tag{2.24}$$

Вычтем почленно из выражения (2.23) выражение (2.24):

$$\frac{P_1}{I_1} - \frac{P_2}{I_2} = (\mathcal{E} - I_1 r) - (\mathcal{E} - I_2 r) = (I_2 - I_1)r,$$

откуда получаем для r:

$$r = \frac{P_1 I_2 - P_2 I_1}{I_1 I_2 (I_2 - I_1)}.$$

Эдс источника тока

$$\mathcal{E} = U_1 + I_1 r = \frac{P_1}{I_1} + \frac{I_1(P_1 I_2 - P_2 I_1)}{I_1 I_2 (I_2 - I_1)} = \frac{P_1}{I_1} + \frac{P_1 I_2 - P_2 I_1}{I_2 (I_2 - I_1)}.$$

Подставив числовые данные в расчетные формулы, имеем

$$r = \frac{500 \cdot 5 - 375 \cdot 10}{10 \cdot 5(5 - 10)}\,\text{Ом} = 5\,\text{Ом},$$

$$\mathcal{E} = \frac{500}{10} - \frac{500 \cdot 5 - 375 \cdot 10}{5 \cdot (10 - 5)}\,\text{В} = 100\,\text{В},$$

и окончательно

$$I_{\text{к.з.}} = 100/5 = 20\,\text{А}.$$

Задача 6. Источник тока с эдс 12 В и внутренним сопротивлением $r = 1$ Ом соединен с реостатом. Напряжение на зажимах источника U равно 10 В. Какой длины надо взять медную проволоку для изготовления реостата, если ее сечение равно $S = 1\text{мм}^2$? Удельное сопротивление меди $\rho = 1,68 \cdot 10^{-8}\,\text{Ом} \cdot \text{м}$.

Дано: $\mathcal{E} = 12$ В, $U = 10$ В, $r = 1$ Ом, $S = 1\,\text{мм}^2$ $(1 \cdot 10^{-6}\,\text{м}^2)$, $\rho = 1,68 \cdot 10^{-8}\,\text{Ом} \cdot \text{м}$; l — ?

Решение. Напряжение на зажимах источника равно падению напряжения во внешней цепи:

$$U = IR = \mathcal{E} - Ir. \tag{2.25}$$

Тогда ток в цепи равен

$$I = (\mathcal{E} - U)/r. \tag{2.26}$$

Подставляя выражение (2.26) в (2.25), получим

$$R = U/I = Ur/(\mathcal{E} - U).$$

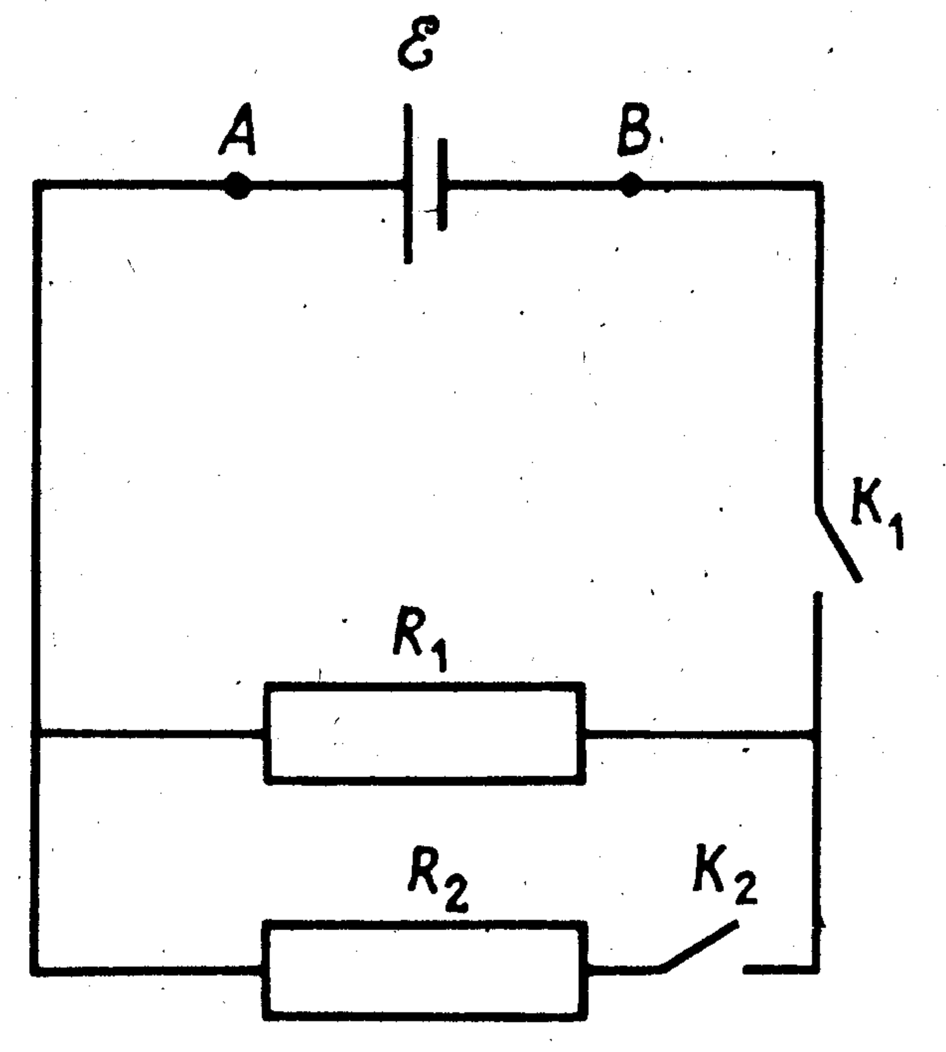


Рис. 2.13.

Зная, что $R = \rho l/S$, найдем длину проволоки:

$$l = \frac{RS}{\rho} = \frac{UrS}{(\mathcal{E} - U)\rho},$$

$$[l] = \frac{\text{В} \cdot \text{Ом} \cdot \text{м}^2}{\text{В} \cdot \text{Ом} \cdot \text{м}} = \text{м},$$

$$l = \frac{10 \cdot 1 \cdot 10^{-6}}{(12 - 10) \cdot 1,68 \cdot 10^{-8}} \text{ м} = 2,98 \cdot 10^2 \text{ м}.$$

Задача 7. Источник с эдс 4 В, $r = 4$ Ом подключен к сопротивлениям $R_1 = 20$ Ом и $R_2 = 30$ Ом, как показано на рис. 2.13. Определить разность потенциалов на зажимах источника эдс

1) при разомкнутой цепи,
2) при замыкании только ключа K_1,
3) при замыкании ключей K_1, K_2.

Дано: $\mathcal{E} = 4$ В, $r = 4$ Ом, $R_1 = 20$ Ом, $R_2 = 30$ Ом; $(\varphi_A - \varphi_B)_1$ — ? $(\varphi_A - \varphi_B)_2$ — ? $(\varphi_A - \varphi_B)_3$ — ?

Решение. 1) При разомкнутой цепи разность потенциалов $\varphi_A - \varphi_B$ равна эдс, так как ток не течет и не происходит падения напряжения:

$$\varphi_A - \varphi_B = \mathcal{E}.$$

2) При замыкании ключа K_1 по цепи потечет ток. По закону Ома для полной цепи сила тока I_1 равна

$$I_1 = \mathcal{E}/(R_1 + r),$$

$$\varphi_A - \varphi_B = I_1 R_1 = \mathcal{E} R_1/(R_1 + r),$$

$$\varphi_A - \varphi_B = (4 \cdot 20)/24 \text{ В} = 3,33 \text{ В}.$$

3) При замыкании ключей K_1 и K_2 внешнее сопротивление цепи равно

$$R = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2},$$

поскольку сопротивления R_1 и R_2 соединены параллельно. Сила тока

$$I_2 = \frac{\mathcal{E}}{r + R_1 R_2/(R_1 + R_2)},$$

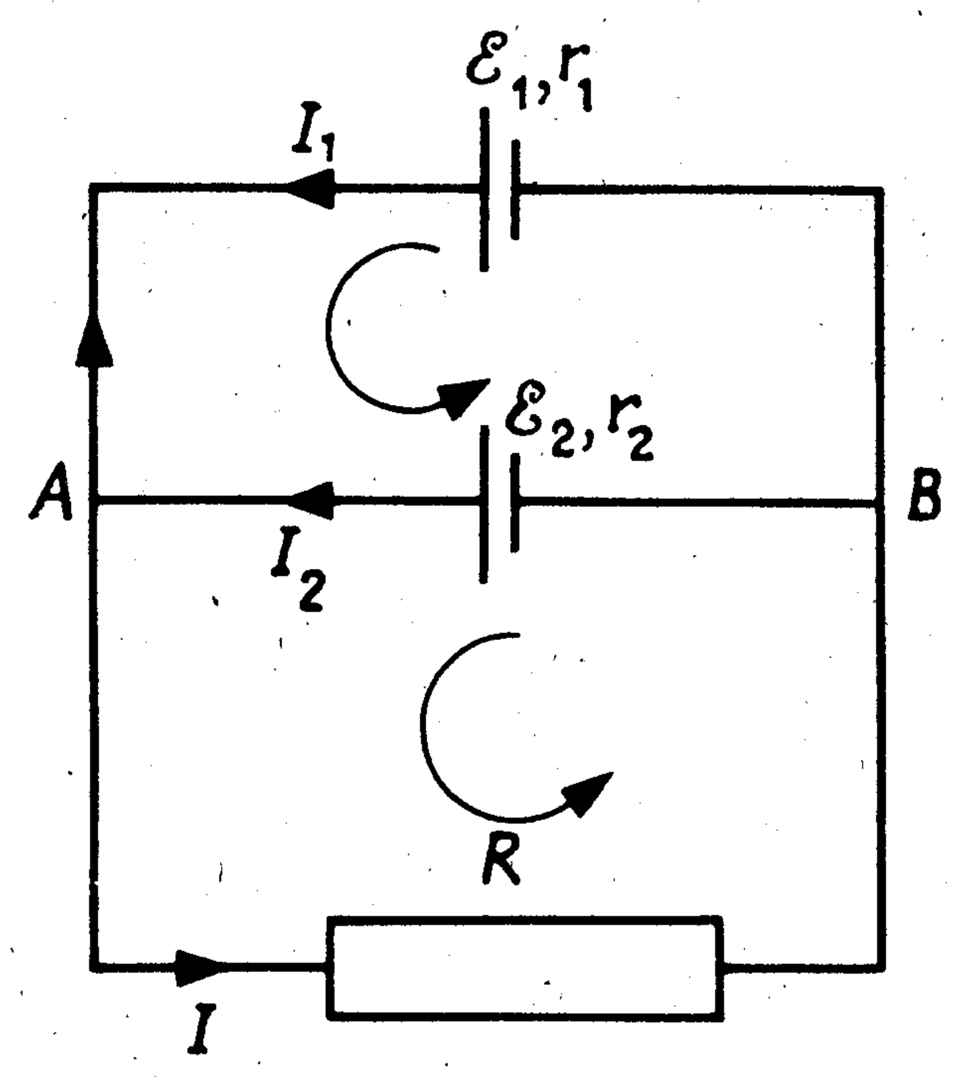


Рис. 2.14.

$$\varphi_A - \varphi_B = \mathcal{E} - \frac{\mathcal{E}r}{r + R_1R_2/(R_1 + R_2)},$$

$$\varphi_A - \varphi_B = 4 - \frac{4 \cdot 4}{4 + 20 \cdot 30/(20 + 30)}\,\text{В} = (4 - 1)\,\text{В} = 3\,\text{В}.$$

Задача 8. Рассчитать токи во всех участках цепи, изображенной на рис. 2.14, если $\mathcal{E}_1 = 2$ В, $\mathcal{E}_2 = 4$ В, $r_1 = r_2 = 2$ Ом, $R = 9$ Ом.

Дано: $\mathcal{E}_1 = 2$ В, $\mathcal{E}_2 = 4$ В, $r_1 = r_2 = 2$ Ом, $R = 9$ Ом; I_1 — ? I_2 — ? I_3 — ?

Решение. Выберем направление токов, как указано на рис. 2.14. Для узла A запишем первое правило Кирхгофа:

$$I_1 + I_2 - I = 0. \tag{2.27}$$

Рассмотрим замкнутый контур $\mathcal{E}_1, R$, направление обхода контура — против часовой стрелки. Запишем второе правило Кирхгофа:

$$I_1 r + IR = \mathcal{E}. \tag{2.28}$$

Также для контура $\mathcal{E}_2, R$ имеем

$$I_2 r + IR = \mathcal{E}_2. \tag{2.29}$$

Уравнения (2.27), (2.28), (2.29) — система трех уравнений относительно трех неизвестных.

Отметим, что можно записать первое правило Кирхгофа для узла B и второе правило для контура $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2$. Однако эти два уравнения и уравнения (2.27), (2.28) и (2.29) будут линейно зависимыми.

Решим систему уравнений:

$$I_1 = \frac{\mathcal{E}_1 - IR}{r_1}; \quad I_2 = \frac{\mathcal{E}_2 - IR}{r_2},$$

$$I\left(1 + \frac{R}{r_1} + \frac{R}{r_2}\right) = \frac{\mathcal{E}_1}{r_1} + \frac{\mathcal{E}_2}{r_2}.$$

Окончательно,

$$I = \frac{\mathcal{E}_1 r_2 + \mathcal{E}_2 r_1}{r_1 r_2 + R(r_1 + r_2)},$$

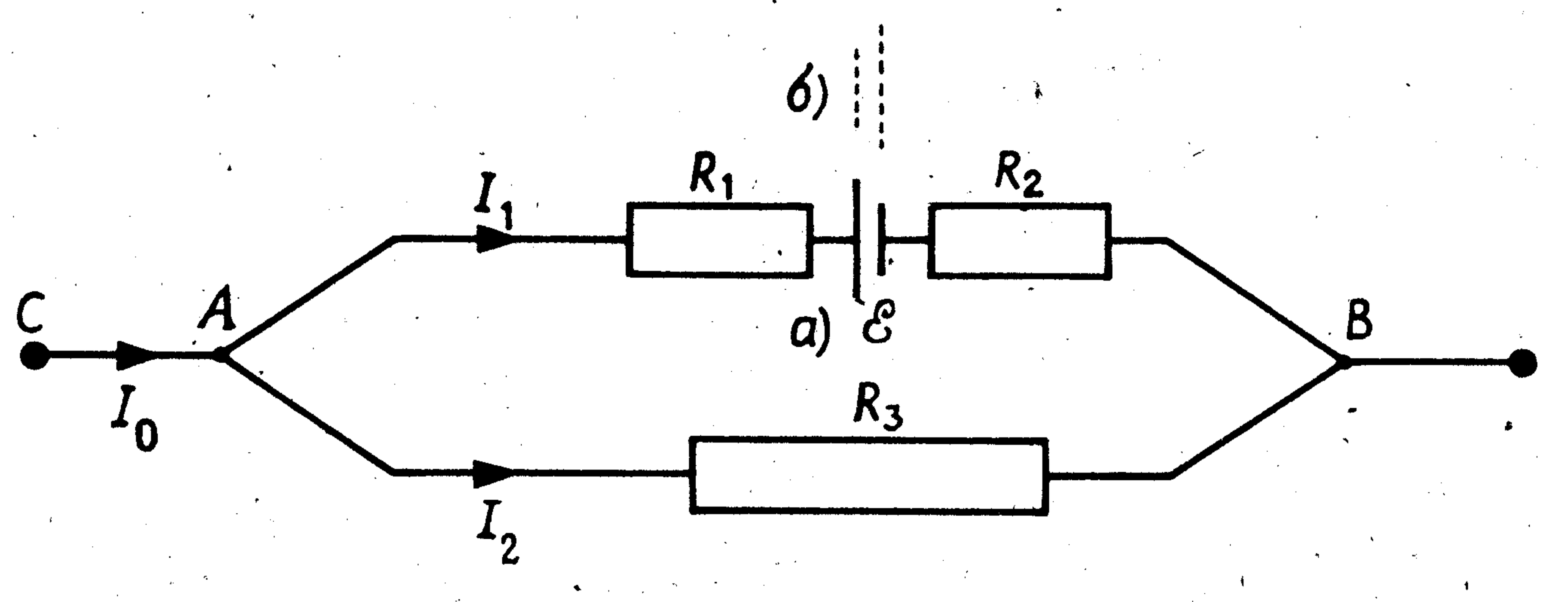


Рис. 2.15.

$$I = \frac{2 \cdot 2 + 4 \cdot 2}{4 + 9 \cdot 4}\,\text{А} = \frac{12}{40}\,\text{А} = 0,3\,\text{А},$$

$$I_1 = \frac{2 - 2,7}{2}\,\text{А} = -0,35\,\text{А},$$

$$I_2 = \frac{4 - 2,7}{2} = 0,65\,\text{А}.$$

Знак минус означает, что ток по участку цепи $A\mathcal{E}_1 B$ течет в направлении, обратном выбранному.

Для проверки правильности полученного результата вычислим разность потенциалов $\varphi_A - \varphi_B$, обходя разные участки цепи:

$$\varphi_A - \varphi_B = IR = 2,7\,\text{В}.$$

Для участка, содержащего $\mathcal{E}_1$, запишем закон Ома:

$$I_1 r_1 = (\varphi_A - \varphi_B) - \mathcal{E}_1,$$

$$\varphi_A - \varphi_B = I_1 r_1 + \mathcal{E}_1 = (0,35 \cdot 2 + 2)\,\text{В} = 2,7\,\text{В}.$$

Для участка, содержащего $\mathcal{E}_2$, закон Ома для неоднородного участка цепи имеет вид

$$I_2 r_2 = \mathcal{E}_2 - (\varphi_A - \varphi_B),$$

откуда

$$\varphi_A - \varphi_B = \mathcal{E}_2 - I_2 r_2,$$

$$\varphi_A - \varphi_B = 4 - 0,65 \cdot 2 = 2,7\,\text{В}.$$

Как видим, значения разности потенциалов совпадают.

Задача 9. На рис. 2.15 изображен замкнутый контур, состоящий из двух сопротивлений R_1 и R_2, равных 10 Ом и подключенных к точкам A и B, а также сопротивления R_3, равного 20 Ом и также подключенного к этим точкам. В цепи сопротивлений R_1 и R_2 находится источник, эдс которого $\mathcal{E}$ равна 20 В. По проводнику CA течет ток силой 1 А. Определить силы токов на участках цепи в двух случаях:

1) эдс подключена так, как указано на рисунке,

2) полюса эдс переключили в обратном направлении.

Дано: $I_0 = 1$ А, $\mathcal{E} = 20$ В, $R_1 = R_2 = 10$ Ом, $R_3 = 20$ Ом; I_1 — ? I_2 — ?

Решение. 1) Выберем направление токов, как показано на рис. 2.15. Запишем первое правило Кирхгофа для узла A:

$$I_0 = I_1 + I_2.$$

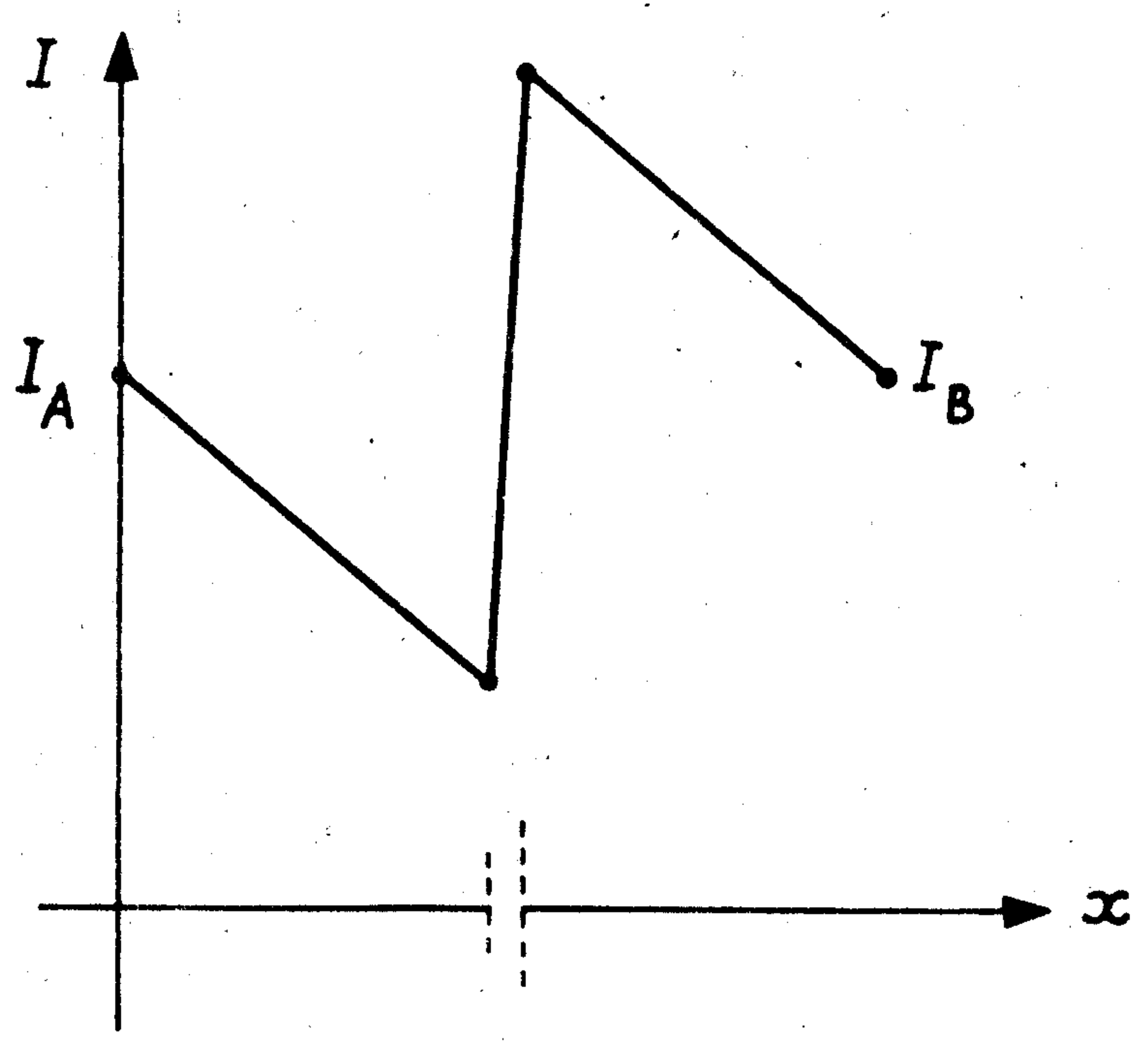


Рис. 2.16.

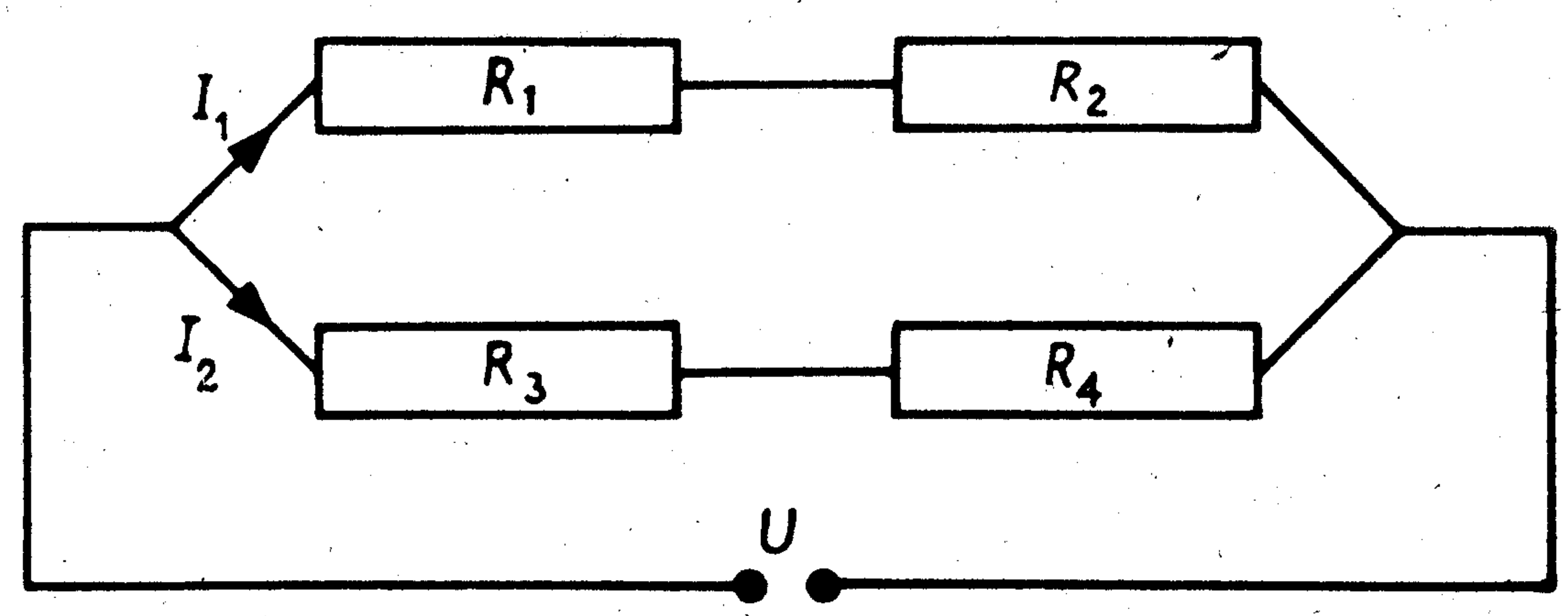


Рис. 2.17.

Направление обхода контура — по часовой стрелке. Тогда второе правило Кирхгофа имеет вид:

$$I_1(R_1 + R_2) - I_2R_3 = -\mathcal{E}.$$

Подставим численные значения

$$1 = I_1 + I_2, \tag{2.30}$$
$$-20 = I_1 \cdot 20 - I_2 \cdot 20,$$
$$+1 = -I_1 + I_2. \tag{2.31}$$

Решая систему (2.30) и (2.31), получим $I_1 = 0$, $I_2 = 1$ А. Ток не течет через однородный участок цепи $A\mathcal{E}B$, так как разность потенциалов $\varphi_A - \varphi_B = 20$ В и эдс $\mathcal{E} = 20$ В компенсируют друг друга.

2) Выберем те же направления токов и обхода контура. Система уравнений имеет вид

$$I_0 = I_1 + I_2,$$
$$I_1(R_1 + R_2) - I_2R_3 = \mathcal{E},$$

или, подставив численные значения, имеем

$$1 = I_1 + I_2,$$
$$1 = I_1 - I_2,$$

откуда $I_1 = 1$ А, $I_2 = 0$. Ток не течет через сопротивление R_3, это означает, что $\varphi_A = \varphi_B$.

Изобразим изменение потенциала вдоль участка цепи $A\mathcal{E}B$. Пусть потенциал точки A равен φ_A. На сопротивлении R_1 происходит падение напряжения на 10 В (рис. 2.16). При переходе через эдс происходит скачок потенциала на 20 В и затем падение напряжения на сопротивлении R_2 на 10 В, поэтому $\varphi_A = \varphi_B$.

Задача 10. На каком из сопротивлений $R_1 = 3$ Ом, $R_2 = 5$ Ом, $R_3 = 3$ Ом и $R_4 = 1$ Ом, соединенных, как показано на рис. 2.17, выделится наибольшая мощность, если схема подключена к источнику?

Дано: $R_1 = 3$ Ом, $R_2 = 5$ Ом, $R_3 = 3$ Ом, $R_4 = 1$ Ом; $P_{\max i}$ — ?

Решение. Сопротивления R_1 и R_2 соединены последовательно, $R_{1,2} = R_1 + R_2 = 8$ Ом, аналогично $R_{3,4} = R_3 + R_4 = 4$ Ом. Сопротивления $R_{1,2}$ и $R_{3,4}$

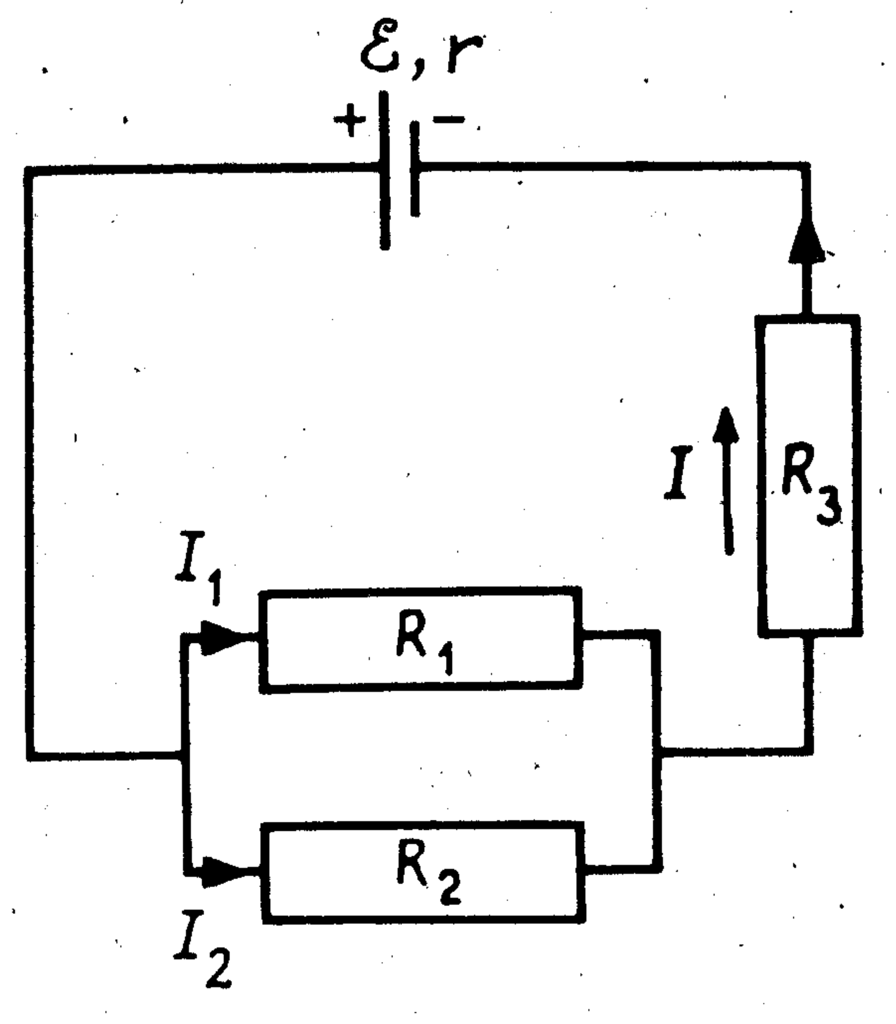


Рис. 2.18.

соединены параллельно и падения напряжения на этих сопротивлениях одинаковы. Так как $I_1R_{1,2} = I_2R_{3,4}$, то $I_1 = I_2/2$. Тогда мощности, выделяемые на каждом из сопротивлений, будут

$$P_1 = I_1^2R_1, \quad P_2 = I_1^2R_2,$$

$$P_3 = I_2^2R_3 = 4I_1^2R_3, \quad P_4 = I_2^2R_4 = 4I_1^2R_4.$$

$$P_1 : P_2 : P_3 : P_4 = R_1 : R_2 : 4R_3 : 4R_4 = 3 : 5 : 12 : 4,$$

т. е. наибольшая мощность выделится на сопротивлении R_3.

Задача 11. Определить силы токов, текущих через каждое сопротивление электрической цепи (рис. 2.18). Эдс источника равна 24 В, внутреннее сопротивление источника $r = (2/3)$ Ом, $R_1 = 2$ Ом, $R_2 = 4$ Ом, $R_3 = 6$ Ом. Найти напряжение на зажимах источника тока I и кпд цепи.

Дано: $\mathcal{E} = 24$ В, $r = (2/3)$ Ом, $R_1 = 2$ Ом, $R_2 = 4$ Ом, $R_3 = 6$ Ом; I_1, I_2, I — ? η — ? $U_з$ — ?

Решение. По закону Ома для полной цепи сила тока, протекающего через сопротивления r и R_3, равна $I = \mathcal{E}/(R + r)$, где R — сопротивление внешней части цепи, равное

$$R = R_{1,2} + R_3 = \frac{R_1R_2}{R_1 + R_2} + R_3,$$

$$I = \frac{\mathcal{E}(R_1 + R_2)}{R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3 + r(R_1 + R_2)}.$$

Напряжения на сопротивлениях R_1 и R_2 равны

$$U_1 = U_2 = IR_{1,2} = I\frac{R_1R_2}{R_1 + R_2} = \frac{\mathcal{E}R_1R_2}{R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3 + r(R_1 + R_2)}.$$

Силы тока, протекающие соответственно через сопротивления R_1 и R_2:

$$I_1 = \frac{U_1}{R_1} = \frac{\mathcal{E}R_2}{R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3 + r(R_1 + R_2)},$$

$$I_2 = \frac{U_2}{R_2} = \frac{\mathcal{E}R_1}{R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3 + r(R_1 + R_2)}.$$

Напряжение на зажимах источника тока:

$$U_з = \mathcal{E} - Ir = IR = \frac{\mathcal{E}(R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3)}{R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3 + r(R_1 + R_2)},$$

кпд цепи:

$$\eta = \frac{R}{R+r} = \frac{R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3}{R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3 + r(R_1 + R_2)}.$$

Подставляя числовые данные в формулы, получим

$$I = \frac{24 \cdot (2+4)}{2 \cdot 4 + 2 \cdot 6 + 4 \cdot 6 + 2(2+4)/3}\,\text{А} = 3\,\text{А},$$

$$I_1 = \frac{24 \cdot 4}{2 \cdot 4 + 2 \cdot 6 + 4 \cdot 6 + 2(2+4)/3}\,\text{А} = 2\,\text{А},$$

$$I_2 = \frac{24 \cdot 2}{2 \cdot 4 + 2 \cdot 6 + 4 \cdot 6 + 2(2+4)/3}\,\text{А} = 1\,\text{А},$$

$$U_з = \frac{24(2 \cdot 4 + 2 \cdot 6 + 4 \cdot 6)}{2 \cdot 4 + 2 \cdot 6 + 4 \cdot 6 + 2(2+4)/3}\,\text{В} = 22\,\text{В},$$

$$\eta = \frac{2 \cdot 4 + 2 \cdot 6 + 4 \cdot 6}{2 \cdot 4 + 2 \cdot 6 + 4 \cdot 6 + 2(2+4)/3} = \frac{44}{48} = 91,7\%.$$

Задача 12. Разность потенциалов в сети зарядной станции 20 В. Внутреннее сопротивление аккумулятора, поставленного на зарядку, равно 0,8 Ом, в начальный момент времени его остаточная эдс 12 В. Какая мощность будет расходоваться станцией на зарядку аккумулятора при этих условиях? Какая часть этой мощности будет расходоваться на нагревание аккумулятора?

Дано: $U = 20$ В, $\mathcal{E} = 12$ В, $R = 0,8$ Ом; P_1 — ? (P_2/P_1) — ?

Решение. При зарядке аккумулятора зарядное устройство и аккумулятор соединены разноименными полюсами навстречу друг другу. Ток, протекающий через аккумулятор, $I = (U - \mathcal{E})/R$. Мощность, расходуемая станцией: $P_1 = UI = U(U - \mathcal{E})/R$. Мощность, расходуемая на нагревание аккумулятора:

$$P_2 = I^2R = \left(\frac{U - \mathcal{E}}{R}\right)^2 R,$$

$$P_1 = 20\frac{20 - 12}{0,8}\,\text{Вт} = 200\,\text{Вт},$$

$$P_2 = \left(\frac{20 - 12}{0,8}\right)^2 0,8\,\text{Вт} = 80\,\text{Вт},$$

$$P_2/P_1 = 0,4.$$

Задача 13. Построить график зависимости $P_{полез}$, P_0, $P_{тер}$ от R.

Решение. 1) $P_{полез}(R)$.

Воспользуемся формулой (2.18) $P_{полез}(R) = \mathcal{E}^2R/(R+r)^2$. При $R = 0$ $P_{полез} = 0$, при $R \to \infty$ $P_{полез} \to 0$, так как при $R \gg r$

$$P_{полез} = \mathcal{E}^2/R.$$

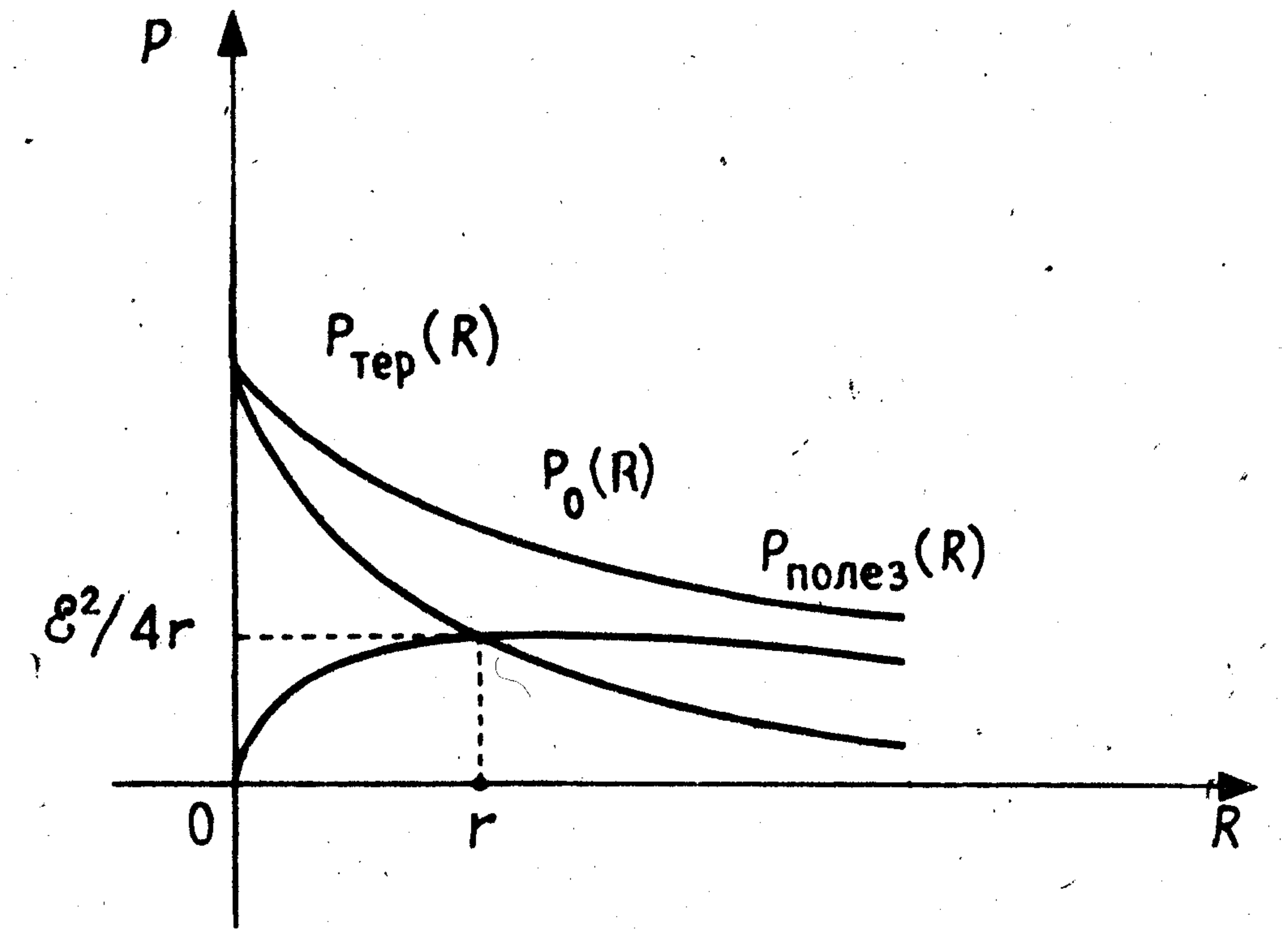


Рис. 2.19.

Максимальное значение $P_{полез} = \mathcal{E}^2/4r$ достигается при $R = r$.

2) $P_{тер}(R)$.

Воспользуемся формулой (2.19):

$$P_{тер}(R) = \mathcal{E}^2 r/(R+r)^2.$$

При $R = 0$

$$P_{тер} = \mathcal{E}^2/r = 4P_{полез\,max},$$

при $R \to \infty$

$$P_{тер} = \mathcal{E}^2 r/R^2,$$

т. е. убывает быстрее, чем $P_{полез}(R)$.

3) $P_0(R)$.

$$P_0 = P_{полез} + P_{тер} = \mathcal{E}^2/(R+r).$$

Соответствующая кривая на рис. 2.19 получена в результате сложения значений $P_{полез}$ и $P_{тер}$.

Задача 14. Электровоз массой $2 \cdot 10^4$ кг движется вверх по склону горы со скоростью 54 км/ч. Найти силу тока в электромоторе, если напряжение в сети 3000 В, кпд электровоза 90%, уклон горы 0,05, а коэффициент трения 0,02.

Дано: $m = 2 \cdot 10^4$ кг, $v = 54$ км/ч (15 м/с), $\sin\alpha = 0,05$, $k = 0,02$, $\eta = 0,9$, $U = 3000$ В; I — ?

Решение. Силу тока при заданном напряжении можно найти, если известно сопротивление мотора или его мощность. Сопротивление не известно. Полезная мощность электровоза равна

$$P_{полез} = F_{тяг} v,$$

где $F_{тяг}$ — сила тяги, v — скорость. Затраченная мощность $P_{затр} = IU$,

$$P_{полез} = \eta P_{затр},$$

или

$$F_{тяг} v = \eta IU,$$

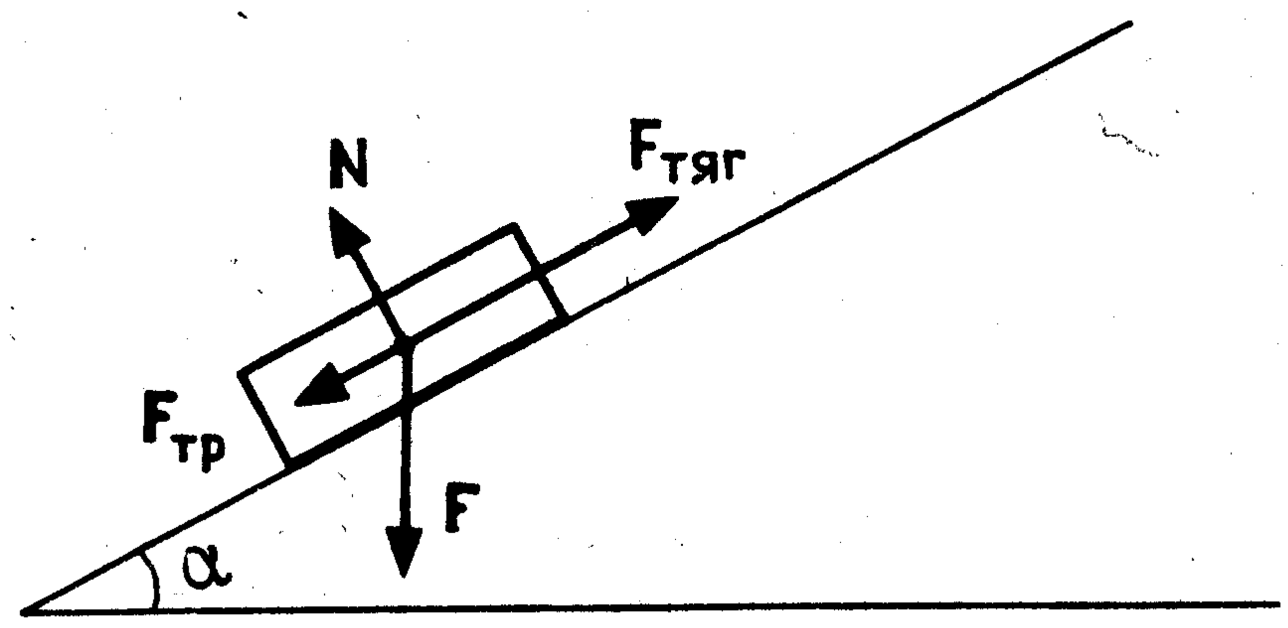


Рис. 2.20.

откуда

$$I = F_{\text{тяг}} v / \eta U.$$

Итак, чтобы найти силу тока, необходимо знать $F_{\text{тяг}}$.

На электровоз действуют четыре силы: сила тяжести $m\mathbf{g}$, сила реакции опоры $\mathbf{N}$, сила тяги $\mathbf{F}_{\text{тяг}}$ и сила трения $\mathbf{F}_{\text{тр}}$ (рис. 2.20). Поскольку он движется равномерно, то

$$m\mathbf{g} + \mathbf{N} + \mathbf{F}_{\text{тяг}} + \mathbf{F}_{\text{тр}} = 0,$$

или в проекциях на оси координат:

$$\text{на ось } x \qquad F_{\text{тяг}} - F_{\text{тр}} - mg\sin\alpha = 0,$$

$$\text{на ось } y \qquad N - mg\cos\alpha = 0.$$

Сила трения равна $F_{\text{тр}} = kN$, отсюда получаем выражение для силы тяги:

$$F_{\text{тяг}} = kmg\cos\alpha + mg\sin\alpha.$$

Подставив $F_{\text{тяг}}$ в выражение для I, окончательно получим

$$I = \frac{mg(k\cos\alpha + \sin\alpha)v}{\eta U},$$

$$[I] = \frac{\text{кг}\cdot\text{м}\cdot\text{м}}{\text{с}^2\cdot\text{с}\cdot\text{В}} = \frac{\text{Дж}}{\text{В}\cdot\text{с}} = \frac{\text{Кл}}{\text{с}} = \text{А}.$$

Окончательно имеем

$$I = \frac{2\cdot 10^4\cdot 9,8(0,02+0,05)\cdot 15}{3000\cdot 0,9}\,\text{А} = 76,2\,\text{А}.$$

Задача 15. Плитка при номинальном напряжении 220 В имеет мощность 800 Вт. При включении плитки в сеть напряжение на розетке изменяется с 200 до 180 В. Определить сопротивление подводящих проводов.

Дано: $U_0 = 220$ В, $P_0 = 800$ Вт, $U_1 = 200$ В, $U_2 = 180$ В; $R_{\text{пр}}$ — ?

Решение. Зная номинальные мощность и напряжение, определим сопротивление плитки, которое считается постоянным:

$$R = U_0^2/P_0.$$

Как видно из рис. 2.21, U_1 — напряжение на распределительном щитке и в отсутствие нагрузки напряжение на розетке, U_2 — напряжение на розетке при включении плитки (U_2 также является падением напряжения на плитке). Падение напряжения на подводящих проводах, $U_{\text{пр}} = U_1 - U_2 = IR_{\text{пр}}$, где I — сила

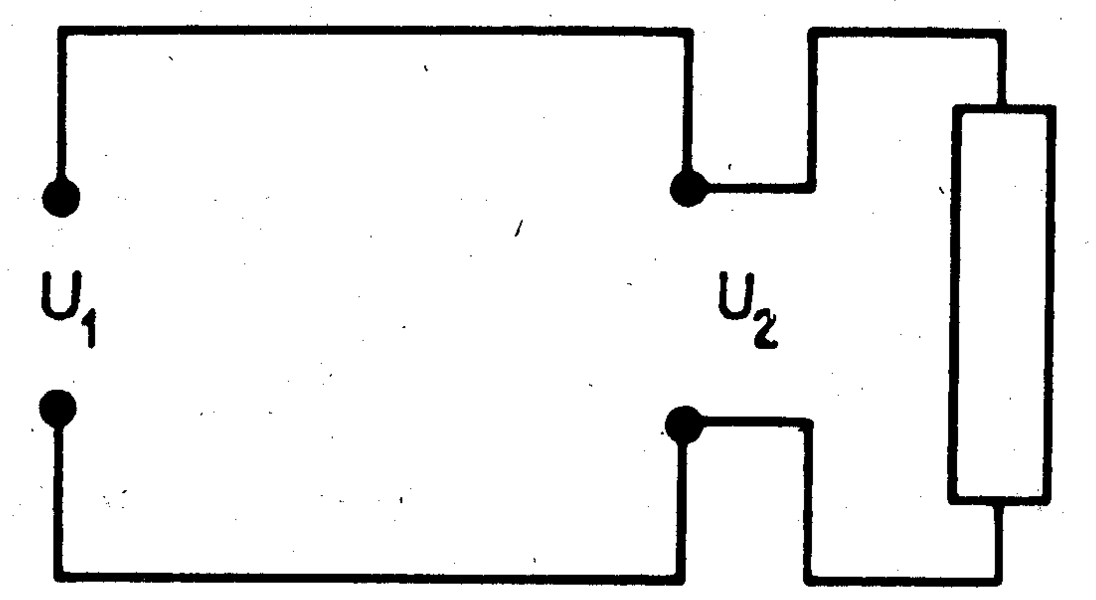


Рис. 2.21.

тока в цепи, которую можно определить, зная сопротивление плитки и падение напряжения на ней

$$I = U^2/R,$$

или, подставив R из формулы для номинальной мощности, имеем

$$I = U_2 P_0/U_0^2.$$

Итак,

$$R_{\text{пр}} = \frac{(U_1 - U_2)U_0^2}{U_2 P_0},$$

$$[R] = \frac{\text{В} \cdot \text{В}^2}{\text{В} \cdot \text{Вт}} = \text{Ом},$$

$$R_{\text{пр}} = \frac{(200 - 180) \cdot 220^2}{180 \cdot 800}\ \text{Ом} = 6{,}72\,\text{Ом}.$$

Задача 16. Электрический чайник имеет две секции нагревателя. При включении первой секции чайник закипает через 10 мин, при включении второй — через 30 мин. Через сколько времени чайник вскипит, если обмотки включить 1) последовательно; 2) параллельно? Начальные температура и масса воды в чайнике одинаковы в обоих случаях.

Дано: $t_1 = 10$ мин (600 с), $t_2 = 30$ мин (1800 с); $t_{\text{посл}}$ — ? $t_{\text{пар}}$ — ?

Решение. Для закипания воды в чайнике по условию задачи требуется одно и то же количество теплоты Q_0. При включении первой секции

$$Q_0 = (U_0^2/R_1)t_1, \qquad (2.32)$$

где R_1 — ее сопротивление. При включении второй секции

$$Q_0 = (U_0^2/R_2)t_2, \qquad (2.33)$$

где R_2 — сопротивление второй секции нагревателя. Приравнивая (2.32) и (2.33), получаем

$$\frac{U_0^2}{R_1}t_1 = \frac{U_0^2}{R_2}t_2, \quad \text{или} \quad \frac{R_1}{R_2} = \frac{t_1}{t_2},$$

откуда

$$R_2 = R_1(t_2/t_1). \qquad (2.34)$$

При включении двух секций последовательно их общее сопротивление равно $R = R_1 + R_2$, следовательно,

$$Q_0 = \frac{U_0^2}{R}t_{\text{посл}} = \frac{U_0^2}{R_1 + R_2}t_{\text{посл}}. \qquad (2.35)$$

Подставив в (2.35) выражение для R_2 (2.34), имеем

$$\frac{U_0^2}{R_1}t_1 = \frac{U_0^2}{R_1+R_2}t_{\text{посл}}, \quad \text{или} \quad \frac{t_1}{R_1} = \frac{1}{R_1(1+t_2/t_1)}t_{\text{посл}},$$

$$t_{\text{посл}} = t_1 + t_2 = 2400\,\text{с} = 40\,\text{мин}.$$

При параллельном соединении секций их общее сопротивление равно

$$R' = \frac{R_1R_2}{R_1+R_2} = \frac{R_1R_1t_2/t_1}{R_1+R_1t_2/t_1} = R_1\frac{t_2}{t_1+t_2},$$

откуда

$$\frac{U_0^2}{R'}t_{\text{пар}} = \frac{U_0^2}{R_1}t_1,$$

или

$$t_{\text{пар}} = \frac{t_1t_2}{t_1+t_2} = 450\,\text{с} = 7,5\,\text{мин}.$$

Задача 17. Какое наименьшее число N одинаковых источников питания с эдс $\mathcal{E} = 1$ В и внутренним сопротивлением $r = 1$ Ом необходимо взять, чтобы на внешнем сопротивлении $R = 10$ Ом выделялась максимальная мощность? Максимальная сила тока $I_{\text{max}} = 2$ А.

Дано: $\mathcal{E} = 1$ В, $r = 1$ Ом, $R = 10$ Ом, $I_{\text{max}} = 2$ А; N — ?

Решение. По условию задачи требуется найти наименьшее число источников питания, поэтому очевидно, что не имеет смысла соединять источники только параллельно или только последовательно. Соединим n параллельных групп из k последовательно соединенных источников в каждой группе. Эдс такой батареи равна $k\mathcal{E}$, а ее внутреннее сопротивление равно rk/n, при этом $k, n > 1$. Сила тока в цепи, согласно закону Ома, равна:

$$I = \frac{k\mathcal{E}}{R + rk/n}. \tag{2.36}$$

Так как $R = \text{const}$, то условие максимума полезной мощности эквивалентно условию максимума силы тока:

$$P_{\text{полез}} = I_{\text{max}}^2 R.$$

Максимальная полезная мощность выделяется тогда, когда внутреннее сопротивление батареи равно внешнему сопротивлению цепи, т. е.

$$R = rk/n. \tag{2.37}$$

Подставим (2.37) в (2.36):

$$I = k\mathcal{E}/2R,$$

т. е. $k = 2RI/\mathcal{E}$, а $n = rk/R = 2rI/\mathcal{E}$. Следовательно, общее число элементов в батарее

$$N = nk = \frac{4I^2rR}{\mathcal{E}^2} = \frac{4\cdot 2^2\cdot 1\cdot 10}{1^2} = 160.$$

При этом $k = 40$, $n = 4$.

Задача 18. При электролизе в течение 1ч шел ток силой 5 А. Какова температура выделившегося атомарного водорода, если при давлении 10^4 Па его объем 1,5 л, электрохимический эквивалент водорода $k = 1,0\cdot 10^{-8}$ кг/Кл, а кпд установки 70%?

Дано: $t = 1$ ч (3600 с), $I = 5$ А, $P = 10^4$ Па, $V = 1,5$ л $(1,5 \cdot 10^{-3}$ м$^3)$, $k = 1,0 \cdot 10^{-8}$ кг/Кл, $\eta = 0,7$; T — ?

Решение. По закону Фарадея масса m выделившегося водорода с учетом η равна:

$$m = \eta k I t. \tag{2.38}$$

Из уравнения Клапейрона — Менделеева

$$\frac{PV}{T} = \frac{m}{\mu} R$$

(где R — универсальная газовая постоянная, $R = 8,31$ Дж/моль · К, μ — молярная масса газа) масса водорода, полученного при электролизе, равна

$$m = \frac{PV\mu}{TR}. \tag{2.39}$$

Из выражений (2.38) и (2.39) получим

$$T = \frac{PV\mu}{R\eta k I t},$$

$$[T] = \frac{\text{Н} \cdot \text{м}^3 \cdot \text{кг} \cdot \text{моль} \cdot \text{К} \cdot \text{Кл}}{\text{м}^2 \cdot \text{моль} \cdot \text{Дж} \cdot \text{кг} \cdot \text{А} \cdot \text{с}} = \text{К},$$

$$T = \frac{10^4 \cdot 1,5 \cdot 10^{-3} \cdot 0,002}{8,31 \cdot 0,7 \cdot 1 \cdot 10^{-8} \cdot 5 \cdot 3600}\ \text{К} = 286\ \text{К}.$$

Задача 19. Определить количество выделившегося на катоде при электролизе алюминия (электролит Al_2SO_4), если затрачено 20 кВт-ч энергии при напряжении на электродах 12 В, кпд установки 80%. Электрохимический эквивалент алюминия $k = 9,3 \cdot 10^{-8}$ кг/Кл.

Дано: $k = 9,3 \cdot 10^{-8}$ кг/Кл, $W = 20$ кВт-ч $(20 \cdot 10^3 \cdot 3600$ Дж $= 7,2 \cdot 10^7$ Дж$)$, $U = 12$ В, $\eta = 0,8$; m — ?

Решение. По закону Фарадея масса выделившегося при электролизе алюминия при кпд установки η

$$m = \eta k q,$$

где q — количество электричества, прошедшего через электролит. Энергия равна $W = qU$, откуда $q = W/U$. Тогда масса определится выражением

$$m = \eta k W/U,$$

$$[m] = \frac{\text{кг}}{\text{Кл}} \frac{\text{Дж}}{\text{В}} = \text{кг},$$

$$m = \frac{0,8 \cdot 9,3 \cdot 10^{-8} \cdot 7,2 \cdot 10^7}{12}\ \text{кг} = 0,45\ \text{кг}.$$

Задача 20. При никелировании изделия в течение 1 ч отложился слой никеля толщиной $l = 0,01$ мм. Определить плотность тока j, если атомная масса никеля $A = 0,0587$ кг/моль, валентность $n = 2$, плотность никеля $\rho = 8,9 \cdot 10^3$ кг/м^3.

Дано: $t = 1$ ч (3600 с), $l = 0,01$ мм $(1 \cdot 10^{-5}$ м$)$, $A = 0,0587$ кг/моль, $n = 2$, $\rho = 8,9 \cdot 10^3$ кг/м^3; j — ?

Решение. Согласно закону электролиза Фарадея, масса выделившегося на катоде никеля

$$m = \frac{1}{F}\frac{A}{n}It, \tag{2.40}$$

где $m = \rho V = \rho l S$, а $I = jS$, где S — площадь покрытия никелем, F — постоянная Фарадея, $F = 9,65 \cdot 10^4$ Кл/моль. Подставив выражения для массы никеля m и силы тока I в (2.40), получим:

$$\rho l S = \frac{1}{F}\frac{A}{n} jSt,$$

откуда

$$j = \frac{\rho l F n}{At},$$

$$[j] = \frac{(\text{кг}/\text{м}^3)\cdot\text{м}\cdot(\text{Кл}/\text{моль})}{(\text{кг}/\text{моль})\cdot\text{с}} = \frac{\text{Кл}}{\text{м}^2\cdot\text{с}} = \frac{\text{А}}{\text{м}^2},$$

$$j = \frac{8,9\cdot 10^3\cdot 10^{-5}\cdot 9,65\cdot 10^4\cdot 2}{5,87\cdot 10^{-2}\cdot 3600}\,\frac{\text{А}}{\text{м}^2} = 81,3\frac{\text{А}}{\text{м}^2}.$$

Задача 21. Требуется передать электрическую энергию на расстояние 2000 км по медным проводам, причем потеря энергии в проводах не должна превышать 3%. Передаваемая мощность $P = 2$ МВт при напряжении 1000 кВ. Определить сечение проводов, если удельное сопротивление меди $\rho = 1,7 \cdot 10^{-8}$ Ом · м.

Дано: $l = 2000$ км ($2\cdot 10^6$ м), $P_{\text{пр}} = 0,03P$, $P = 2$ МВт ($2\cdot 10^6$ Вт), $U = 1000$ кВ (10^6 В), $\rho = 1,7\cdot 10^{-8}$ Ом · м; S — ?

Решение. Потеря мощности в проводах равна $P_{\text{пр}} = I^2 R_{\text{пр}}$ и по условию задачи составляет $0,03P$, где I — ток в цепи, равный $I = P/U$, а $R_{\text{пр}}$ — сопротивление проводов. Учитывая двухпроводность линии, $R_{\text{пр}} = 2\rho l/S$. Тогда

$$0,03P = \frac{P^2}{U^2}R_{\text{пр}} = \frac{P^2}{U^2}\rho\frac{2l}{S},$$

откуда

$$S = \frac{P}{U^2}\rho\frac{2l}{0,03},$$

$$[S] = (\text{Вт}/\text{В}^2)\cdot\text{Ом}\cdot\text{м}\cdot\text{м} = \text{м}^2,$$

$$S = \frac{2\cdot 10^6\cdot 1,7\cdot 10^{-8}\cdot 4\cdot 10^6}{10^{12}\cdot 0,03}\,\text{м}^2 = 4,5\cdot 10^{-6}\,\text{м}^2 = 4,5\,\text{мм}^2.$$

Задачи для самостоятельного решения

Задача 1. Найти силу тока в отдельных проводниках, если $R_1 = 3$ Ом, $R_2 = 2$ Ом, $R_3 = 7,55$ Ом, $R_4 = 2$ Ом, $R_5 = 5$ Ом, $R_6 = 10$ Ом, $U_{AB} = 100$ В (рис. 2.22).

Ответ: 4А, 6А, 10А, 6,25А, 2,5А, 1,25А.

Задача 2. Четыре проводника соединены, как показано на рис. 2.23. Сопротивления проводников: $R_1 = 3$ Ом, $R_2 = 6$ Ом, $R_3 = 18$ Ом, и $R_4 = 6$ Ом. Они

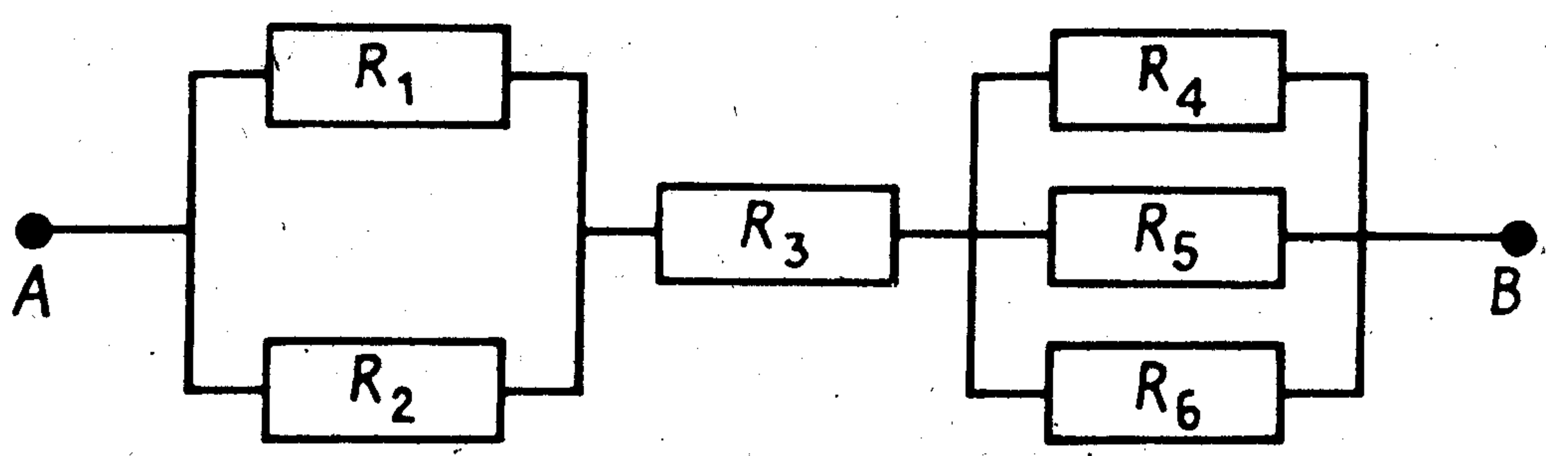


Рис. 2.22.

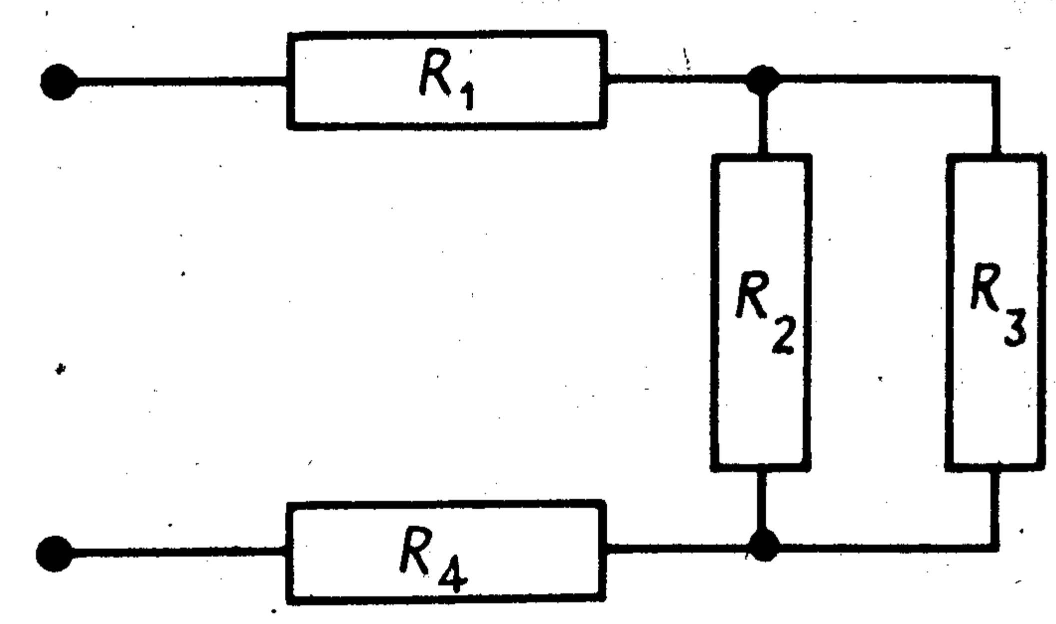


Рис. 2.23.

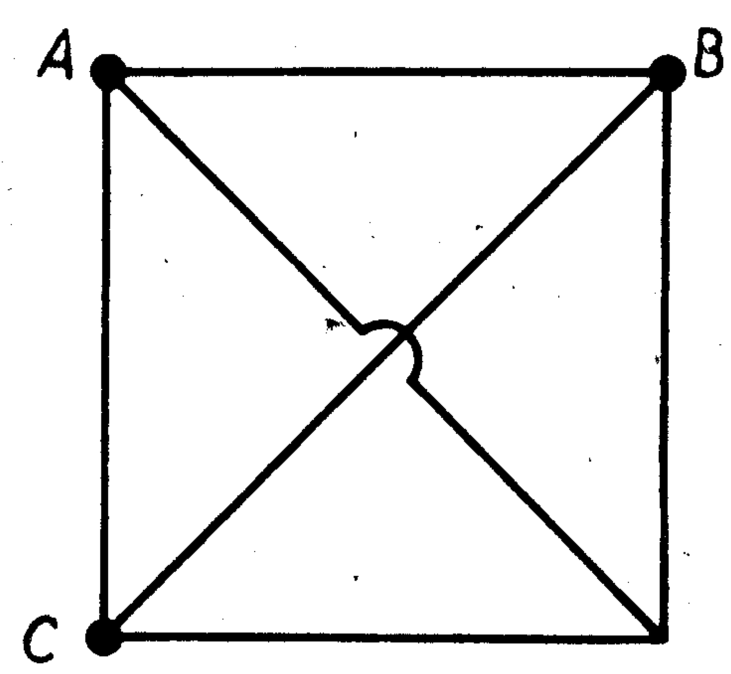


Рис. 2.24.

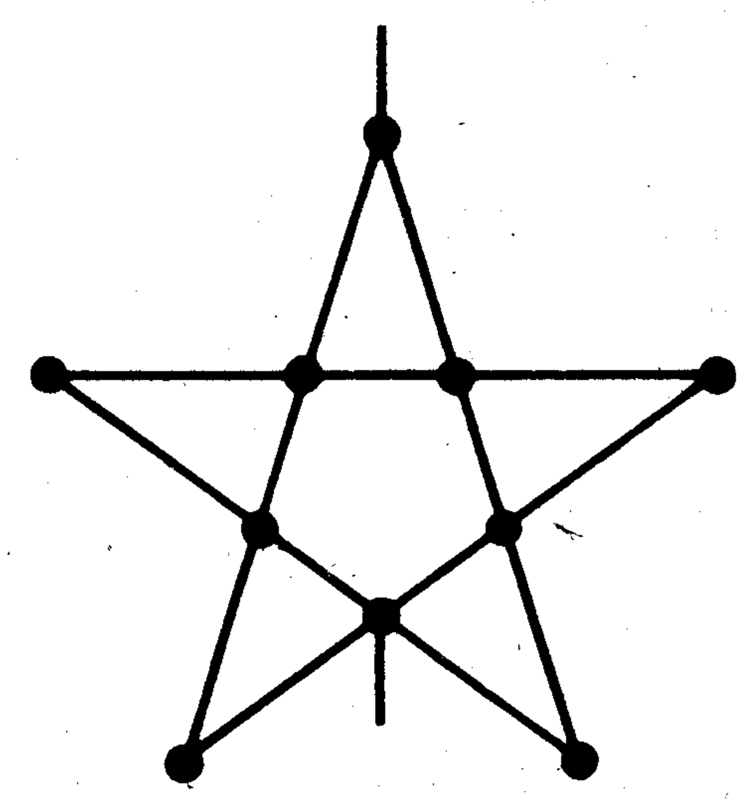


Рис. 2.25.

включены в сеть с напряжением 13,5 В. Каково падение напряжения на сопротивлении R_2 и сила тока в нем?

Ответ: 4,5 В, 0,75 А.

Задача 3. Сопротивление проводников, соединенных в квадрат, и диагоналей равны r (рис. 2.24). Определить эквивалентное сопротивление при подключении источника к точкам 1) A и B; 2) B и C.

Ответ: $r/2$.

Задача 4. Сопротивления проводников, соединенных в звезду, равны r (рис. 2.25). Определить эквивалентное сопротивление.

Ответ: $(7/6)r$.

Задача 5. К батарее через реостат подключен вольтметр. Если сопротивление резистора уменьшить в три раза по сравнению с первоначальным значением, то показания вольтметра возрастут в два раза. Во сколько раз изменятся показания вольтметра, если сопротивление реостата уменьшить до нуля?

Ответ: увеличатся в 4 раза.

Задача 6. Когда сопротивление внешней части источника тока уменьшили на 30%, ток увеличился на 30%. На сколько процентов увеличится ток, если сопротивление внешней части цепи уменьшится на 50%?

Ответ: 62,5%.

Задача 7. Два одинаковых сопротивления подключаются к источнику тока последовательно и параллельно. В каком из случаев кпд цепи будет больше?

Ответ: в первом случае.

Задача 8. Аккумулятор заряжается током 4 А. Какое дополнительное сопротивление следует ввести в цепь, если остаточная эдс аккумулятора 9 В, его внутреннее сопротивление 1 Ом, а зарядка осуществляется от источника постоянного напряжения 21 В.

Ответ: 2 Ом.

Задача 9. Вольтметр, подключенный к аккумулятору с внутренним сопротивлением 1 Ом, показывает 1,2 В. Если последовательно с ним включено сопротивление 20 Ом, вольтметр показывает 1 В. Определить сопротивление вольтметра.

Ответ: 99 Ом.

Задача 10. Амперметр для измерения тока до 2 А с внутренним сопротивлением 0,1 Ом необходимо использовать для измерения токов до 22 А. Какое сопротивление должен иметь шунт?

Ответ: 0,01 Ом.

Задача 11. Элемент с внутренним сопротивлением $r = 6$ Ом замкнут на сопротивление 24 Ом. При каком еще внешнем сопротивлении полезная мощность цепи будет такой же?

Ответ: 1,5 Ом.

Задача 12. Два проводника соединены параллельно, $R_1 = 10$ Ом и $R_2 = 16$ Ом. При прохождении тока на первом проводнике выделяется количество теплоты, равное 40 Дж. Определить, какое количество теплоты выделится в обоих проводниках при их последовательном соединении за то же время.

Ответ: 15,4 Дж.

Задача 13. Подъемный кран начинает поднимать груз массой 1 т с ускорением $0,3 м/с^2$. Электродвигатель крана питается от сети напряжением 380 В и имеет кпд 60%. Определить скорость груза в тот момент, когда через обмотку двигателя течет ток 120 А.

Ответ: 2,7 м/с.

Задача 14. Чему равно сопротивление подводящих проводов, если при соединении двух одинаковых сопротивлений $R_1 = R_2 = 100$ Ом параллельно и последовательно на них выделяется одинаковое количество теплоты?

Ответ: 100 Ом.

Задача 15. Какое время требуется для нагревания 2 л воды от 20°С до кипения в электрическом чайнике, если напряжение в сети 220 В, сопротивление обмотки чайника 20 Ом, а кпд чайника 70%?

Ответ: $396,7\,с = 6,6\,мин.$

Задача 16. Лифт массой 1000 кг поднимается на высоту 30 м за одну минуту. Напряжение на зажимах мотора 220 В, его кпд 90%. Определить величину тока в моторе и расход энергии при подъеме.

Ответ: 25 А, 333 кДж.

Задача 17. Расстояние от трансформаторной будки до потребителя 40 м. Напряжение на выходе трансформатора 220 В. Рассчитать сечение медных проводов, подводящих ток к потребителю, если необходимо подать напряжение 200 В, а мощность потребителя 10^4 Вт.

Ответ: $3,4 \cdot 10^{-6}\,м^2$

Задача 18. Требуется передать мощность 100 кВт на расстояние 67,5 км, чтобы потери на нагревание проводов не превышали 3% передаваемой энергии. Какова масса проводов, если ток передается под напряжением 6 кВ, плотность материала провода $8,8 \cdot 10\,\text{кг/м}^3$, его удельное сопротивление $1,7 \cdot 10^{-8}$ Ом · м.

Ответ: $28 \cdot 10^3$ кг.

Задача 19. От источника с напряжением 1200 В требуется передать мощность 10 кВт на расстояние 800 м. Рассчитать сечение медного провода, если допустимые потери напряжения не должны превышать 2%.

Ответ: $9,4\,\text{мм}^2$.

Задача 20. Определить величину элементарного электрического заряда, если известно, что постоянная Фарадея $F = 9,65 \cdot 10^4$ Кл/моль и число Авогадро $N_A = 6,02 \cdot 10^{23}\,\text{моль}^{-1}$.

Ответ: $1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл.

Задача 21. При серебрении пластинки через раствор электролита проходит ток плотностью $j = 0,6\,\text{А/см}^2$. С какой средней скоростью растет толщина серебряного слоя, если плотность серебра $10,5 \cdot 10^3\,\text{кг/м}^3$, а его электрохимический эквивалент $1,118 \cdot 10^{-6}$ кг/Кл?

Ответ: $7,5 \cdot 10^{-7}$ м/с.

Глава 3
Магнитное поле

Вокруг проводников с током и постоянных магнитов существует магнитное поле. Оно возникает вокруг любого направленно движущегося электрического заряда, а также при наличии переменного во времени электрического поля (и в вакууме, и в диэлектриках).

Магнитное поле можно обнаружить, помещая в него магнитные стрелки или проводники с током, так как оно оказывает на них ориентирующее действие. Магнитное поле можно исследовать с помощью замкнутого контура с током. Геометрические размеры контура должны быть настолько малы, чтобы в его пределах поле не изменялось. На контур в магнитном поле действует механический вращательный момент. Отношение максимального вращательного момента $M_{\max}$ к произведению силы тока I, текущего по контуру, и площади поверхности S, охватываемой этим контуром, величина постоянная:

$$M_{\max}/IS = \mathrm{const}.$$

Этим отношением определяется основная силовая характеристика магнитного поля — *вектор магнитной индукции* **B**. Произведение IS называется *магнитным моментом* контура с током:

$$P_{\text{м}} = IS.$$

Направление магнитного момента совпадает с направлением индукции магнитного поля, создаваемого в центре контура текущим по нему током. Направление вектора **B** определяется по правилу: если направление вращения винта совпадает с направлением тока в контуре, то его поступательное движение укажет направление индукции магнитного поля и, соответственно, магнитного момента (рис. 3.1) (следствие *правила правого винта*).

Рис. 3.1.

Итак, модуль вектора магнитной индукции определяется максимальным вращательным моментом, действующим на контур с током, магнитный момент которого равен единице:

$$B = M_{\max}/P_{\text{м}}. \tag{3.1}$$

Магнитная индукция измеряется в *теслах* (Тл). Тесла — это индукция такого однородного магнитного поля, которое действует с максимальным вращательным моментом 1 Н · м на контур с током, магнитный момент которого равен 1 А · м^2.

Индукция магнитного поля — экспериментально измеряемая величина, зависящая от токов, создающих поле, и свойств среды, в которой оно создано.

Магнитное поле, так же как и электрическое, изображается силовыми линиями, т. е. линиями, касательная в каждой точке которых совпадает с вектором магнитной индукции **B**. Однородное магнитное поле изображается параллельными линиями, отстоящими на равном расстоянии друг от друга. Направление линий магнитной индукции поля, созданного током, определяется по правилу правого винта: если направление поступательного движения винта совпадает с направлением тока, то направление вращения головки винта укажет направление силовых линий магнитного поля этого тока.

Наряду с вектором магнитной индукции **B** вводится еще одна силовая характеристика магнитного поля — *напряженность магнитного поля* **H**. Векторы **B** и **H** связаны соотношением

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mu \mathbf{H}. \tag{3.2}$$

Напряженность магнитного поля измеряется в амперах на метр (А/м), μ_0 — магнитная постоянная, равная $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м, μ — относительная магнитная проницаемость среды, показывающая, во сколько раз индукция магнитного поля в данной среде больше или меньше, чем в вакууме. Напряженность магнитного поля определяется только конфигурацией проводников, создающих поле, и токами, текущими по этим проводникам, т. е. макроисточниками поля, и не зависит от магнитных свойств среды, в которой поле создается.

Магнитное поле проводников с током различной конфигурации

Индукция магнитного поля, создаваемого проводниками с током различной конфигурации, определяется по *закону Био — Савара — Лапласа.* Дальнейшие формулы приводим без вывода.

1) Индукция магнитного поля, создаваемого бесконечным прямым проводником с током, равна:

$$B = \mu_0 \mu I / 2\pi d. \tag{3.3}$$

Конфигурация силовых линий представлена на рис. 3.2.

2) Индукция магнитного поля в центре кругового витка с током (рис. 3.3) равна

$$B = \mu_0 \mu I / 2r, \tag{3.4}$$

где r — радиус витка.

3) Индукция магнитного поля в центре соленоида (вдали от краев соленоида, где поле существенно неоднородно) равна (рис. 3.4):

$$B = \mu_0 \mu I n, \tag{3.5}$$

где n — число витков, приходящееся на единицу длины соленоида.

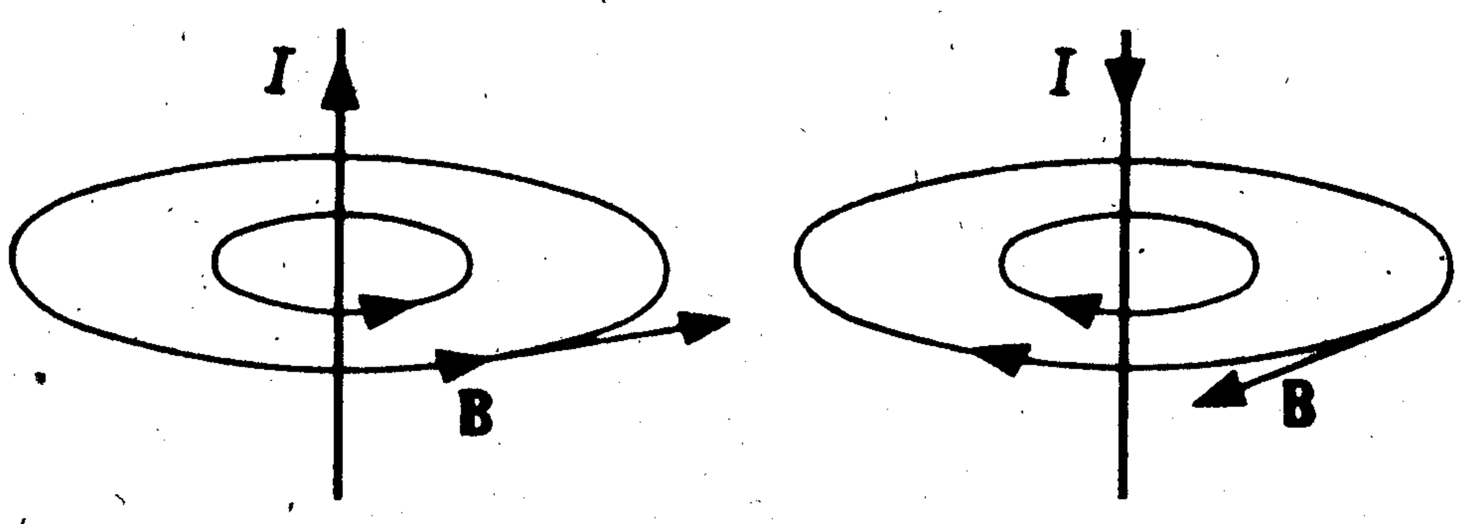


Рис. 3.2.

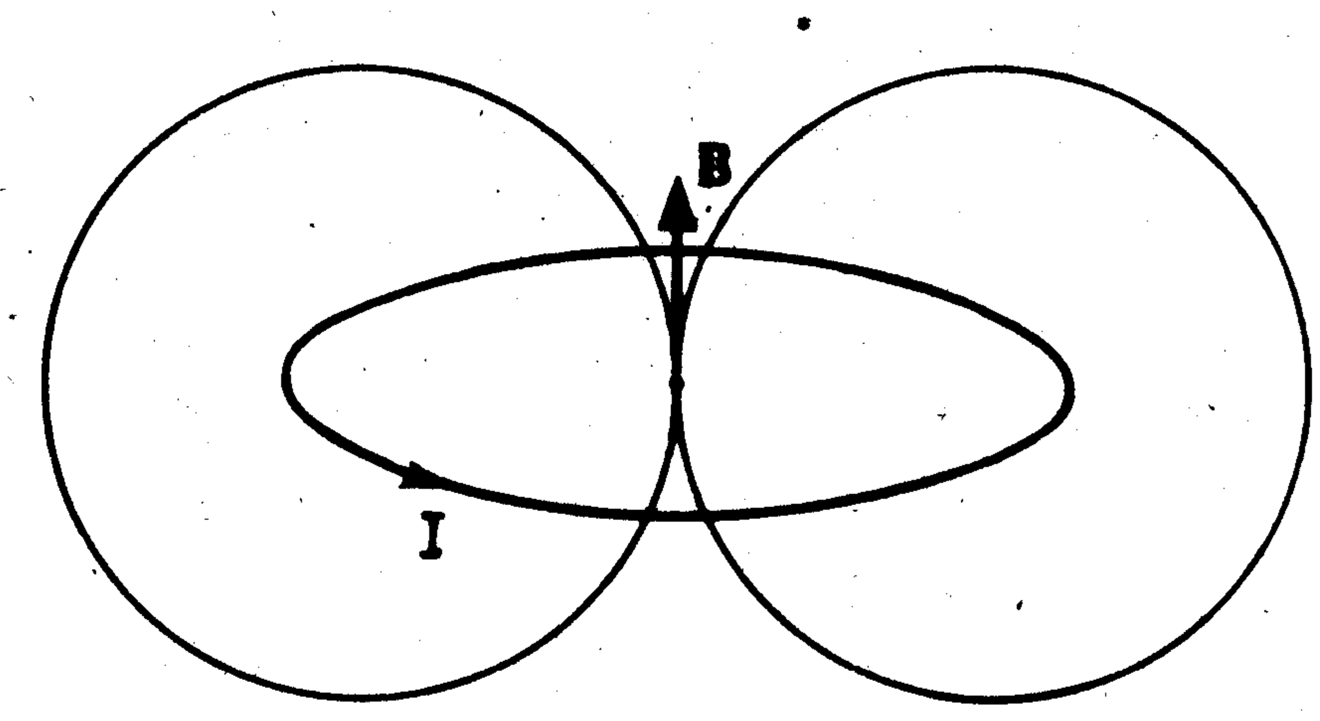


Рис. 3.3.

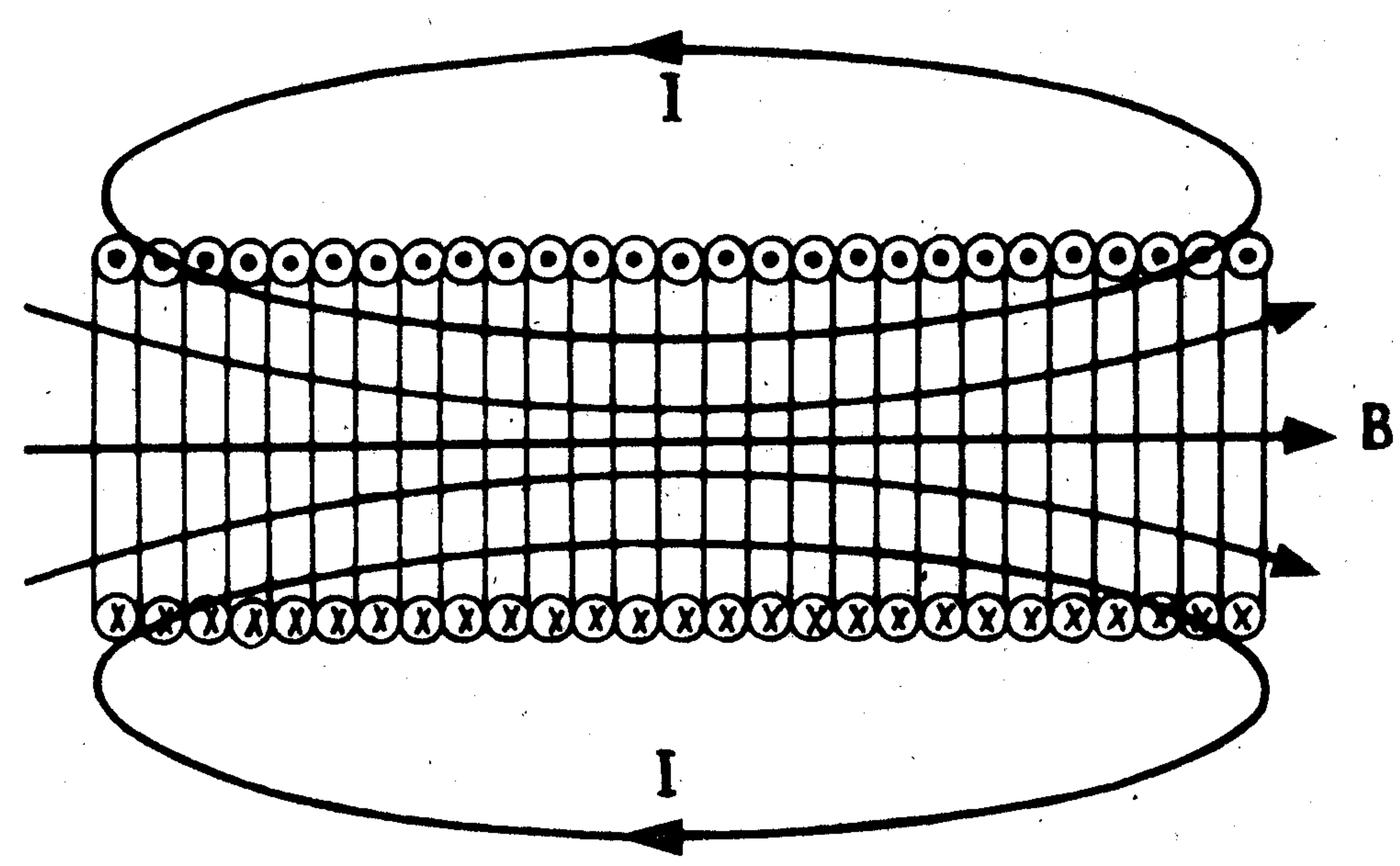


Рис. 3.4.

Если поле создается несколькими источниками, то вектор магнитной индукции в данной точке определяется, как векторная сумма векторов магнитной индукции полей, создаваемых каждым источником в отдельности $\mathbf{B}_i$ (принцип суперпозиции):

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2 + \mathbf{B}_3 + \ldots + \mathbf{B}_n = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{B}_i. \tag{3.6}$$

Заметим, что силовые линии магнитного поля замкнуты, так как в природе не существует положительных и отрицательных магнитных зарядов.

Закон Ампера

Поместим в магнитное поле проводник длиной l, по которому течет ток I (рис. 3.5). На проводник действует сила, прямо пропорциональная силе тока, текущего по проводнику, индукции магнитного поля, длине проводника, и зависящая от ориентации проводника в магнитном поле.

Закон Ампера:

$$|\mathbf{F}| = I|\mathbf{B}|l\sin\alpha, \tag{3.7}$$

где α — угол между направлением тока в проводнике и направлением вектора магнитной индукции $\mathbf{B}$.

Направление *силы Ампера* определяется по *правилу левой руки*: если левую руку расположить так, что магнитные силовые линии входят в ладонь, четыре вытянутых пальца направить по току, то отогнутый большой палец укажет

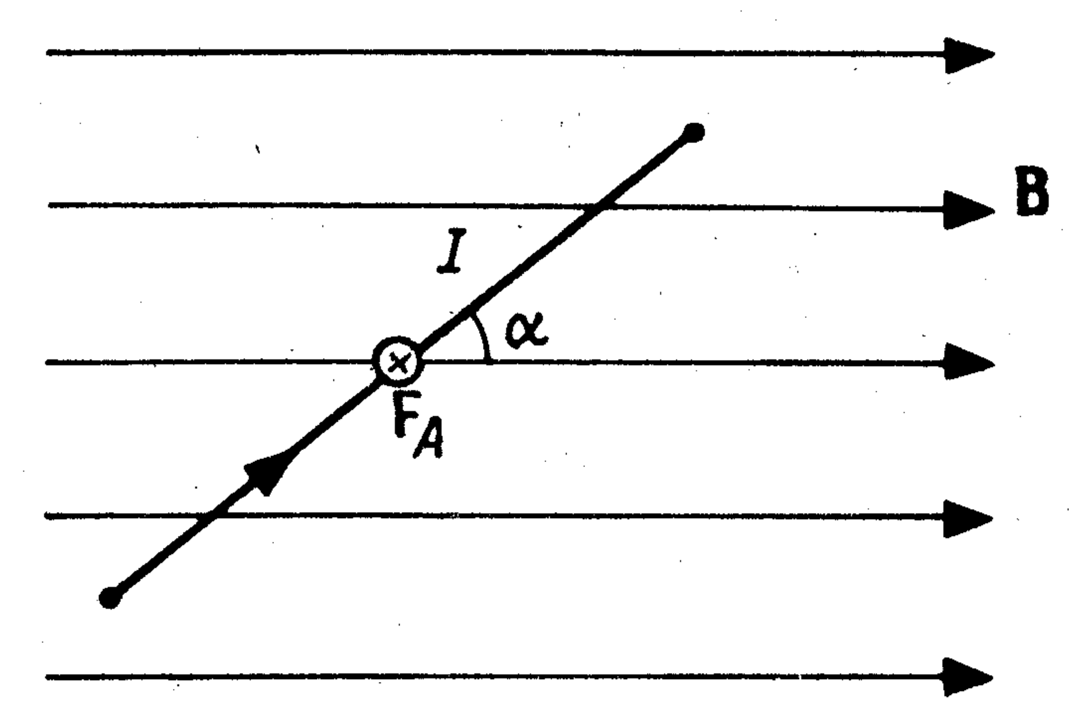


Рис. 3.5.

направление силы. Очевидно, что сила Ампера равна нулю, если проводник расположен вдоль силовых линий поля и максимальна, если проводник перпендикулярен силовым линиям.

Взаимодействие двух прямолинейных проводников с током

Пусть по двум параллельным проводникам, отстоящим друг от друга на расстоянии d, текут токи в одном направлении I_1 и I_2 (рис. 3.6). Рассмотрим проводник 2 в поле проводника с током I_1. Индукция магнитного поля, созданного проводником с током I_1 на расстоянии d, согласно (3.3), равна

$$B_1 = \frac{\mu_0 \mu I_1}{2\pi d}.$$

По закону Ампера на проводник 2 действует сила:

$$F_A = I_2 B_1 \Delta l,$$

где Δl — элемент длины проводника 2:

$$F_A = \frac{\mu_0 \mu}{4\pi} \frac{2 I_1 I_2}{d} \Delta l. \qquad (3.8)$$

На такой же элемент длины проводника 1 действует сила, равная по величине (3.8) и противоположная по направлению. Поскольку закон (3.8) легко проверить опытным путем, то из него может быть выведена основная электрическая единица СИ — ампер. 1 ампер — это сила такого тока, при протекании которого по двум бесконечным параллельным проводникам ничтожно малого сечения, расположенным друг от друга на расстоянии 1 м в вакууме, проводники взаимодействуют с силой $2 \cdot 10^{-7}$ Н на каждый метр длины проводника. Из рисунка следует, что токи, текущие в одном направлении, притягиваются, в противоположных — отталкиваются.

Рамка с током в магнитном поле

Поместим квадратную рамку в однородное магнитное поле, индукция которого $\mathbf{B}$ (рис. 3.7). Сторона рамки равна a, сила тока, текущая по контуру, равна I. На стороны рамки действуют силы $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$, $\mathbf{F}_3$, $\mathbf{F}_4$. Силы $\mathbf{F}_2$ и $\mathbf{F}_4$ равны по

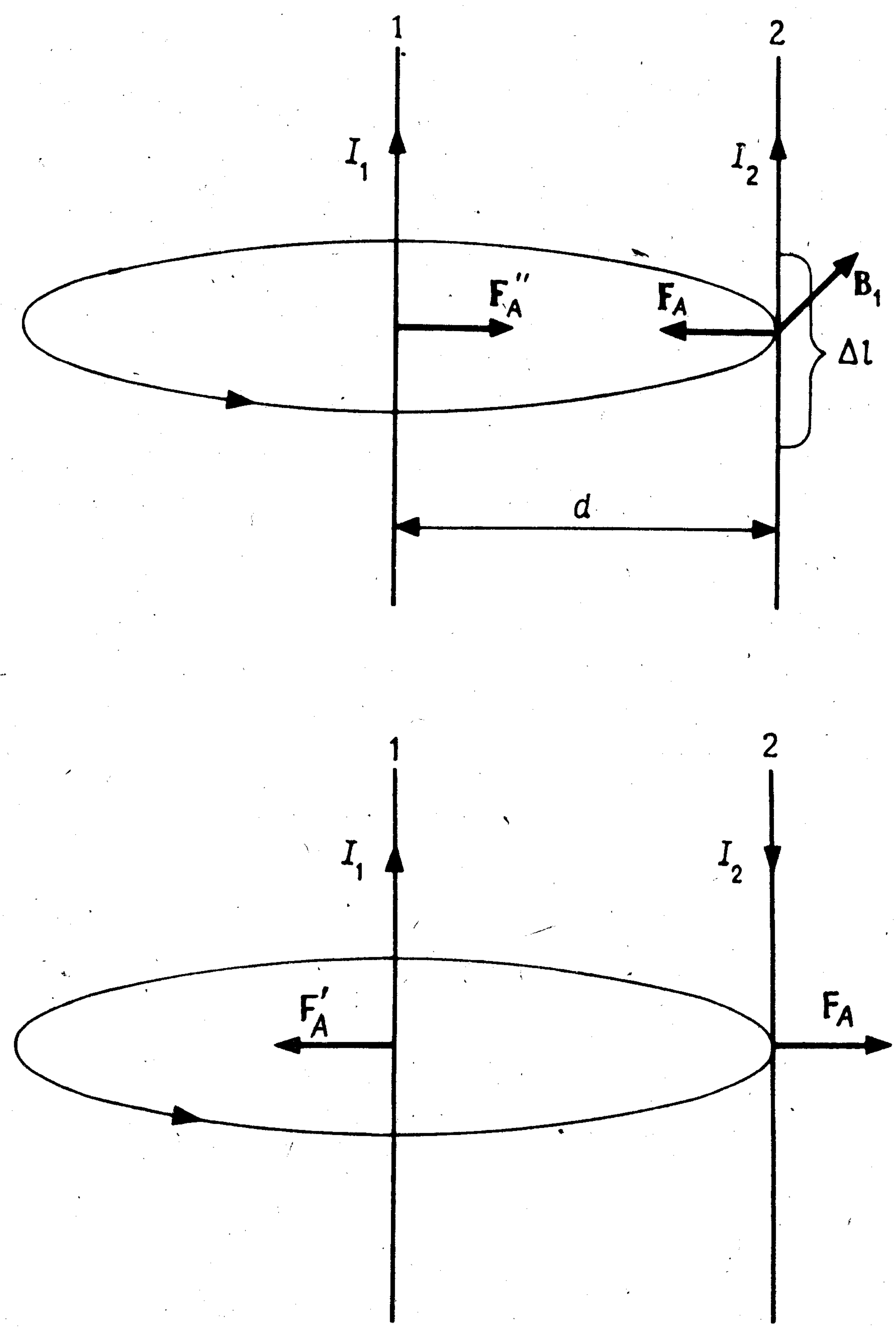


Рис. 3.6.

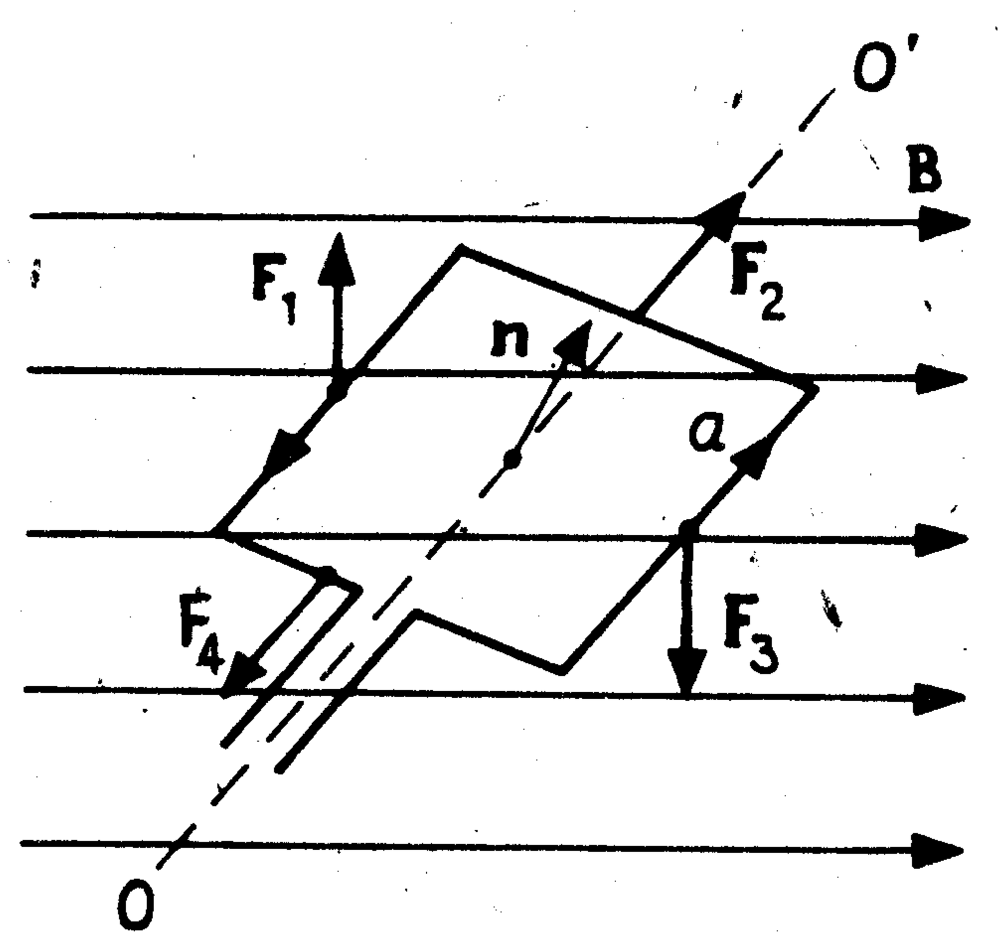
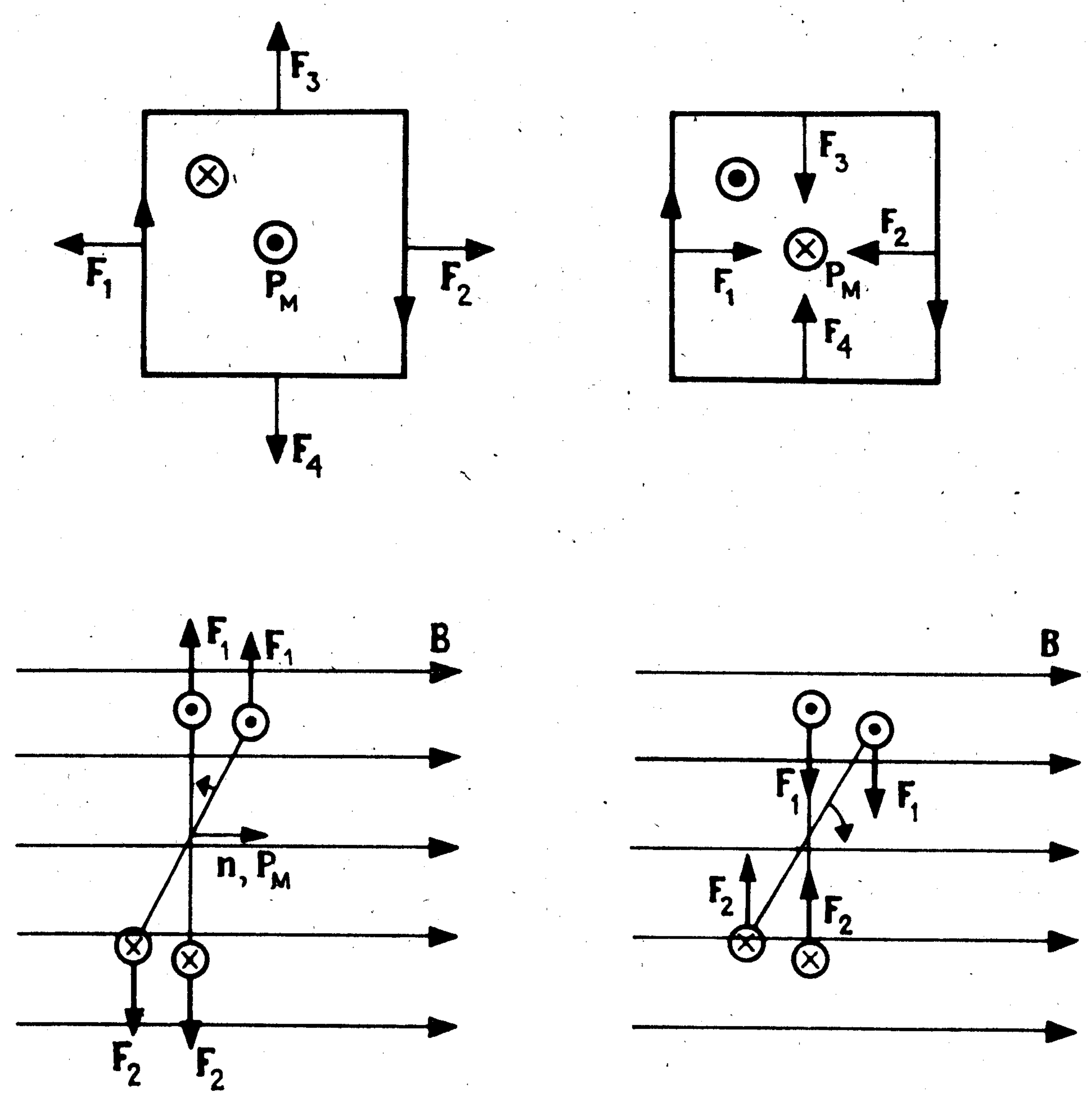


Рис. 3.7.



а *б*

Рис. 3.8.

величине, направлены вдоль OO' и взаимно компенсируют друг друга. Силы $\mathbf{F}_1$ и $\mathbf{F}_3$ равны по величине:

$$F_1 = F_3 = IaB,$$

но направлены в противоположные стороны. Под действием этой пары сил рамка будет поворачиваться вокруг оси OO'. Механический вращательный момент, действующий на рамку, равен сумме моментов сил $\mathbf{F}_1$ и $\mathbf{F}_3$:

$$M_{\text{вр}} = F_1(a/2)\sin\alpha + F_3(a/2)\sin\alpha = IBa^2\sin\alpha, \tag{3.9}$$

$$M_{\text{вр}} = ISB\sin\alpha,$$

$$M_{\text{вр}} = P_{\text{м}}B\sin\alpha,$$

где α — угол между направлениями вектора магнитной индукции $\mathbf{B}$ и магнитного момента $\mathbf{P}_{\text{м}}$.

Максимальный момент действует на рамку тогда, когда силовые линии лежат в плоскости рамки: $\alpha = \pi/2$. Если $\alpha = 0$ или π, то $M_{\text{вр}} = 0$, причем в первом случае рамка находится в состоянии устойчивого, во втором — неустойчивого равновесия (рис. 3.8,*а*, *б*). Из рис. 3.8,*а* видно, что при малом отклонении рамки от положения равновесия момент сил, действующих на рамку, стремится вернуть ее в первоначальное равновесие. При отклонении же рамки от положения равновесия во втором случае (рис. 3.8,*б*) момент сил, действующих на нее, уводит ее от положения равновесия.

Движение заряженных частиц в магнитном поле

На проводник с током в магнитном поле действует сила Ампера $F_A = IBl\sin\alpha$. Ток, в свою очередь, это направленное движение заряженных частиц. Сила тока равна

$$I = qnvS,$$

где q — заряд частицы, n — концентрация движущихся заряженных частиц, v — средняя скорость их направленного движения, S — площадь поперечного сечения проводника. Подставив I в выражение для F_A, получим

$$F_A = qnvSlB\sin\alpha,$$

где $nSl = N$ — общее число частиц, создающих ток. Тогда сила, действующая на отдельный движущийся заряд — *сила Лоренца*, равна

$$F_Л = qvB\sin\alpha, \tag{3.10}$$

где α — угол между векторами скорости и магнитной индукции.

Направление силы Лоренца определяется для положительно заряженной частицы по правилу левой руки. Если левую руку расположить так, что силовые линии поля входят в ладонь, вытянутые четыре пальца направлены вдоль скорости, то отогнутый большой палец укажет направление силы Лоренца (рис. 3.9). Для частицы с отрицательным зарядом направление силы противоположно (рис. 3.10).

Из формулы (3.10) для силы Лоренца следует, что магнитное поле не действует 1) на неподвижную частицу (при $v = 0$ $F_Л = 0$); 2) на нейтральную частицу (при $q = 0$ $F_Л = 0$); 3) если скорость частицы направлена вдоль линий индукции поля (при $\alpha = 0, \pi$, $F_Л = 0$). Так как сила Лоренца направлена перпендикулярно скорости, то эта сила не изменяет величины скорости, а изменяет только ее направление, частица движется с центростремительным (нормальным) ускорением a_n. Пусть заряженная частица, масса и заряд которой m и q, влетает перпендикулярно вектору **B** со скоростью **v**. На частицу действует сила Лоренца

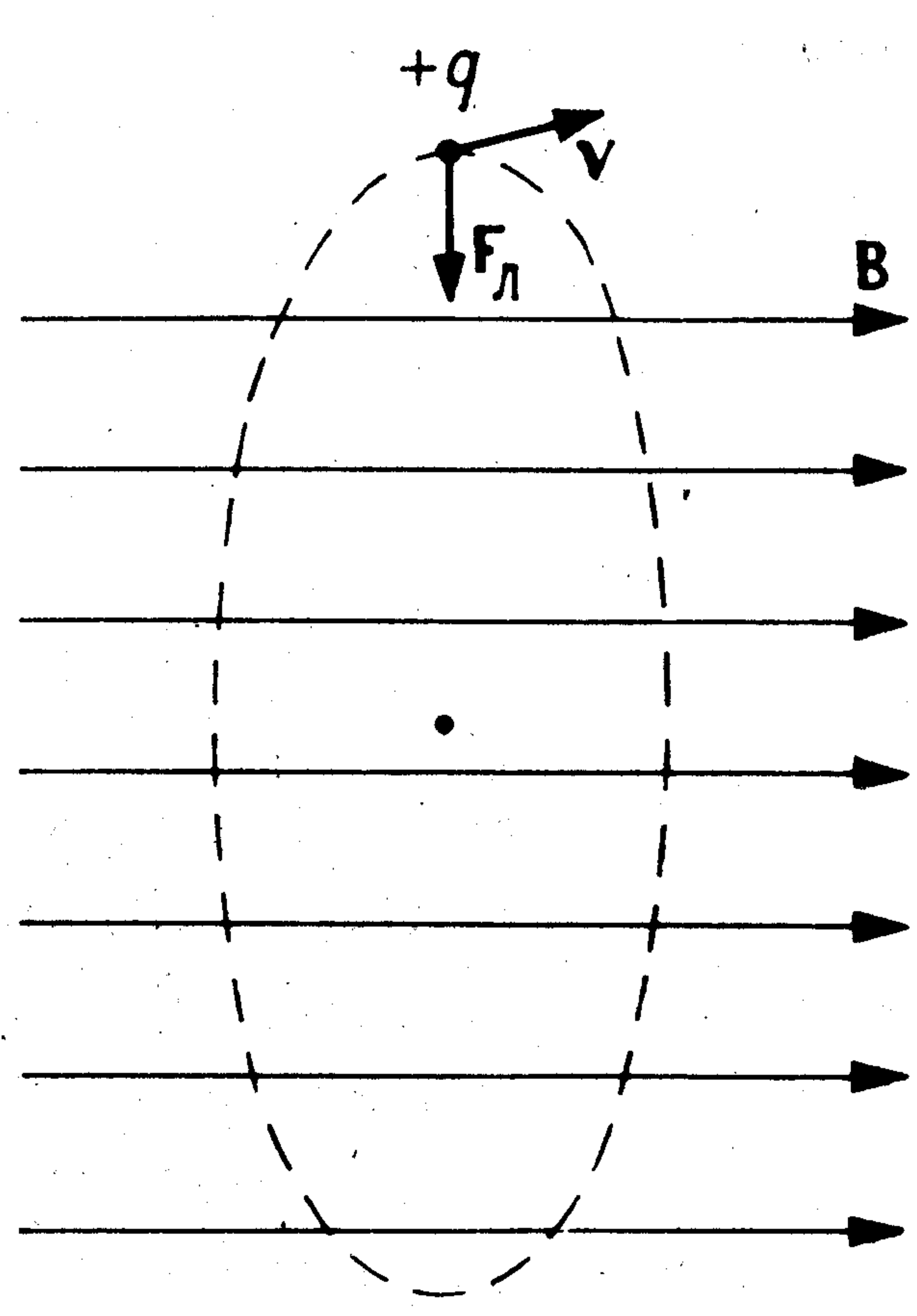


Рис. 3.9.

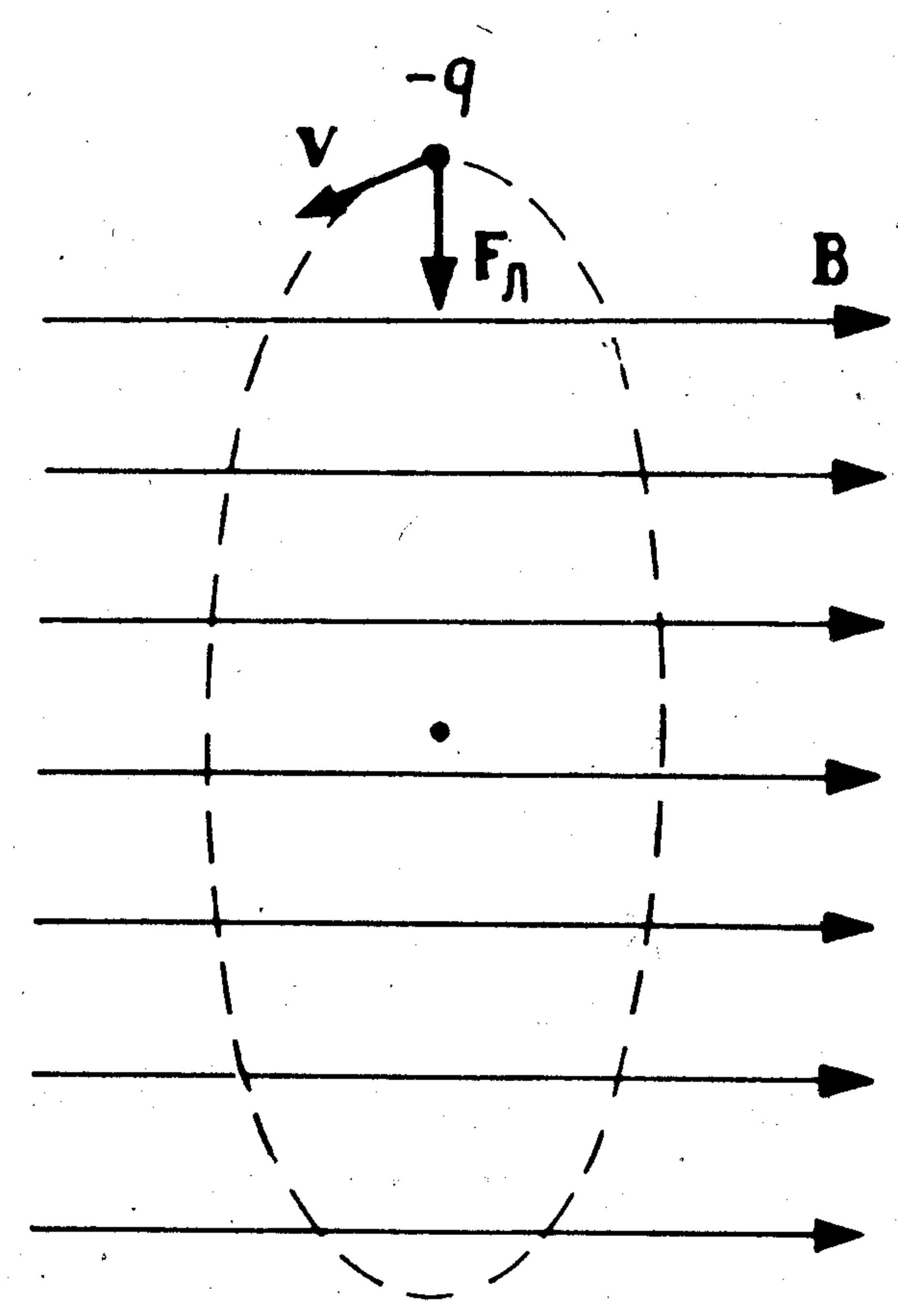


Рис. 3.10.

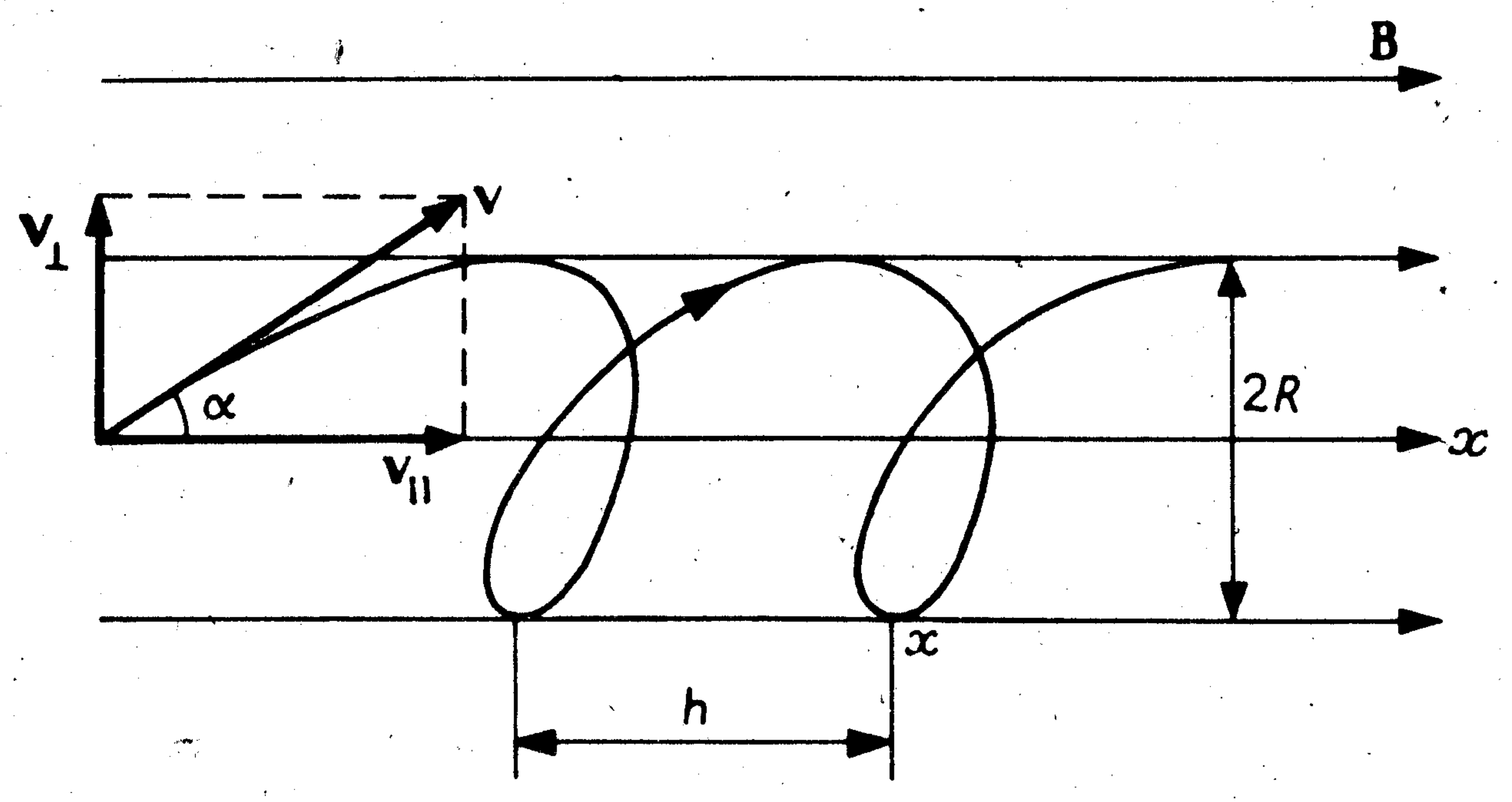


Рис. 3.11.

$(\alpha = \pi/2)$

$$F_Л = qvB.$$

Основной закон динамики для частицы, движущейся по окружности, имеет вид:

$$mv^2/R = qvB,$$

откуда радиус окружности, по которой движется частица, равен

$$R = mv/qB. \tag{3.11}$$

Как видим, в однородном магнитном поле $R = \text{const}$ и, следовательно, траектория частицы — дуга окружности. Период движения частицы по окружности равен

$$T = 2\pi R/v = 2\pi m/qB. \tag{3.12}$$

Сила Лоренца всегда перпендикулярна скорости, а следовательно, и элементарному перемещению. Поэтому работа силы Лоренца равна нулю.

Если частица влетает под углом α к линиям индукции магнитного поля (рис. 3.11), то она участвует в сложном движении. Разложим вектор скорости на две составляющие $v_{\parallel}$ и $v_{\perp}$, очевидно, что частица будет двигаться равномерно вдоль силовых линий магнитного поля со скоростью $v_{\parallel}$ (на частицу, движущуюся вдоль силовых линий, магнитное поле не действует) и равномерно двигаться по окружности со скоростью $v_{\perp}$ в плоскостях, перпендикулярных вектору **B** (на частицу действует сила Лоренца $F_Л = qv_{\perp}B$). В результате сложения этих движений частица будет двигаться по винтовой линии.

Магнитный поток

Магнитным потоком Φ через некоторую поверхность S (рис. 3.12) называется скалярная величина, равная произведению модуля вектора магнитной индукции на площадь этой поверхности и косинус угла между нормалью **n** к ней и направлением вектора магнитной индукции **B**:

$$\Phi = |\mathbf{B}| S \cos\alpha, \tag{3.13}$$

где α — угол между направлениями векторов **n** и **B**. Если магнитное поле неоднородно, то поверхность S разбивают на элементарные площадки ΔS_i (рис. 3.13),

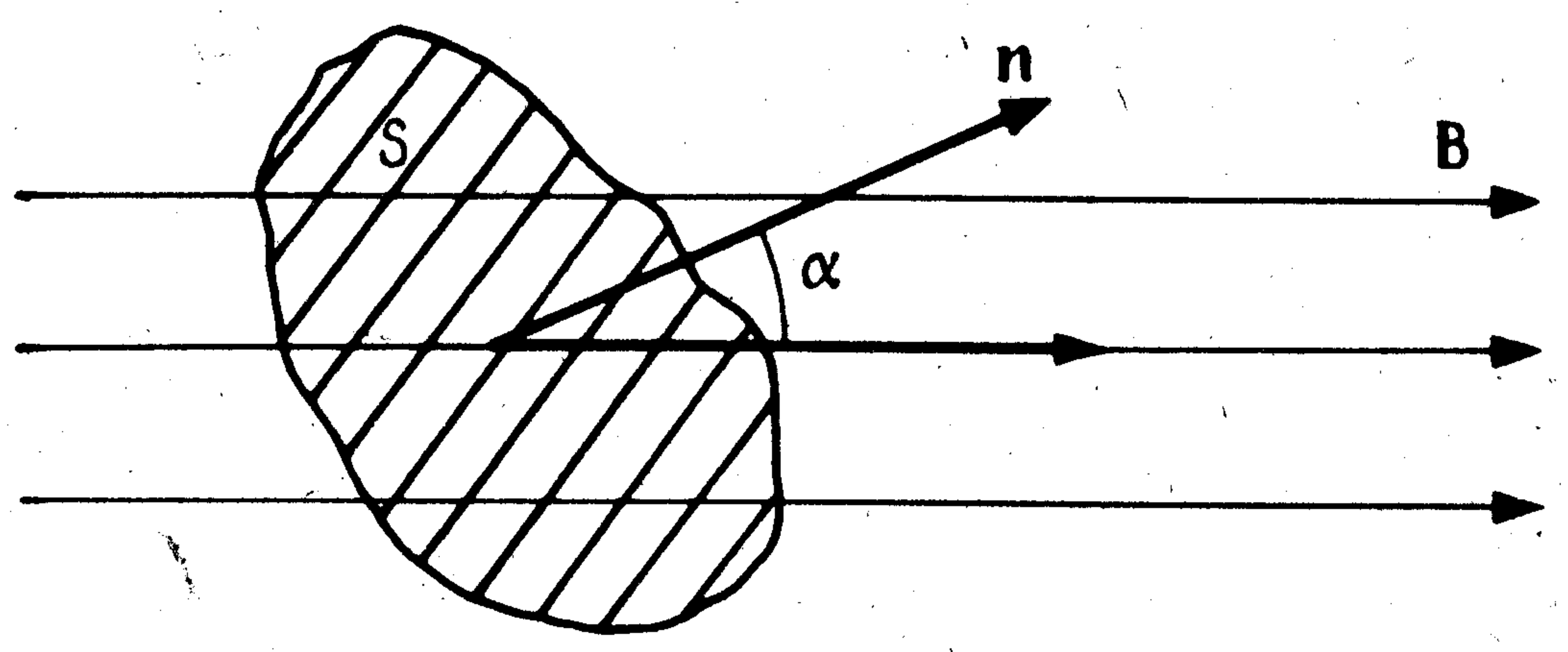


Рис. 3.12.

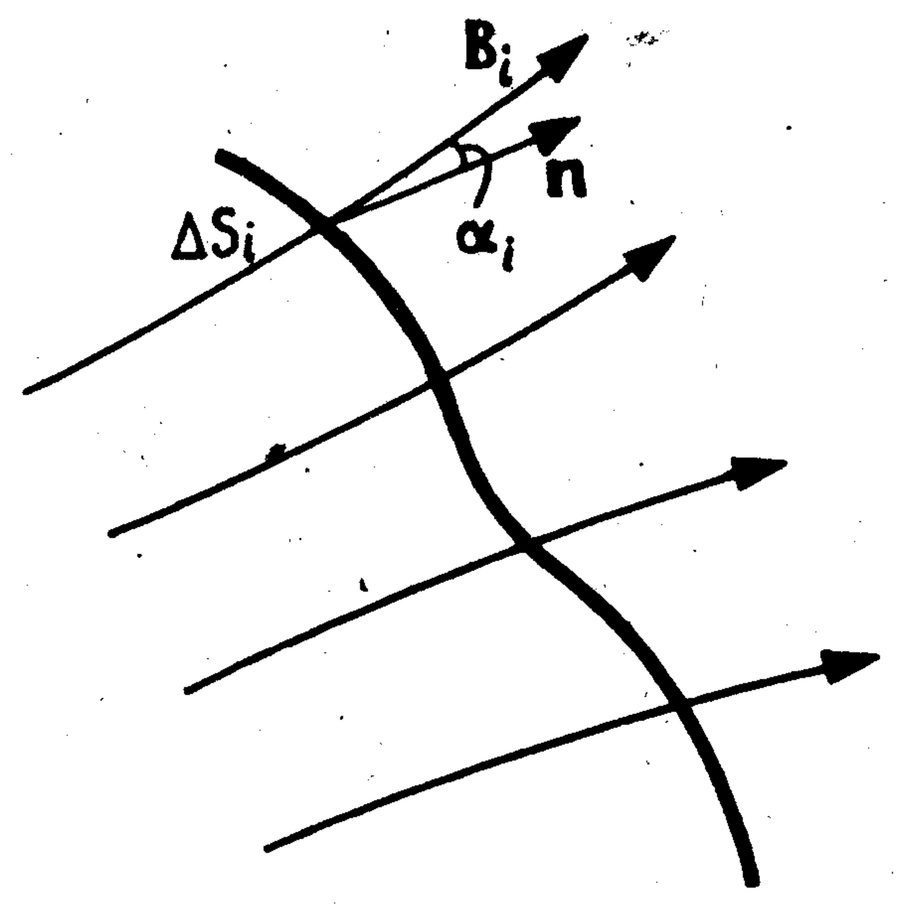


Рис. 3.13.

в пределах каждой из которых поле можно считать однородным. Тогда полный поток через эту поверхность равен сумме потоков вектора магнитной индукции через элементарные площадки:

$$\Phi = \sum_{i=1}^{n} \Delta\Phi_i = \sum_{i=1}^{n} |\mathbf{B}_i| \Delta S_i \cos\alpha_i,$$

или

$$\Phi = \lim_{\Delta S \to 0} \sum_{i=1}^{n} B_i \Delta S.$$

В СИ единицей магнитного потока является 1 вебер (Вб) — магнитный поток через поверхность площадью $1\,\text{м}^2$, расположенную перпендикулярно направлению однородного магнитного поля, индукция которого равна 1 Тл:

$$1\,\text{Вб} = 1\,\text{Тл} \cdot \text{м}^2 = 1\,(\text{В} \cdot \text{с}/\text{м}^2) \cdot \text{м}^2 = 1\,\text{В} \cdot \text{с}.$$

Работа при движении проводника с током в магнитном поле

Проводник длиной l, по которому течет постоянный ток I, помещен в однородное магнитное поле, индукция которого $\mathbf{B}$ (рис. 3.14). На проводник действует сила $F_A = IBl \sin\alpha$, и если проводник свободен и может перемещаться, то под действием силы F_A он движется в магнитном поле. При этом сила тока поддерживается постоянной. Пусть перемещение проводника равно Δx, работа силы Ампера на этом перемещении равна $A = F_A \Delta x \cos\beta = IBl\Delta x \cos\beta = IB\Delta S$, где $\Delta x l \cos\beta = \Delta S$ — изменение площади, ограниченной контуром с током.

Изменение магнитного потока через поверхность, ограниченную контуром с током, равно

$$\Delta\Phi = B\Delta S,$$

откуда работа, совершаемая при перемещении проводника в магнитном поле, равна

$$A = I\Delta\Phi = I(\Phi_2 - \Phi_1), \tag{3.14}$$

где Φ_2 — магнитный поток через поверхность, ограниченную контуром в конце перемещения, Φ_1 — магнитный поток в начальный момент.

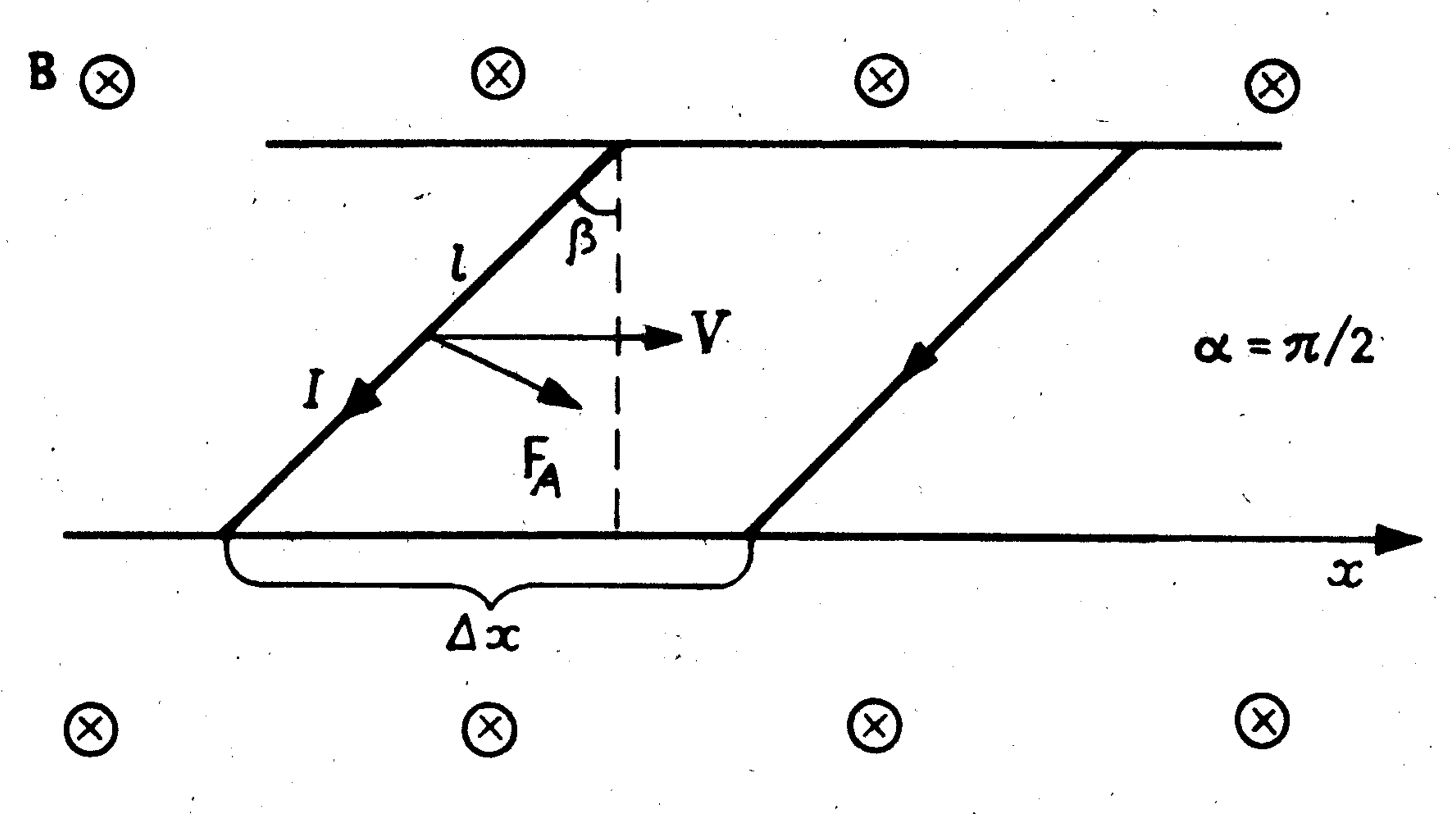


Рис. 3.14.

При вращении рамки в магнитном поле работа также равна $A = I\Delta\Phi$, где $\Delta\Phi$ — изменение магнитного потока через площадь рамки.

Электромагнитная индукция

Возникновение эдс в замкнутом проводящем контуре при изменении со временем магнитного потока через поверхность, ограниченную этим контуром, называется *электромагнитной индукцией*. Также эдс индукции, а следовательно, разность потенциалов возникает на концах разомкнутого проводника, движущегося в магнитном поле и пересекающего силовые линии поля.

Опыт показывает, что эдс индукции не зависит от причин изменения магнитного потока, а определяется скоростью его изменения.

Согласно *закону Фарадея*, эдс индукции определяется как предел отношения изменения магнитного потока $\Delta\Phi$ к промежутку времени Δt, за которое это изменение произошло, при стремлении Δt к нулю, или производной по времени магнитного потока

$$\mathcal{E}_{\text{инд}} = \lim_{\Delta t \to 0} \Delta\Phi/\Delta t = -\Phi'. \tag{3.15}$$

Если проводник движется в магнитном поле, то под $\Delta\Phi$ понимаем магнитный поток, "заметенный" проводником за промежуток времени Δt.

Сила индукционного тока, текущего по контуру, равна

$$I_{\text{инд}} = \mathcal{E}_{\text{инд}}/R = |\Phi'|/R. \tag{3.16}$$

Знак минус в формуле (3.15) позволяет определить направление индукционного тока, если предварительно задать направление нормали к площади, ограниченной контуром. При решении задач удобнее пользоваться *правилом Ленца*:

индукционный ток всегда направлен так, чтобы препятствовать причине, его вызывающей.

Если, например, круговой виток помещен в однородное магнитное поле, как показано на рис. 3.15, индукция которого уменьшается, следовательно, уменьшается магнитный поток через площадь витка, то индукционный ток направлен по часовой стрелке. Магнитное поле, создаваемое индукционным током, направлено так, чтобы увеличивать магнитный поток через площадь поверхности, ограниченной этим витком, так как сам ток вызван уменьшением магнитного потока через площадь контура.

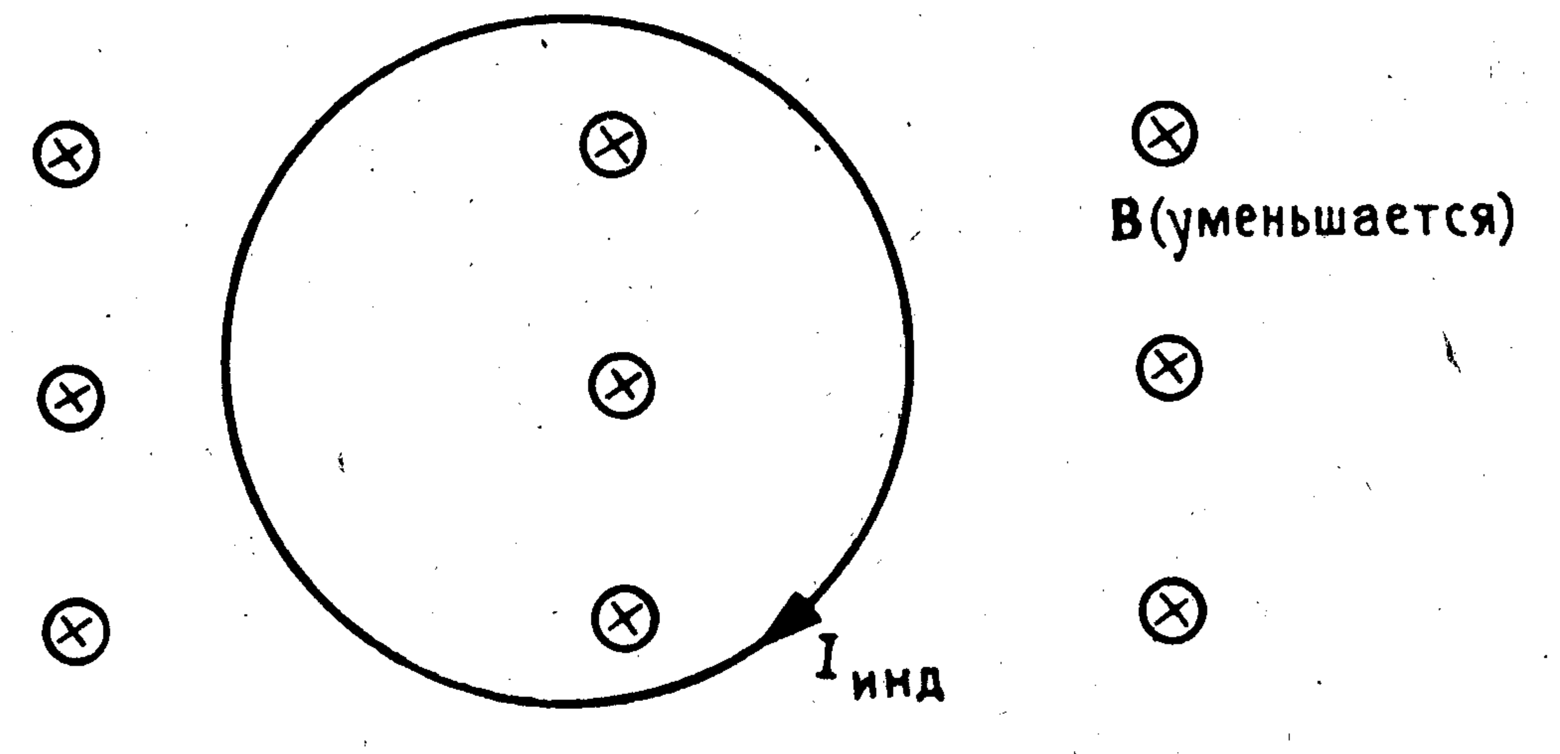


Рис. 3.15.

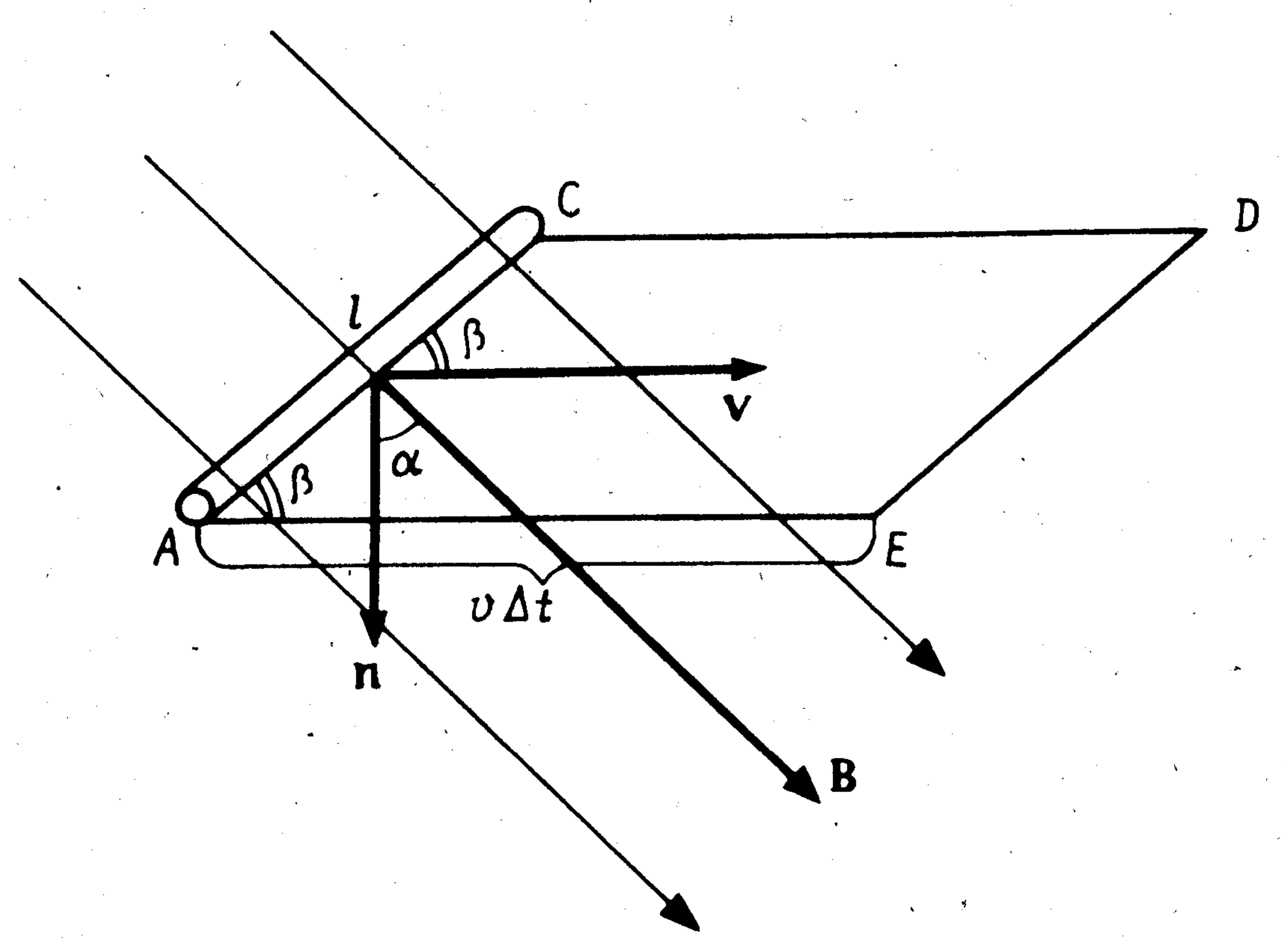


Рис. 3.16.

Рассмотрим проводник длиной l, движущийся поступательно со скоростью v в магнитном поле (рис. 3.16). За время Δt он "заметает" поверхность $ACDE$ площадью $\Delta S = lv\Delta t \sin\beta$, где β — угол между сторонами AC и AE. На концах проводника наводится эдс индукции:

$$\mathcal{E}_{инд} = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = -\frac{B\Delta S\cos\alpha}{\Delta t},$$

где α — угол между векторами $\mathbf{n}$ и $\mathbf{B}$, $\mathbf{n}$ — нормаль к поверхности, "заметаемой" проводником. Окончательно,

$$\mathcal{E}_{инд} = -Bvl\sin\beta\cos\alpha. \qquad (3.17)$$

При движении проводника в магнитном поле со скоростью v вместе с ним движутся находящиеся в нем положительные и отрицательные заряды. На эти заряды действует сила Лоренца. Свободные заряды (электроны в металле) под действием силы Лоренца перераспределяются, сосредотачиваясь на концах проводника. Разделение зарядов происходит до тех пор, пока сила Лоренца, действующая на свободный заряд в проводнике, не уравновесится силой электрического поля, созданного зарядами, сосредоточенными на концах проводника. Если этот проводник входит в состав замкнутой цепи, то в цепи возникает индукционный ток, направление которого определяется законом Ленца: направление тока таково, что механическая сила, действующая на движущийся проводник с током в магнитном поле, направлена в сторону, противоположную скорости движения проводника.

Еще раз подчеркнем, что возникновение эдс индукции связано с любым изменением во времени магнитного потока через площадь, ограниченную контуром. Изменение магнитного потока может происходить вследствие изменения магнитного поля, вследствие изменения площади поверхности, ограничённой контуром, а также при повороте контура в поле, когда изменяется угол между нормалью к поверхности и направлением магнитного поля.

Явление самоиндукции

Ток, текущий по проводящему контуру, создает вокруг него магнитное поле. Магнитный поток Φ, сцепленный с контуром, прямо пропорционален силе тока в этом контуре:

$$\Phi = LI, \tag{3.18}$$

где L — индуктивность контура. Индуктивность проводника зависит от его формы, размеров, а также от свойств окружающей среды. Если сила тока изменяется со временем, то изменяется и магнитный поток, сцепленный с контуром. Изменение магнитного потока, в свою очередь, вызывает появление в проводнике индукционного тока. Так как индукционный ток вызван изменением силы тока в самом проводнике, то данное явление возникновения индукционного тока называется *самоиндукцией*, а возникающая эдс — эдс самоиндукции. Самоиндукция является частным случаем явления электромагнитной индукции. Если I изменяется со временем по линейному закону, то

$$\mathcal{E}_{\text{си}} = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = -L\frac{\Delta I}{\Delta t}, \tag{3.19}$$

где $\Delta I/\Delta t$ — скорость изменения силы тока.

Формула (3.19) справедлива только при $L = \text{const}$, т. е. в том случае, когда размеры и форма контура не изменяются и отсутствует ферромагнитная среда. При произвольной зависимости $I(t)$

$$\mathcal{E}_{\text{си}} = -LI'.$$

Из (3.19) ясно, что индуктивность — величина, численно равная эдс самоиндукции, возникающей в контуре при изменении силы тока в нем на единицу за единицу времени.

В СИ за единицу индуктивности принимают индуктивность такого проводника, в котором при изменении силы тока на 1 А за 1 с возникает эдс самоиндукции 1 В. Эта единица называется генри (Гн):

$$1\,\text{Гн} = 1\,\text{В}/1\,\text{А/с} = 1\,\text{В}\cdot\text{с/А}.$$

Энергия магнитного поля тока

Энергия магнитного поля, созданного током, по закону сохранения энергии равна энергии, затраченной источником на создание тока. При замыкании цепи ток в цепи вследствие самоиндукции не сразу достигает максимального значения I_0, а постепенно.

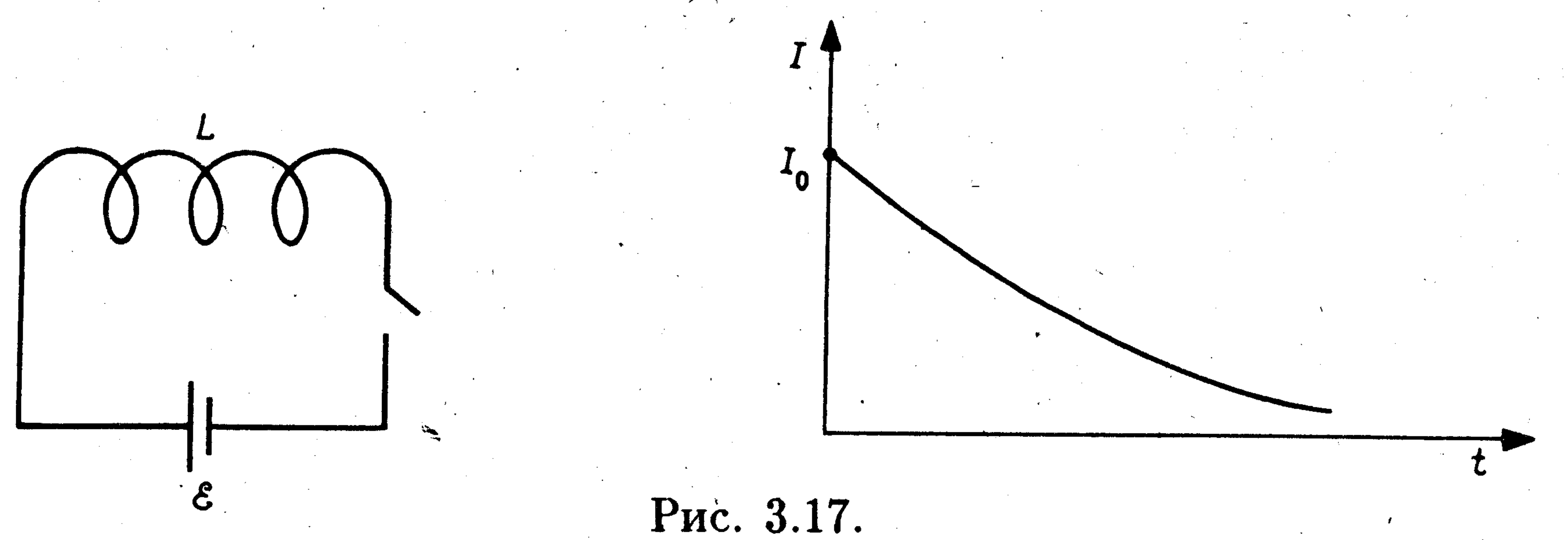


Рис. 3.17.

При размыкании цепи (рис. 3.17) ток также исчезает не сразу, а постепенно, при этом в проводнике выделяется тепло. Так как цепь разомкнута, то это тепло не может выделяться за счет работы источника, а может быть только следствием энергии, накопленной в соленоиде, энергии магнитного поля. Энергия магнитного поля соленоида, когда ток полностью прекратится, переходит в джоулево тепло. Выражение для магнитного поля соленоида имеет вид:

$$W_м = LI^2/2. \quad (3.20)$$

Примеры решения задач

Задача 1. Круговой виток радиуса r, по которому течет ток I_2, находится вблизи бесконечного прямого провода, по которому течет ток I_1. Проводник и виток лежат в одной плоскости (рис. 3.18). Расстояние от центра витка до проводника равно $2r$. Определите индукцию магнитного поля в центре витка. Как должна измениться сила тока I_2, чтобы индукция магнитного поля в центре витка стала равна нулю?

Дано: I_1, r, I_2, $2r$; B — ? ΔI_2 — ?

Решение. Магнитное поле создается прямым проводником с током и круговым витком. Вектор индукции поля $\mathbf{B}_1$, создаваемого прямым проводником с

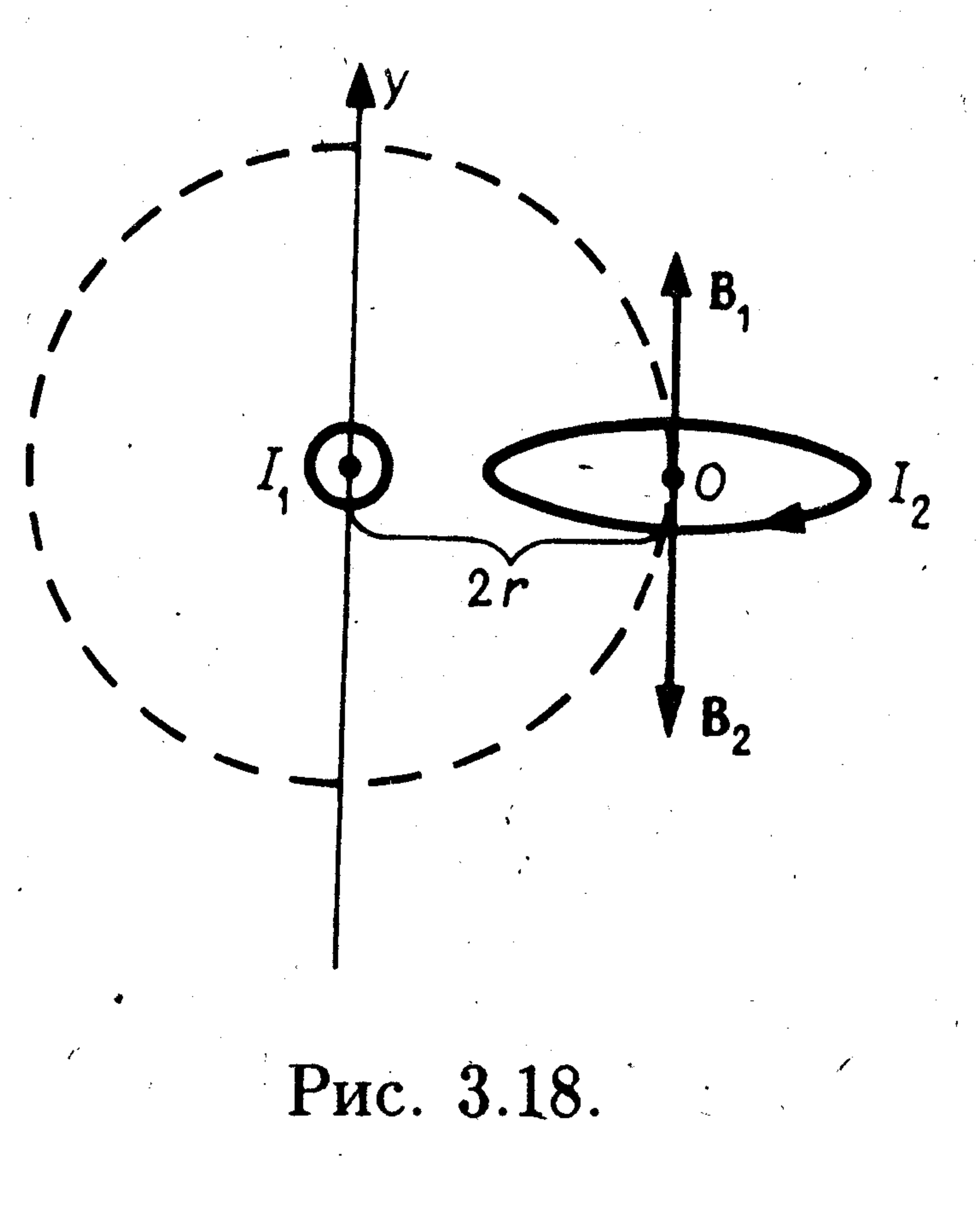


Рис. 3.18.

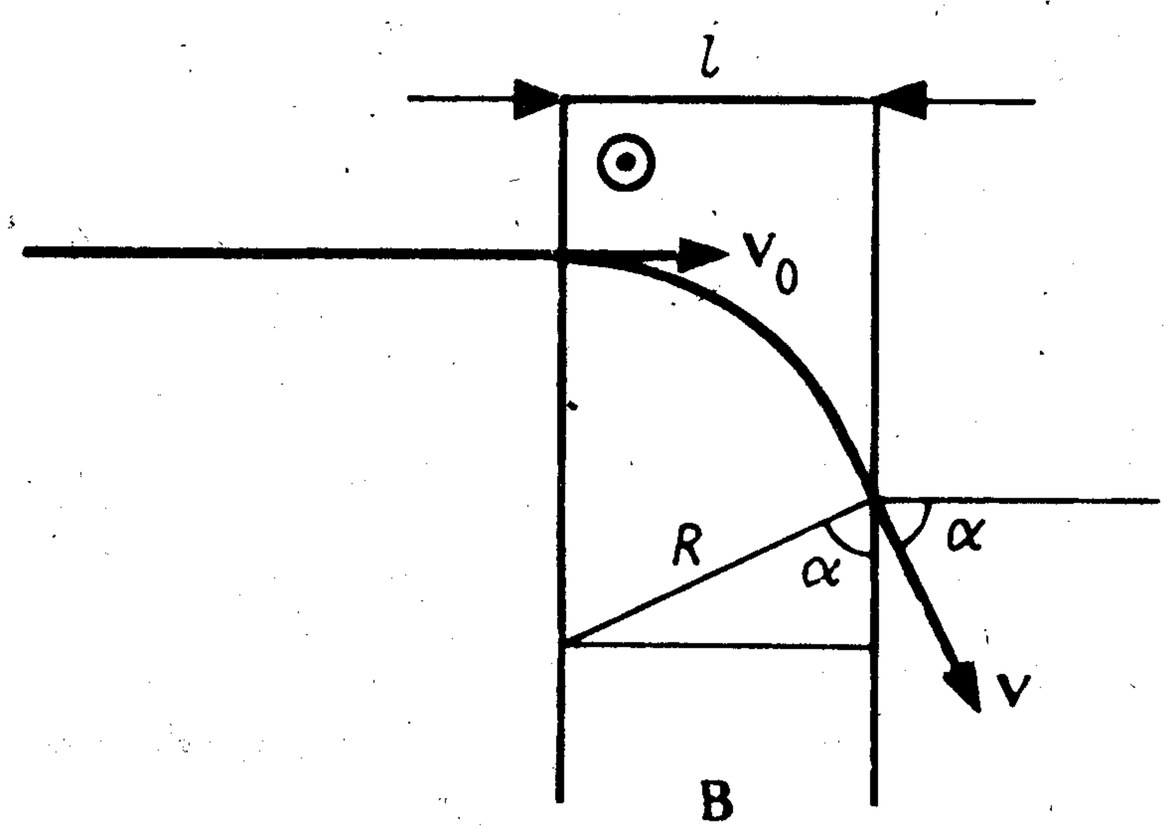


Рис. 3.19.

током (рис. 3.18), лежит в плоскости чертежа. Вектор индукции магнитного поля витка с током $\mathbf{B}_2$ также перпендикулярен плоскости витка. Согласно принципу суперпозиции полей, $\mathbf{B} = \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2$, или в проекции на ось y

$$B = B_1 - B_2,$$

где

$$B_1 = \mu_0 I_1/2r, \quad B_2 = \mu_0 I_2/4\pi r.$$

Итак,

$$B = (\mu_0/2r)(I_1 - I_2/2\pi).$$

Индукция магнитного поля в центре витка обращается в нуль, если $I_1 = I_2'/2\pi$, откуда

$$I_2' = 2\pi I_1.$$

Сила тока, текущего по прямому проводнику, должна измениться на величину

$$\Delta I_1 = I_2' - I_1 = 2\pi I_1 - I_1.$$

Задача 2. Протон влетает в область однородного магнитного поля шириной l, индукция магнитного поля $\mathbf{B}$. Скорость протона перпендикулярна индукции поля $\mathbf{B}$ и границе области. Под каким углом α к первоначальному направлению движения протон вылетит из области поля?

Дано: $\mathbf{B}$, l, q_p, m_p; α — ?

Решение. Из рис. 3.19 следует, что синус искомого угла α равен $\sin\alpha = l/R$, где R — радиус окружности, по которой движется протон в магнитном поле. По формуле (3.11) определим радиус траектории движения протона:

$$R = m_p v/q_p B,$$

откуда $\sin\alpha = lq_pB/m_pv$. Окончательно

$$\alpha = \arcsin lq_pB/m_pv.$$

Задача 3. Электрон движется в однородном магнитном поле с индукцией 10^{-2} Тл. В некоторый момент вектор его скорости, равной 10^6 м/с, составляет угол 30° с направлением магнитного поля. Вычислить радиус R и шаг h винтовой линии, по которой движется электрон. Масса электрона $m_e = 9,1 \cdot 10^{-31}$ кг, его заряд $q_e = -1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл.

Дано: $B = 10^{-2}$ Тл, $\alpha = 30°$, $v = 10^6$ м/с, $m_e = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ кг, $q_e = -1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл; R — ? h — ?

Решение. Воспользуемся законом независимости движений и будем рассматривать сложное движение как сумму независимых движений вдоль силовых линий магнитного поля и в плоскости, перпендикулярной направлению линий индукции. Разложим вектор скорости электрона $\mathbf{v}$ на две составляющие — вдоль магнитного поля $v_{\|}$ и перпендикулярно ему $v_{\perp}$: $v_{\|} = v\cos\alpha$, $v_{\perp} = v\sin\alpha$ (рис. 3.11). Вдоль поля электрон движется равномерно. На частицу действует сила Лоренца, равная $F_{Л} = qv_{\perp}B$. Под действием этой силы частица движется по окружности, в плоскости, перпендикулярной направлению поля, с периодом T. В результате сложения этих движения частица будет двигаться по винтовой линии, причем радиус окружности равен

$$R = m_e v_{\perp}/qB = m_e v \sin\alpha / q_e B.$$

За время, равное периоду, частица вдоль поля проходит путь h (шаг винтовой линии):

$$h = v_{\|}T = (v\cos\alpha)2\pi m_e/q_e B,$$

$$[R] = \frac{\text{кг}\cdot\text{м/с}}{\text{Тл}\cdot\text{Кл}} = \frac{\text{кг}\cdot\text{м}\cdot\text{А}\cdot\text{м}}{\text{с}\cdot\text{Н}\cdot\text{Кл}} = \frac{\text{кг}\cdot\text{А}\cdot\text{м}^2\cdot\text{с}^2}{\text{с}\cdot\text{кг}\cdot\text{м}\cdot\text{А}\cdot\text{с}} = \text{м},$$

$$[h] = \frac{\text{м}}{\text{с}}\frac{\text{кг}\cdot\text{А}\cdot\text{м}}{\text{Н}\cdot\text{Кл}} = \frac{\text{м}\cdot\text{кг}\cdot\text{А}\cdot\text{м}\cdot\text{с}^2}{\text{с}\cdot\text{кг}\cdot\text{м}\cdot\text{Кл}} = \text{м},$$

$$R = \frac{9{,}1\cdot 10^{-31}\cdot 10^6\cdot 0{,}5}{10^{-2}\cdot 1{,}6\cdot 10^{-19}}\,\text{м} = 2{,}8\cdot 10^{-4}\,\text{м},$$

$$h = \frac{10^6\cdot\sqrt{3}\cdot 2\cdot 3{,}14\cdot 9{,}1\cdot 10^{-31}}{2\cdot 10^{-2}\cdot 1{,}6\cdot 10^{-19}}\,\text{м} = 3{,}09\cdot 10^{-4}\,\text{м}.$$

Задача 4. Заряженные частицы, заряд которых $3{,}2\cdot 10^{-19}$ Кл, ускоряются в циклотроне в однородном магнитном поле с индукцией $B = 10^{-1}$ Тл и частотой ускоряющего напряжения $\nu = 6$ МГц. Найти кинетическую энергию частиц в момент, когда они движутся по радиусу $R = 2$ м.

Дано: $B = 10^{-1}$ Тл, $\nu = 6$ МГц ($6\cdot 10^6$ Гц), $R = 2$ м, $q = 3{,}2\cdot 10^{-19}$ Кл; $W_{к}$ — ?

Решение. Циклотрон состоит из двух половинок полого цилиндра (дуантов). Между ними создается переменное электрическое поле, причем частота изменения разности потенциалов между дуантами подобрана так, что частица каждый раз попадает в ускоряющее поле (рис. 3.20).

Как следует из формулы (3.11), радиус движения частиц R равен $R = mv/qB$, а период обращения $T = 2\pi m/qB$. Для нормальной работы циклотрона необходимо, чтобы период колебаний электрического поля и период обращения частицы были равны, $T = 1/\nu = 2\pi m/qB$, откуда $m = qB/2\pi\nu$. Подставив выражения для m и v ($v = qBR/m$) в формулу для кинетической энергии, получим

$$W_{к} = \frac{mv^2}{2} = q^2B^2R^2/2m = R^2qB\pi\nu,$$

$$[W_{к}] = \text{м}^2\cdot\text{Кл}\cdot\text{Тл}\cdot\text{Гц} = \text{м}^2\cdot\text{А}\cdot\text{с}\cdot\text{Н}/(\text{А}\cdot\text{м})\cdot(1/\text{с}) = \text{Н}\cdot\text{м} = \text{Дж},$$

$$W_{к} = 4\cdot 3{,}2\cdot 10^{-19}\cdot 10^{-1}\cdot 3{,}14\cdot 6\cdot 10^6\,\text{Дж} = 2{,}4\cdot 10^{-12}\,\text{Дж}.$$

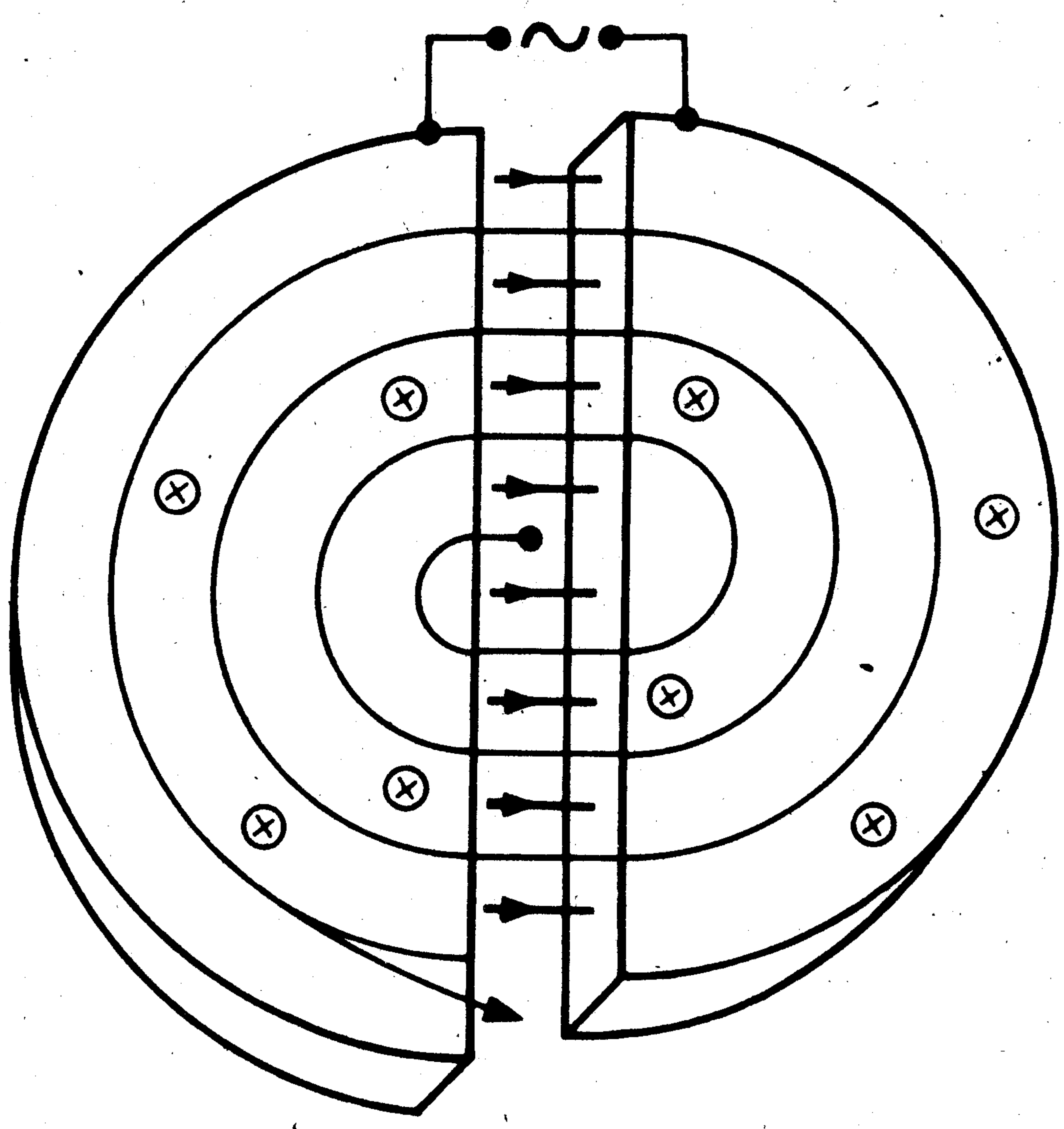


Рис. 3.20.

Задача 5. В однородном магнитном поле, индукция которого равна $4 \cdot 10^{-2}$ Тл и направлена под углом $\beta = 30^\circ$ к вертикали, по вертикальным проводам без трения вверх движется прямой проводник массой 10 г, по которому течет ток 3 А. Через 5 с после начала движения проводник имеет скорость 20 м/с. Определить длину проводника.

Дано: $B = 4 \cdot 10^{-2}$ Тл, $\beta = 30^\circ$, $m = 10$ г (10^{-2} кг), $I = 3$ А, $t = 5$ с, $v = 20$ м/с; l — ?

Решение. На проводник с током, помещенный в магнитное поле, действует сила Ампера $F_A = IBl \sin\alpha$, где $\alpha = \pi/2$, направленная, как указано на рис. 3.21. Движение проводника осуществляется только в вертикальном направлении. Ускорение проводника найдем из второго закона Ньютона $ma = F_{Ax} - mg$, где $F_{Ax} = F_A \cos 60^\circ$ — проекция силы Ампера на вертикальную ось:

$$ma = F_A \cos 60^\circ - mg = IBl \cos 60^\circ - mg.$$

Скорость проводника равна

$$v = at = \frac{IBl \cos 60^\circ - mg}{m} t,$$

откуда

$$l = \frac{mv + mgt}{t \cos 60^\circ IB} = \frac{m(v + gt)}{t \cos 60^\circ IB},$$

$$[l] = \frac{\text{кг} \cdot (\text{м/с}) + \text{кг}(\text{м/с}^2) \cdot \text{с}}{\text{с} \cdot \text{А} \cdot \text{Тл}} = \frac{\text{кг} \cdot \text{м} \cdot \text{А} \cdot \text{м}}{\text{с}^2 \cdot \text{А} \cdot \text{Н}} = \frac{\text{кг} \cdot \text{м}^2 \cdot \text{с}^2}{\text{с}^2 \cdot \text{кг} \cdot \text{м}} = \text{м},$$

$$l = \frac{10^{-2}(20 + 10 \cdot 5)}{5 \cdot 0,5 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 10^{-2}}\ \text{м} = \frac{7}{3}\ \text{м}.$$

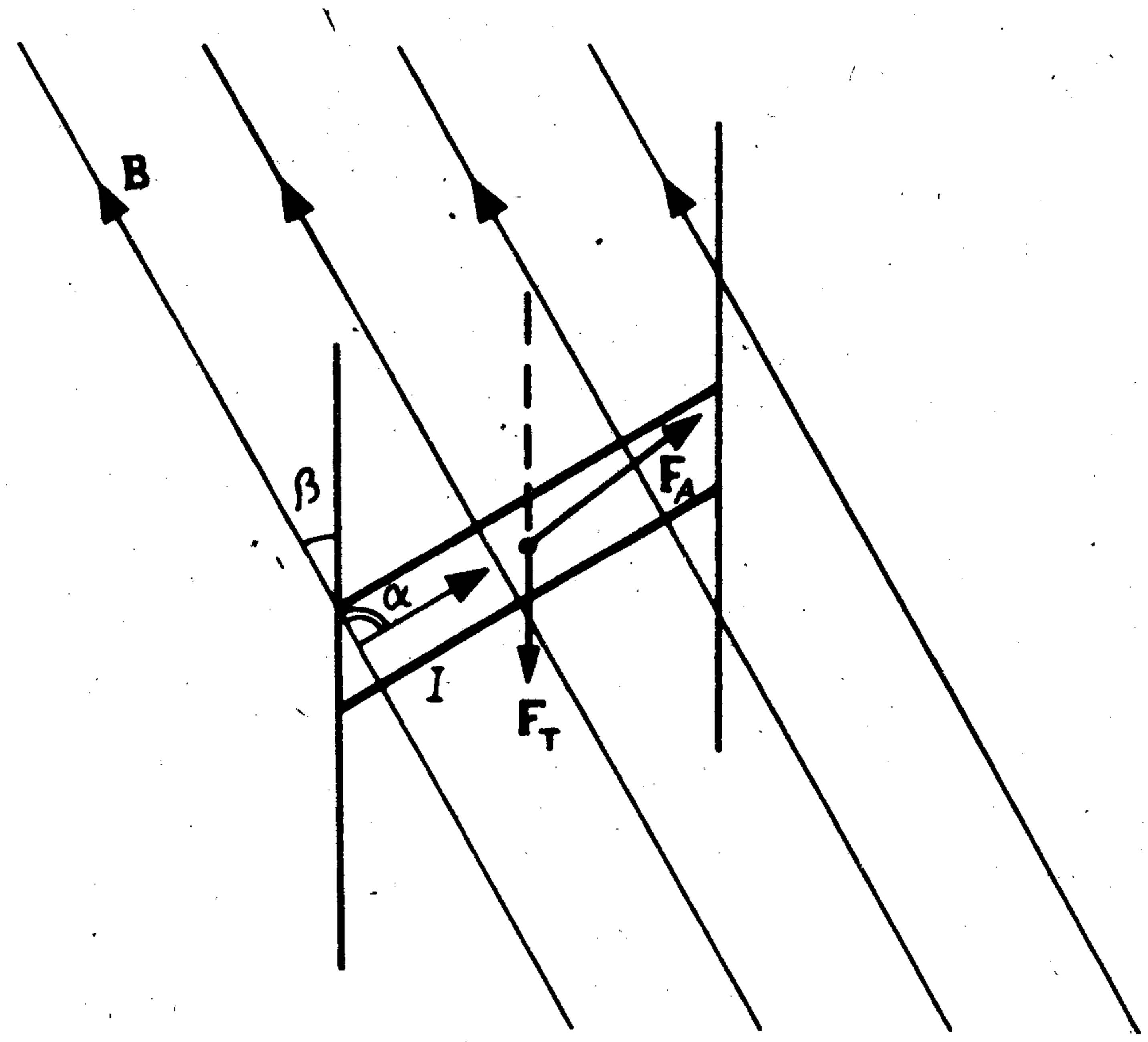


Рис. 3.21.

Задача 6. Квадратная рамка со стороной 5 см, имеющая 10 витков, находится в однородном магнитном поле с индукцией 0,1 Тл. Плоскость рамки составляет угол 0° с направлением магнитного поля. Определить вращающий момент сил, действующих на рамку, если ток в рамке равен 4 А.

Дано: $B = 0,1$ Тл, $a = 5$ см ($5 \cdot 10^{-2}$ м), $N = 10$, $I = 4$ А; $M_{\text{вр}}$ — ?

Решение. Механический момент сил, действующий на рамку, определяется по формуле (3.9), и так как рамка состоит из N, витков можно записать

$$M_{\text{вр}} = NISB \sin\alpha,$$

где $S = a^2$ — площадь рамки, $\alpha = \pi/2$ — угол между нормалью к плоскости рамки и направлением магнитного поля. Имеем

$$[M_{\text{вр}}] = \text{А} \cdot \text{м}^2 \cdot \text{Тл} = \text{А} \cdot \text{м}^2 \cdot (\text{Н}/\text{А} \cdot \text{м}) = \text{Н} \cdot \text{м},$$

$$M_{\text{вр}} = 10 \cdot 4 \cdot 25 \cdot 10^{-4} \cdot 0,1 (\text{Н} \cdot \text{м}) = 10^{-2} \text{Н} \cdot \text{м}.$$

Задача 7. Проводник AC длиной $l = 0,4$ м и сопротивлением $R = 4$ Ом лежит на двух горизонтальных проводниках, замкнутых на источник тока, эдс которого $\mathcal{E} = 2$ В (рис. 3.22). Проводники находятся в вертикальном магнитном поле с индукцией $B = 0,2$ Тл. Определите силу тока в проводнике, если он движется равномерно со скоростью $v = 5$ м/с а) вправо; б) влево. Сопротивлением шин пренебречь.

Дано: $l = 0,4$, $R = 4$ Ом, $\mathcal{E} = 2$ В, $B = 0,2$ Тл, $v = 5$ м/с; I — ?

Решение. При равномерном перемещении проводника изменяется магнитный поток через контур, и, следовательно, возникает эдс индукции, которая равна

$$|\mathcal{E}_{\text{инд}}| = |\Delta\Phi/\Delta t|.$$

При перемещении проводника вправо магнитный поток через контур увеличивается, индукционный ток направлен так, чтобы, согласно правилу Ленца, компенсировать причину, его вызывающую. В данном случае индукционный ток

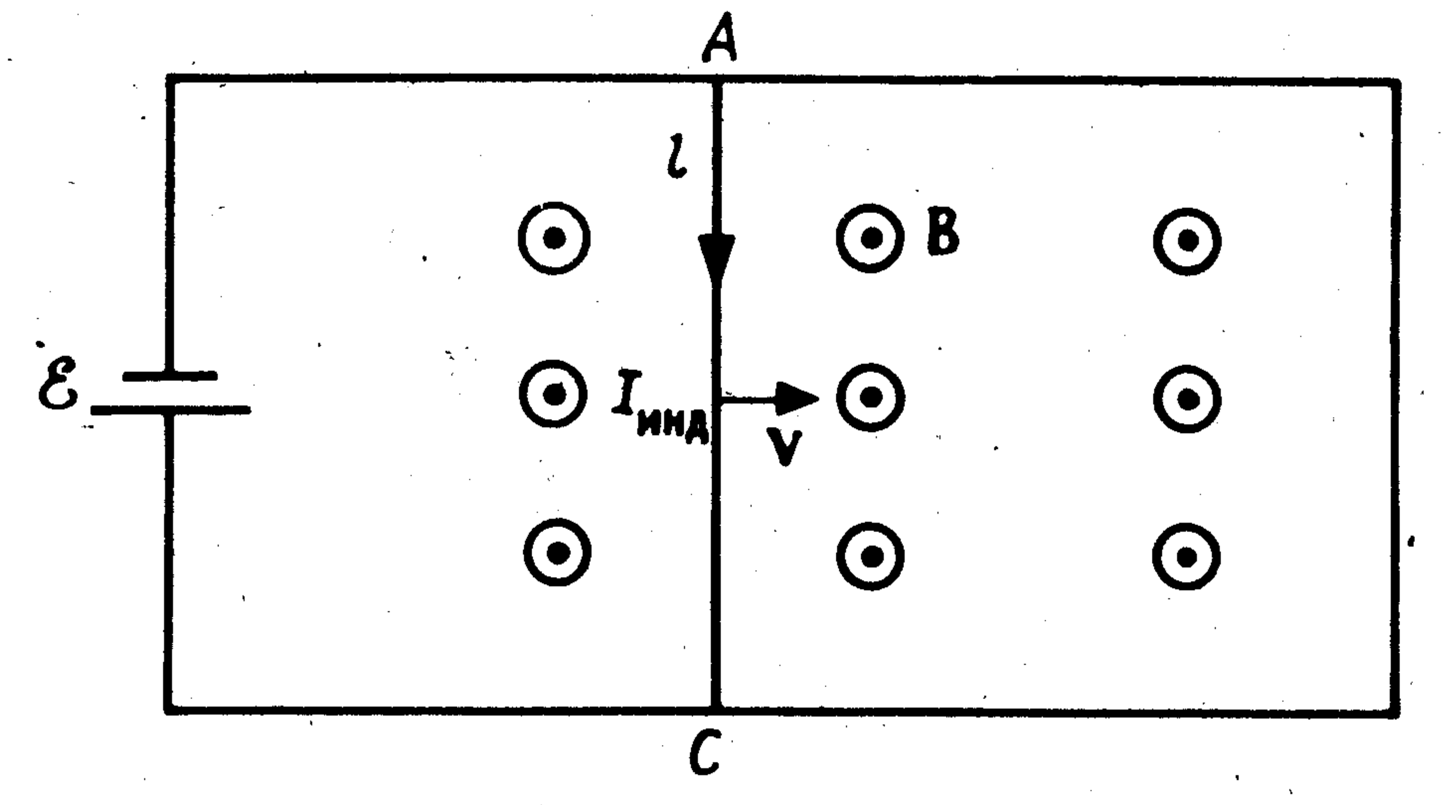


Рис. 3.22.

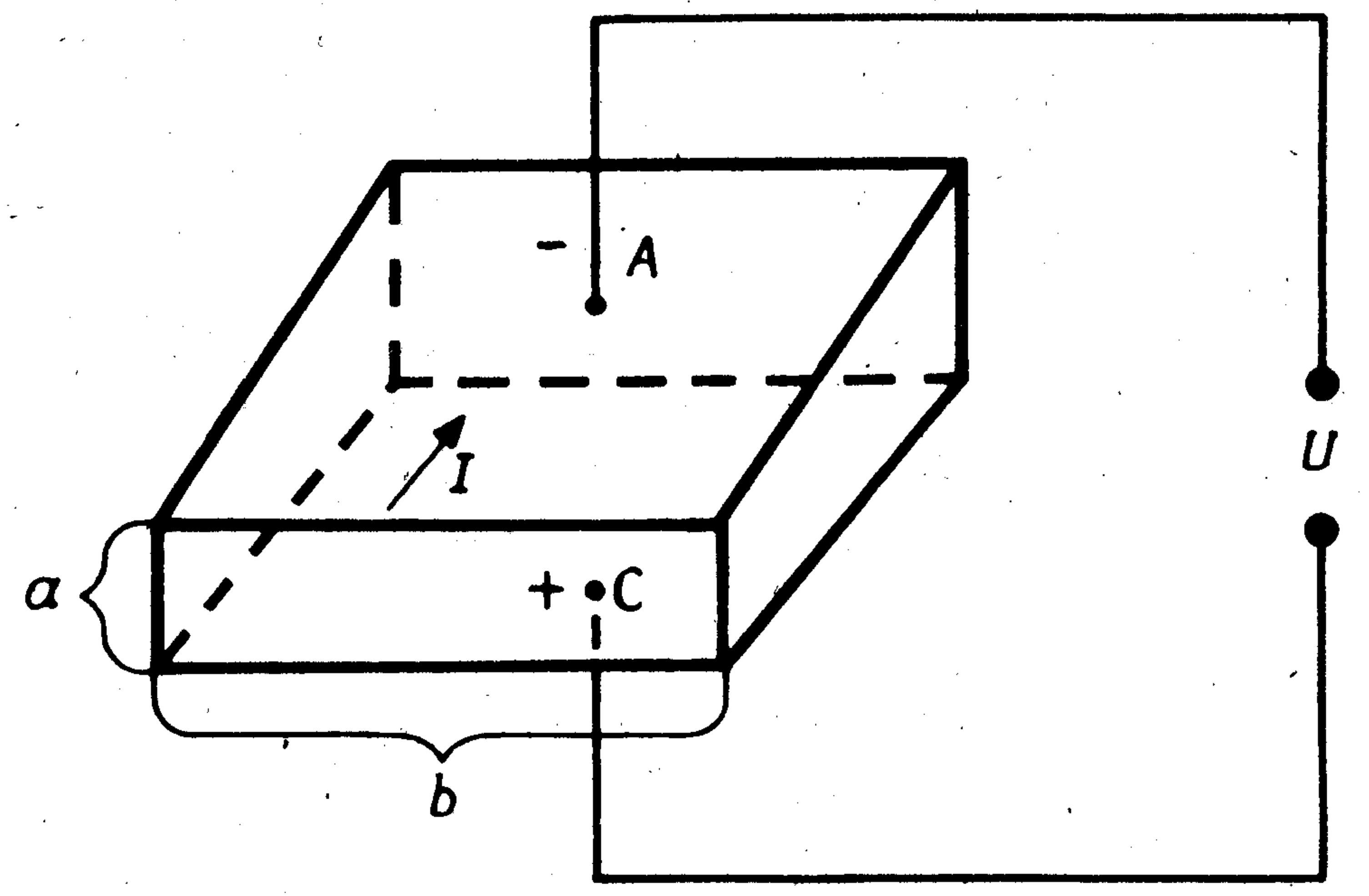


Рис. 3.23.

будет направлен по часовой стрелке, магнитное поле этого тока будет направлено против внешнего магнитного поля:

$$\Delta\Phi = Bl\Delta x, \quad \text{где} \quad \Delta x = v\Delta t,$$

откуда

$$\mathcal{E}_{\text{инд}} = Bl\Delta x/\Delta t = Blv.$$

По закону Ома для полной цепи сила тока равна $I = (\mathcal{E} - Blv)/R$. При движении проводника влево магнитный поток через контур уменьшается, эдс индукции направлена в противоположную сторону и сила тока в этом случае

$$I = (\mathcal{E} + Blv)/R.$$

Подставив численные значения, получим

$$\text{а)} \quad I = \frac{2 - 0,2 \cdot 0,4 \cdot 5}{4}\ \text{А} = 0,4\ \text{А},$$

$$\text{б)} \quad I = \frac{2 + 0,2 \cdot 0,4 \cdot 5}{4}\ \text{А} = 0,6\ \text{А}.$$

Задача 8. Ток I течет по проводнику прямоугольного сечения (см. рис. 3.23), помещенному в однородное магнитное поле. К точкам A и C подключен вольтметр, показывающий разность потенциалов U. Концентрация свободных электронов в проводнике n_0. Определите индукцию магнитного поля B.

Дано: I, n_0, U, a, b; B — ?

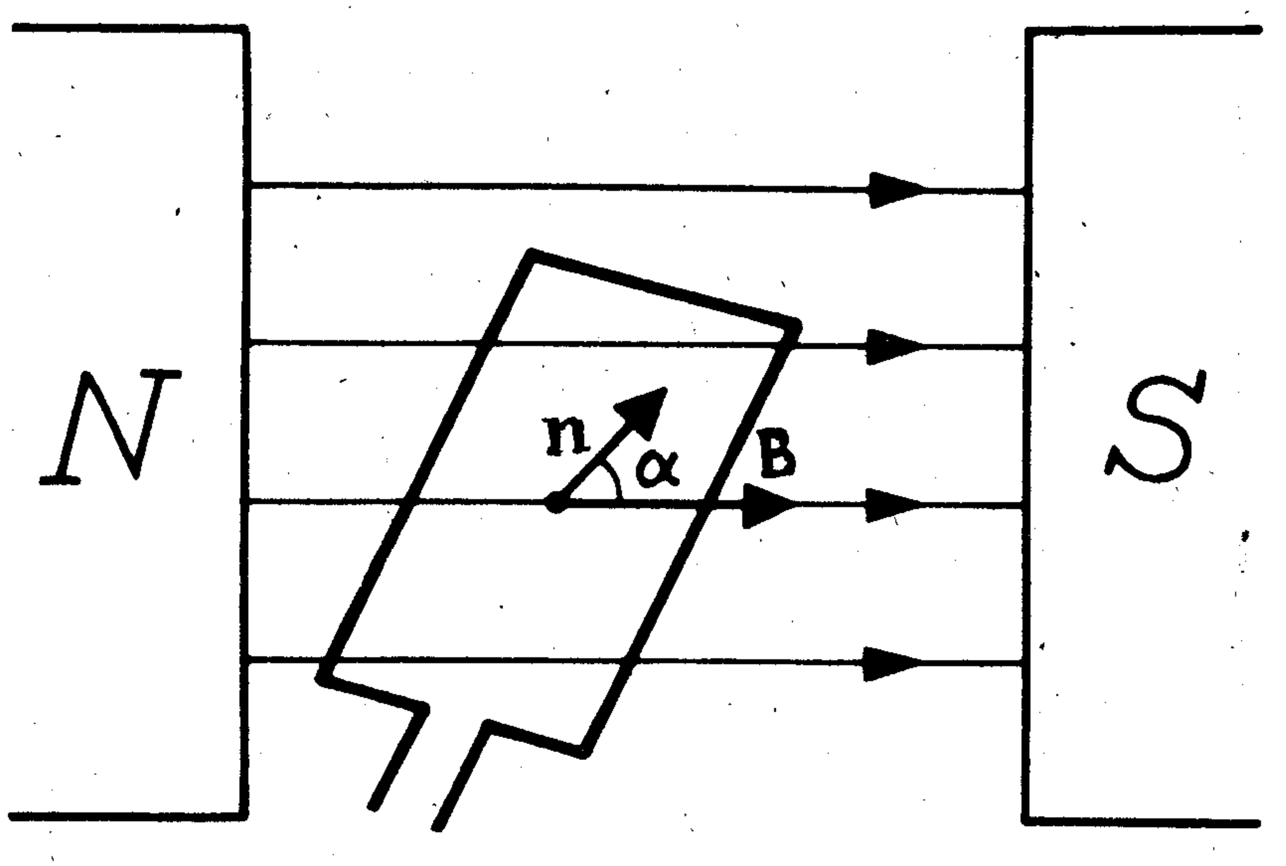


Рис. 3.24.

Решение. На движущиеся электроны действует сила Лоренца, $F_{Л} = q_e Bv$, смещающая электроны к верхней поверхности проводника. Между точками A и C возникает электрическое поле (эффект Холла). Действующее на электрон электрическое поле препятствует дальнейшему разделению зарядов (сила Кулона, действующая на электрон, равна силе Лоренца):

$$q_e U/a = q_e vB,$$

где q_e — заряд электрона. Отсюда имеем $B = U/va$. Скорость направленного движения электронов определяется из формулы для силы тока:

$$I = q_e n_0 vab,$$

следовательно,

$$v = I/q_e n_0 ab,$$

Окончательно имеем

$$B = Uq_e n_0 b/I.$$

Задача 9. Прямоугольная проводящая рамка равномерно вращается в однородном магнитном поле с угловой скоростью ω. Индукция магнитного поля $\mathbf{B}$, площадь рамки S. Определите эдс индукции и постройте графики зависимости эдс индукции и магнитного потока от времени.

Дано: B, ω, S; $\mathcal{E}(t)$ — ? $\Phi(t)$ — ?

Решение. Рассмотрим равномерное вращение прямоугольной проводящей рамки в однородном магнитном поле. Магнитный поток через рамку $\Phi = \Phi_0 \cos\alpha$, где Φ_0 — максимальный магнитный поток через рамку, равный BS, α — угол между нормалью к поверхности рамки и вектором $\mathbf{B}$ (рис. 3.24).

Если рамка вращается равномерно с угловой скоростью ω, то $\alpha = \omega t$ и $\Phi = BS\cos\omega t$ ($\alpha = 0$ при $t = 0$). Следовательно,

$$\mathcal{E}_{инд} = -\Phi' = BS\omega \sin\omega t = \mathcal{E}_{max} \sin\omega t,$$

где $\mathcal{E}_{max} = BS\omega$ — амплитудное значение эдс индукции в рамке.

На рис. 3.25 изображены графики зависимости $\Phi(t)$ и $\mathcal{E}_{инд}(t)$. Еще раз подчеркнем, что эдс индукции определяется скоростью изменения магнитного потока и не зависит от величины потока. Так, при $t = T/4$ поток $\Phi = 0$, но скорость изменения магнитного потока максимальна, эдс индукции максимальна.

При $t = T/2$ магнитный поток максимален, но скорость изменения магнитного потока равна нулю и $\mathcal{E}_{инд} = 0$.

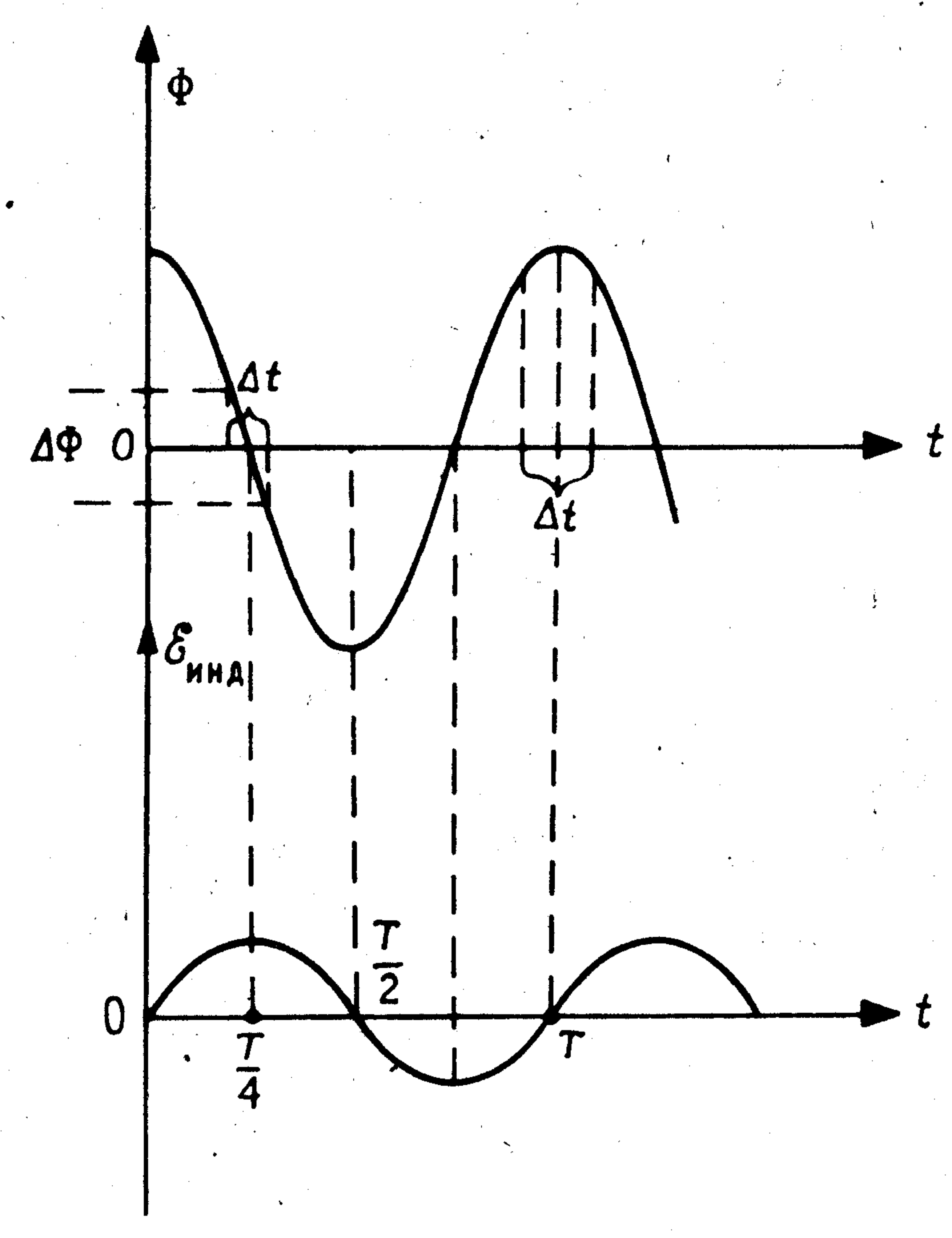


Рис. 3.25.

Задача 10. Проволочную катушку, насчитывающую 1000 витков, помещают в однородное магнитное поле, так что линии магнитной индукции перпендикулярны плоскости витков. Катушка подсоединена к гальванометру. Затем катушку удаляют из поля, при этом по цепи катушки протекает заряд 10^{-3} Кл. Определить индукцию магнитного поля, если площадь витка 10^{-3} м^2, а полное сопротивление цепи катушки 2 Ом.

Дано: $R = 2$ Ом, $S = 10^{-3}$ м^2, $q = 10^{-3}$ Кл, $N = 1000$; B — ?

Решение. Магнитный поток через катушку изменяется за время t от $\Phi = NBS$ до нуля. В катушке индуцируется эдс. Значения эдс в различные моменты времени различны. По закону электромагнитной индукции эдс в некоторый момент времени определяется по формуле

$$\mathcal{E}_{\text{инд}\,i} = \lim_{\Delta t_i \to 0} \Delta\Phi_i/\Delta t_i,$$

где $\Delta\Phi_i$ — изменение магнитного потока за малый промежуток времени Δt_i. Изменение магнитного потока за время t можно определить как предел суммы:

$$\Delta\Phi = \lim_{\Delta t \to 0} \sum_0^t \mathcal{E}\Delta t.$$

Эдс в свою очередь связана с силой тока: $\mathcal{E} = IR$, откуда изменение магнитного потока за время t равно

$$\Delta\Phi = R(\lim_{\Delta t \to 0} \sum_0^t I\Delta t).$$

Выражение в круглых скобках определяет полный заряд, протекший по цепи за время t. Итак

$$\Delta\Phi = qR.$$

Окончательно,

$$q=\frac{\Delta\Phi}{R}=\frac{NBS}{R},$$
$$B=qR/NS,$$
$$[B]=\frac{\text{Кл}\cdot\text{Ом}}{\text{м}^2}=\frac{\text{А}\cdot\text{с}\cdot\text{Ом}}{\text{м}^2}=\frac{\text{В}\cdot\text{с}}{\text{м}^2}=\text{Тл},$$
$$B=\frac{10^{-3}\cdot 2}{1000\cdot 10^{-3}}\,\text{Тл}=2\cdot 10^{-3}\,\text{Тл}.$$

Задача 11. Проволочный виток площадью $S = 10$ см^2 разрезан в некоторой точке и в разрез включен конденсатор емкостью $C = 10$ мкФ. Виток помещен в однородное магнитное поле, линии магнитной индукции которого перпендикулярны плоскости витка. Индукция магнитного поля изменяется со скоростью $B' = 5\cdot 10^{-3}$ Тл/с. Определить заряд конденсатора.

Дано: $S = 10\,\text{см}^2$ $(10^{-3}\,\text{м}^2)$, $C = 10$ мкФ $(10^{-5}$ Ф$)$, $B' = 5\cdot 10^{-3}$ Тл/с; q — ?

Решение. Магнитный поток через виток изменяется со временем, в контуре возникает эдс равная $\mathcal{E} = -\Phi' = -B'S$. Так как в цепь контура включен конденсатор, на его обкладках накапливается заряд. Процесс зарядки будет происходить до тех пор, пока разность потенциалов на обкладках конденсатора не станет равна эдс индукции:

$$U = |\mathcal{E}|,$$
$$q/C = +B'S,$$

откуда

$$q = B'SC,$$
$$[q]=\Phi\cdot\text{м}^2\cdot\text{Тл/с}=(\text{Кл/В})\cdot\text{м}^2\cdot\text{Тл/с}=\frac{\text{Кл}\cdot\text{Вб}}{\text{В}\cdot\text{с}}=\text{Кл},$$
$$q=10^{-5}\cdot 10^{-3}\cdot 5\cdot 10^{-3}\,\text{Кл}=5\cdot 10^{-11}\,\text{Кл}.$$

Задача 12. *Соленоид* — длинная катушка с большим числом витков в обмотке. Определите индуктивность соленоида, если N — число витков, S — площадь витков, l — длина соленоида.

Дано: N, S, l; L — ?

Решение. У длинного соленоида с плотной обмоткой магнитное поле внутри практически однородно. Индукция магнитного поля направлена вдоль оси соленоида и равна

$$B = \mu_0 IN/l.$$

Магнитный поток, сцепленный с соленоидом, определяется выражением

$$\Phi = BSN = \mu_0(SN^2/l)I.$$

Так как магнитный поток связан с силой тока и индуктивностью соотношением

$$\Phi = LI,$$

индуктивность соленоида имеет вид

$$L = \mu_0 SN^2/l.$$

Задача 13. Катушка индуктивности диаметром 4 см, имеющая 400 витков медной проволоки сечением 1 мм^2, расположена в однородном магнитном поле, индукция которого направлена вдоль оси катушки и равномерно изменяется со скоростью 0,1 Тл/с. Концы катушки замкнуты накоротко. Определить количество теплоты, выделяющейся в катушке за 1 с. Удельное сопротивление меди равно $1,7 \cdot 10^{-8}$ Ом · м.

Дано: $N = 400$, $\rho = 1,7 \cdot 10^{-8}$ Ом · м, $d = 4$ см ($4 \cdot 10^{-2}$ м), $B' = 0,1$ Тл/с, $S = 1$ мм^2 (10^{-6} м^2); P — ?

Решение. Количество теплоты, выделяющееся в катушке за 1 с, равно

$$P = I_{\text{инд}}^2 R, \quad I_{\text{инд}} = \mathcal{E}_{\text{инд}}/R.$$

В каждом витке при изменении магнитного поля возбуждается эдс индукции, равная $\mathcal{E}_{\text{инд}} = -\Phi'$, во всей катушке

$$|\mathcal{E}_{\text{инд}}| = N|\Phi'| = NB'S_0 \cos\alpha = NB'S_0 \; (\cos\alpha = 1),$$

где N — число витков, $S_0 = \pi d^2/4$ — площадь витка. По закону Ома $I_{\text{инд}} = \mathcal{E}_{\text{инд}}/R$, где R — сопротивление катушки, равное

$$R = \rho l/S = \rho N \pi d/S.$$

Итак,

$$P = \mathcal{E}_{\text{инд}}^2/R = \frac{N^2(B')^2 S_0^2 S}{\rho N \pi d} = \frac{NS\pi d^3}{16\rho}(B')^2,$$

$$[P] = \frac{\text{м}^2 \cdot \text{м}^3 \cdot \text{Тл}^2}{\text{Ом} \cdot \text{м} \cdot \text{с}^2} = \frac{\text{м}^5 \cdot \text{В}^2 \cdot \text{с}^2}{\text{Ом} \cdot \text{м} \cdot \text{с}^2 \cdot \text{м}^4} = \frac{\text{В}^2}{\text{Ом}} = \text{А} \cdot \text{В} = \text{Вт},$$

$$P = \frac{400 \cdot 10^{-6} \cdot 3,14 \cdot 64 \cdot 10^{-6} \cdot 10^{-2}}{16 \cdot 1,7 \cdot 10^{-8}} \text{ Вт} = 2,95 \cdot 10^{-3} \text{ Вт}.$$

Задача 14. Катушка сопротивлением 50 Ом и индуктивностью 10^{-3} Гн находится в магнитном поле. При равномерном изменении магнитного поля поток через катушку возрос на 10^{-3} Вб и ток в катушке увеличился на 0,1 А. Какой заряд прошел за это время по катушке?

Дано: $R = 50$ Ом, $L = 10^{-3}$ Гн, $\Delta\Phi = 10^{-3}$ Вб, $\Delta I = 0,1$ А; q — ?

Решение. При возрастании магнитного потока через катушку в ней возникает эдс индукции $|\mathcal{E}_{\text{инд}}| = |\Delta\Phi/\Delta t|$, вызывающая появление в ней электрического тока. Ток в катушке изменяется, следовательно, одновременно появляется эдс самоиндукции $|\mathcal{E}_{\text{си}}| = |L\Delta I/\Delta t|$. При этом очевидно, что эдс индукции и эдс самоиндукции вызывают токи в противоположных направлениях, следовательно,

$$I = \frac{\Delta\Phi/\Delta t - L\Delta I/\Delta t}{R},$$

$$q = I\Delta t = \frac{\Delta\Phi - L\Delta I}{R},$$

$$[q] = \frac{\text{Вб} - \text{Гн} \cdot \text{А}}{\text{Ом}} = \frac{\text{В} \cdot \text{с} - \text{В} \cdot \text{с}}{\text{Ом}} = \text{А} \cdot \text{с} = \text{Кл},$$

$$q = \frac{10^{-3} - 10^{-3} \cdot 10^{-1}}{50} \text{ Кл} = 0,18 \cdot 10^{-4} \text{ Кл}.$$

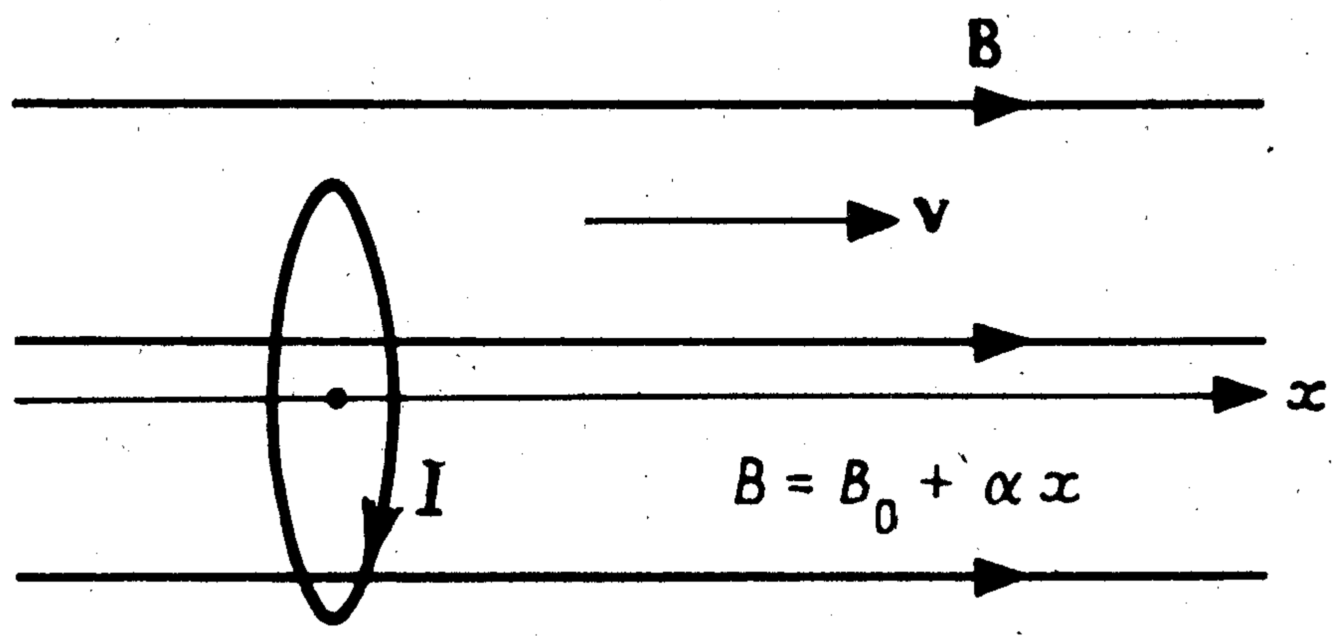


Рис. 3.26.

Задача 15. Проволочный виток радиуса r движется в магнитном поле вдоль оси x со скоростью v. Индукция магнитного поля возрастает по закону $B = B_0 + \alpha x$. Определите силу тока, текущего по витку, если площадь поперечного сечения проволоки S, удельное сопротивление ρ. Считать, что на рассматриваемом перемещении силовые линии остаются перпендикулярны плоскости витка.

Дано: $B = B_0 + \alpha x$, r, ρ, S, v; I — ?

Решение. Сила тока равна: $I = \mathcal{E}/R$. Так как магнитный поток через контур будет непрерывно изменяться со временем при движении витка, возникает эдс индукции, вызывающая ток в контуре. Магнитный поток Φ равен

$$\Phi = BS_0 = (B_0 + \alpha x)S_0,$$

где $S_0 = \pi r^2$. Виток движется равномерно, поэтому $x = x_0 + vt$, x_0 — координата витка в момент времени $t = 0$. Подставив x в выражение для Φ, получим

$$\Phi = (B_0 + \alpha(x_0 + vt))\pi r^2.$$

Изменение магнитного потока за промежуток времени Δt равно

$$\Delta\Phi = \alpha v \Delta t \pi r^2.$$

Эдс индукции определяется выражением

$$|\mathcal{E}_{\text{инд}}| = |\Delta\Phi/\Delta t| = \alpha v \pi r^2.$$

Сила тока, текущего по контуру, равна $I = \mathcal{E}_{\text{инд}}/R$, где R — сопротивление витка, определяемое формулой:

$$R = \rho l/S = \rho 2\pi r/S.$$

Подставив в выражение для I формулы для $\mathcal{E}_{\text{инд}}$ и R, получим

$$I = \frac{\alpha v \pi r^2 S}{\rho 2\pi r} = \frac{\alpha v r S}{2\rho}.$$

На рис. 3.26 показано направление индукционного тока (правило Ленца).

Задача 16. Проволочная прямоугольная рамка площадью 500 см^2, состоящая из 400 витков, равномерно вращается в однородном магнитном поле вокруг оси, проходящей через середины противоположных сторон. Ось вращения перпендикулярна вектору индукции магнитного поля и лежит в плоскости рамки. При скорости вращения 3 с$^{-1}$ максимальная эдс, наводимая в рамке, равна 300 В. Определить величину индукции магнитного поля.

Дано: $S = 500$ см^2 ($5 \cdot 10^{-2}$ м^2), $N = 400$, $\omega = 3$ с$^{-1}$, $\mathcal{E}_{\max} = 300$ В; B — ?

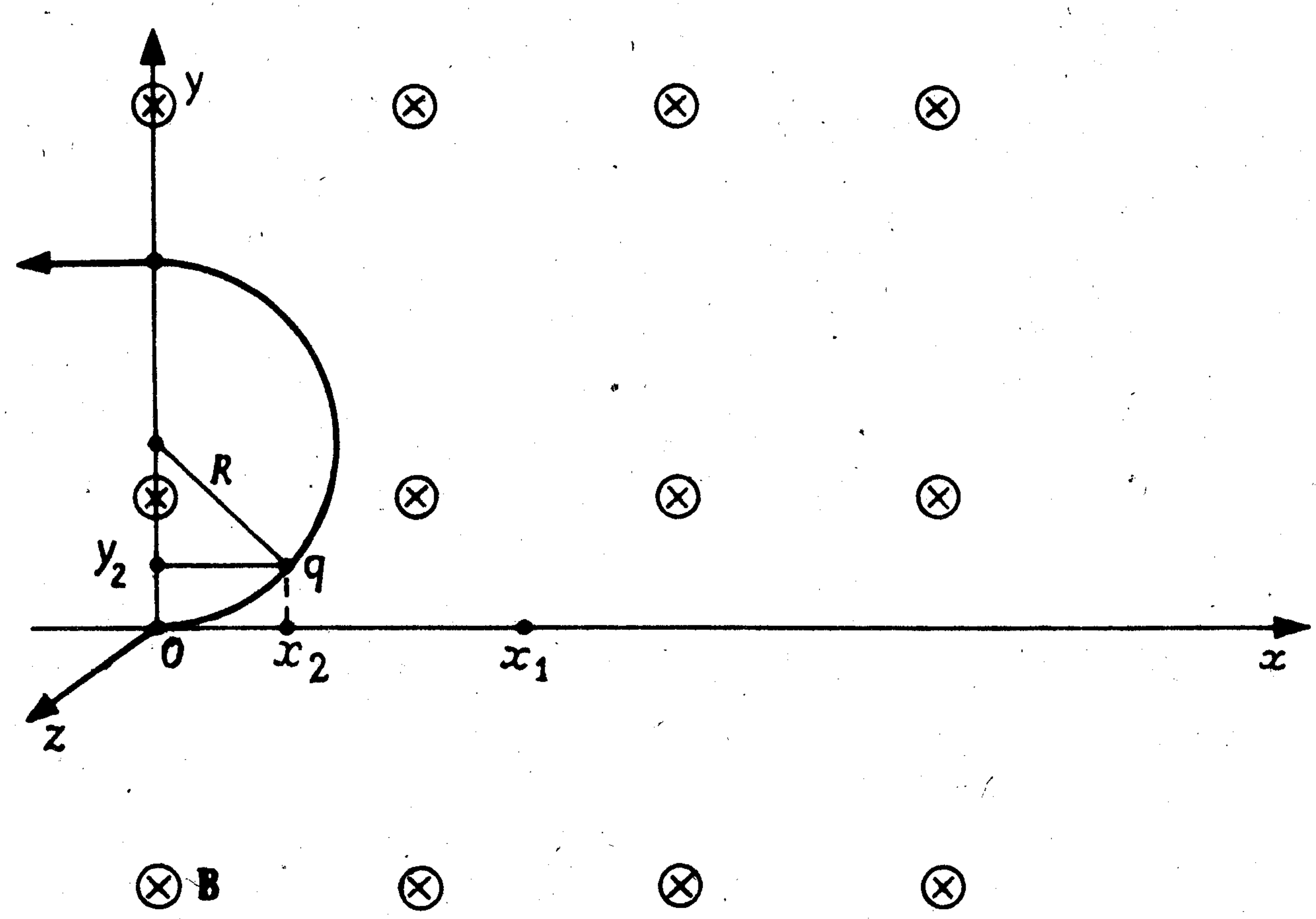


Рис. 3.27.

Решение. Эдс индукции в каждом витке находится по формуле (задача 9):

$$\mathcal{E} = BS\omega \sin \omega t = \mathcal{E}'_{\max} \sin \omega t,$$

где $\mathcal{E}'_{\max} = BS\omega$. Так как витки соединены последовательно, то общая эдс индукции равна $N\mathcal{E}$, следовательно

$$\mathcal{E}_{\max} = N\mathcal{E}'_{\max} = NBS\omega,$$

откуда

$$B = \mathcal{E}_{\max}/NS\omega,$$

$$[B] = \frac{\text{В}}{\text{м}^2 \cdot \text{с}^{-1}} = \frac{\text{Вб}}{\text{м}^2} = \text{Тл},$$

$$B = \frac{300}{400 \cdot 5 \cdot 10^{-2} \cdot 3}\ \text{Тл} = 5\ \text{Тл}.$$

Задача 17. Частицы с одинаковыми массами, но одна с зарядом q, а другая нейтральная, влетают перпендикулярно силовым линиям однородного магнитного поля с индукцией B, имеющего четкую границу, со скоростью v. Определить зависимость расстояния между частицами от времени $l(t)$. Массы частиц малы, и силой тяжести можно пренебречь.

Дано: m, q, B, v; $l(t)$ — ?

Решение. Магнитное поле действует только на заряженные частицы, поэтому нейтральная частица движется прямолинейно и равномерно. Выберем направление осей x и y, как показано на рис. 3.27. Плоскость $y0z$ — граница магнитного поля. Закон движения нейтральной частицы имеет вид $x_1 = vt$, $y_1 = 0$ (рис. 3.27).

На заряженную частицу действует сила Лоренца $F_{\text{Л}} = qvB$. Под действием этой силы частица будет двигаться по окружности. Сделав полоборота, частица покинет магнитное поле и дальше будет двигаться равномерно и прямолинейно.

Радиус окружности $R = mv/qB$, угловая скорость $\omega = 2\pi/T = qB/m$, период вращения $T = 2\pi m/qB$. Итак, при $t < T/2$

$$x_2 = R\sin(qB/m)t, \quad y_2 = R(1 - \cos(qB/m)t).$$

Расстояние между частицами

$$l(t) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

При $t < T/2$

$$x_2 - x_1 = R\sin(qB/m)t - vt,$$
$$y_2 - y_1 = R(1 - \cos(qB/m)t).$$

Окончательно,

$$l(t) = \sqrt{2R^2 + v^2t^2 - 2Rvt\sin(qB/m)t - 2R^2\cos(qB/m)t}.$$

При $t > T/2$

$$x_2 = -v(t - T/2), \quad y_2 = 2R = \text{const},$$
$$l(t) = \sqrt{4R^2 + 4v^2t^2 + v^2(T^2/4) - 2tv^2T}.$$

Задача 18. Энергия магнитного поля катушки, по которой течет постоянный ток, равна 3 Дж. Магнитный поток через катушку равен 0,5 Вб. Найти силу тока.

Дано: $W = 3$ Дж, $\Phi = 0,5$ Вб; I — ?

Решение. Так как магнитный поток через катушку равен $\Phi = LI$, где L — индуктивность катушки, а энергия магнитного поля, создаваемого катушкой,

$$W = LI^2/2,$$

то сила тока равна

$$I = 2W/\Phi,$$
$$[I] = \frac{\text{Дж}}{\text{Вб}} = \frac{\text{В} \cdot \text{Кл}}{\text{В} \cdot \text{с}} = \text{А},$$
$$I = \frac{2 \cdot 3}{0,5}\,\text{А} = 12\,\text{А}.$$

Задача 19. Виток радиуса 5 см, по которому течет постоянный ток, расположен в магнитном поле так, что его плоскость перпендикулярна линиям магнитной индукции. Индукция магнитного поля равна 0,1 Тл. Какую работу необходимо совершить, чтобы повернуть контур на 90° вокруг оси, совпадающей с его диаметром, если ток в контуре постоянен и равен 3 А (рис. 3.28)?

Дано: $B = 0,1$ Тл, $r = 5$см $(5 \cdot 10^{-2}$ м$)$, $I = 3$ А, $\alpha = 90°$; A — ?

Решение. Работа по перемещению проводника в магнитном поле равна

$$A = I\Delta\Phi,$$

где $\Delta\Phi = \Phi_2 - \Phi_1$,

$$\Phi_2 = BS\cos\alpha_2 = 0 \quad (\alpha_2 = \pi/2),$$
$$\Phi_1 = BS\cos\alpha_1 = BS \quad (\alpha_1 = 0).$$

Окончательно:

$$A = IB\pi r^2,$$
$$[A] = \text{А} \cdot \text{Тл} \cdot \text{м}^2 = \text{А}(\text{Н}/\text{А} \cdot \text{м})\,\text{м}^2 = \text{Дж},$$
$$A = 3 \cdot 0,1 \cdot 3,14 \cdot 25 \cdot 10^{-4}\,\text{Дж} = 2,36 \cdot 10^{-3}\,\text{Дж}.$$

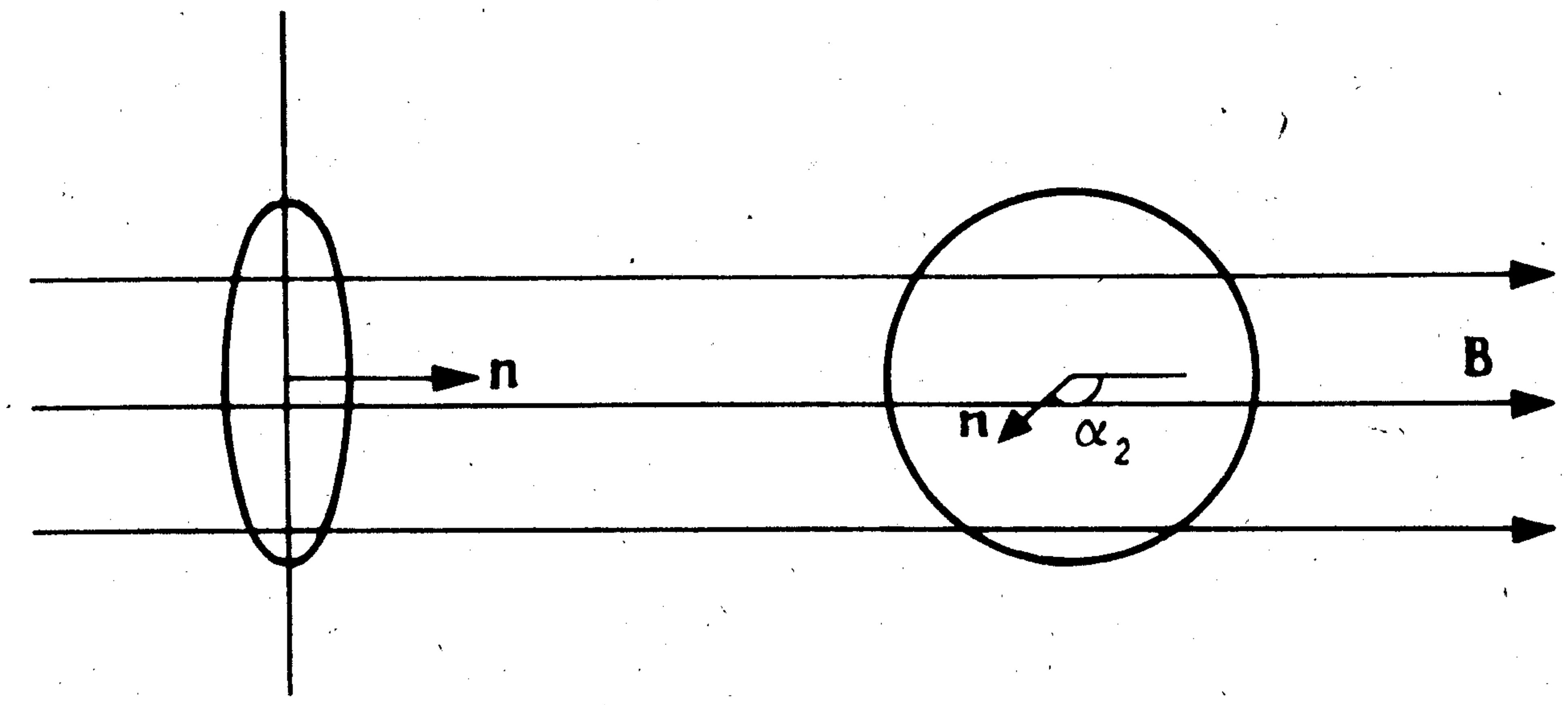


Рис. 3.28.

Задачи для самостоятельного решения

Задача 1. Какую работу совершает однородное магнитное поле с индукцией 2 Тл при перемещении проводника длиной 0,2 м, по которому течет ток 5 А, на расстояние 3 м, если проводник расположен под углом 30° к направлению поля?

Ответ: 3 Дж.

Задача 2. Однозарядные ионы аргона разгоняются в электрическом поле напряжением 1000 В и затем попадают в однородное магнитное поле с индукцией 1 Тл, где разделяются на два пучка, движущиеся по окружностям разных радиусов. Определить радиусы этих окружностей, если массовые числа изотопов аргона 36 и 40.

Ответ: $2,68 \cdot 10^{-2}$ м, $2,83 \cdot 10^{-2}$ м.

Задача 3. С какой угловой скоростью нужно вращать проводник длиной 0,1 м вокруг одного из концов в плоскости, перпендикулярной линиям индукции однородного магнитного поля, чтобы в проводнике возникала эдс индукции 4 В? Магнитная индукция поля равна 2 Тл.

Ответ: 400 рад/с.

Задача 4. В однородное магнитное поле с индукцией 10^{-2} Тл помещен соленоид диаметром 10 см, имеющий 100 витков. Соленоид поворачивается на угол 180° за время 0,1 с так, что ось соленоида направлена по-прежнему вдоль поля. Определите эдс индукции и протекший по соленоиду заряд. Сечение проволоки 1 мм^2, удельное сопротивление $2 \cdot 10^{-8}$ Ом · м.

Ответ: 0,15 В, $2,5 \cdot 10^{-2}$ Кл.

Задача 5. За 1 мс в соленоиде, содержащем 1000 витков, магнитный поток изменился с 5 мВб до 2 мВб. Определить эдс индукции в соленоиде.

Ответ: $3 \cdot 10^3$ В.

Задача 6. Проводник длиной $l = 2$ м и сопротивлением 5 Ом находится в однородном магнитном поле с индукцией 0,5 Тл. Проводник подсоединен к источнику с эдс, равной 3 В, и внутренним сопротивлением 1 Ом. Какова сила тока в проводнике, если он: 1) покоится, 2) движется со скоростью 10 м/с влево; 3) движется с этой же скоростью вправо (рис. 3.22)?

Ответ: 0,5 А, 2,16 А, 1,16 А.

Задача 7. Проволочный контур, имеющий форму равностороннего треугольника со стороной 10 см, помещен в однородное магнитное поле с индукцией 0,5 Тл так, что плоскость контура составляет угол 30° с направлением поля. В некоторый момент времени поле начинает равномерно уменьшаться и через некоторый

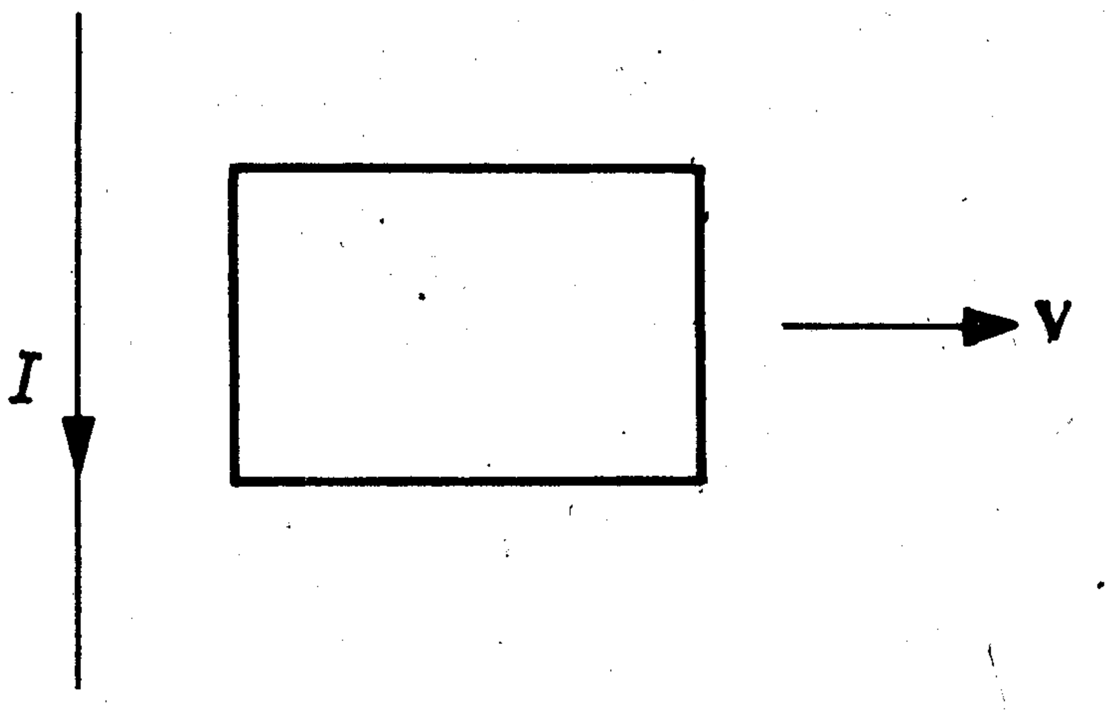


Рис. 3.29.

промежуток времени спадает до нуля. Определить этот промежуток времени, если эдс индукции в контуре равно 40 В.

Ответ: $2,65 \cdot 10^{-5}$ с.

Задача 8. Проволочный виток, имеющий площадь 100 см^2, разрезан в некоторой точке и в разрез включен конденсатор емкостью 40 мкФ. Виток помещен в однородное магнитное поле, линии индукции которого перпендикулярны плоскости витка. Индукция магнитного поля изменяется со скоростью 10^{-2} Тл/с. Определить заряд конденсатора.

Ответ: $4 \cdot 10^{-9}$ Кл.

Задача 9. В однородном магнитном поле с индукцией 0,1 Тл расположен проволочный виток так, что его плоскость перпендикулярна магнитному полю. Площадь, охватываемая контуром витка, равна 100 см^2. Виток замкнут на гальванометр. При повороте витка на угол 90° через гальванометр проходит заряд, равный 10^{-3} Кл. Найти сопротивление витка.

Ответ: 1 Ом.

Задача 10. Определить направление индукционного тока в прямоугольном контуре, удаляемом от прямого проводника с током (рис. 3.29).

Ответ: против часовой стрелки.

Задача 11. При изменении тока от 1 А до 10 А в соленоиде, содержащем 400 витков, его магнитный поток увеличился на $6 \cdot 10^{-3}$ Вб. Чему равна средняя эдс самоиндукции, возникающая в соленоиде, если изменение тока произошло за 0,1 с.

Ответ: 24 В.

Глава 4
Колебания и волны

Движения или процессы, обладающие свойством повторяемости во времени, называются *колебаниями*. Колебания, при которых смещение изменяется по закону синуса или косинуса, называются *гармоническими*.

Любой произвольный колебательный процесс можно представить как сумму гармонических колебаний. (Любую периодическую функцию, согласно теореме Фурье, можно представить как сумму гармонических функций.)

Механические колебания

Пусть к пружине с коэффициентом упругости k прикреплен груз массой m, находящийся на идеально гладкой поверхности (рис. 4.1). При растяжении пружины на тело начинает действовать сила упругости $F_{упр} = -kx$ (сила тяжести и сила нормальной реакции равны и направлены в противоположные стороны). Если тело отпустить, то под действием силы упругости оно начинает двигаться в сторону, противоположную смещению. Проходя положение равновесия, тело будет обладать максимальной скоростью и по инерции продолжит движение,

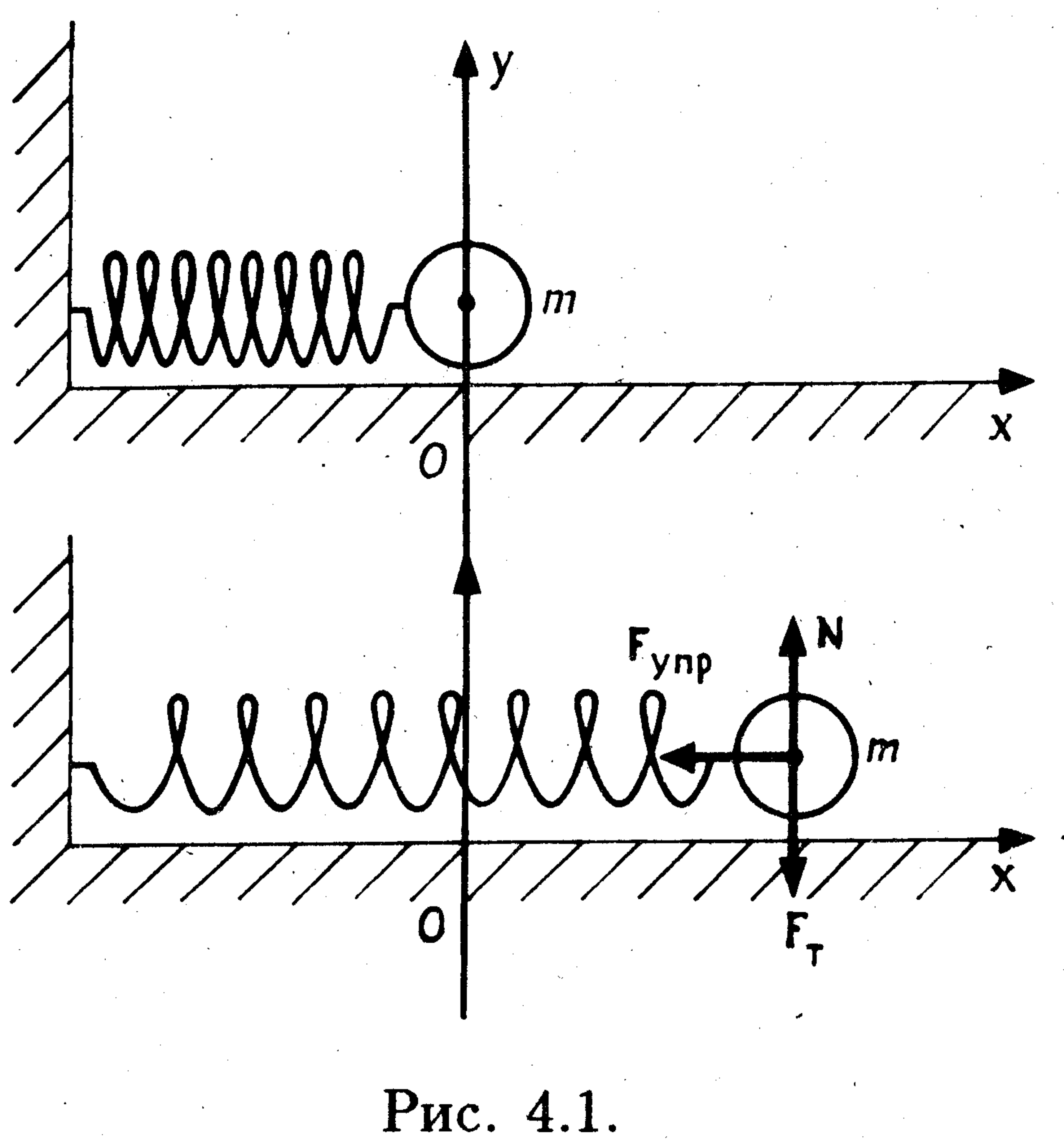


Рис. 4.1.

сжимая пружину. Под действием силы упругости, возникающей при деформации сжатия, тело остановится и начнет двигаться к положению равновесия и т. д. При этом x — смещение тела от положения равновесия O — изменяется по закону

$$x = A\sin(\omega t + \varphi_0), \tag{4.1}$$

где A, ω, φ_0 не зависят от времени. Уравнение (4.1) называется ***уравнением колебаний.***

Характеристики гармонических колебаний

В уравнении (4.1) амплитуда A — максимальное значение изменяющейся величины, в нашем примере A — максимальное смещение от положения равновесия. Амплитуда зависит от энергии, сообщенной системе в начальный момент времени (покажем ниже).

Циклическая (или круговая) частота ω — число полных колебаний, совершаемых системой за промежуток времени 2π с.

Частота ν — число полных колебаний, совершаемых системой за 1 с.

Период колебаний T — промежуток времени, за который совершается одно полное колебание:

$$\nu = 1/T, \quad \omega = 2\pi\nu = 2\pi/T, \tag{4.2}$$

где ν, ω, T определяются параметрами колеблющейся системы.

Фаза колебаний $(\omega t + \varphi_0)$ определяет положение колеблющегося тела в данный момент времени, φ_0 — начальная фаза, определяющая положение колеблющегося тела в момент времени $t = 0$. Фаза обычно измеряется в радианах.

Кинематика гармонических колебаний

Если

$$x = A\sin(\omega t + \varphi_0),$$

то скорость равна

$$v_x = x' = A\omega\cos(\omega t + \varphi_0) = v_0\cos(\omega t + \varphi_0), \tag{4.3}$$

где $v_0 = A\omega$ — амплитудное значение скорости. Ускорение изменяется по закону

$$a_x = v_x' = -A\omega^2\sin(\omega t + \varphi_0) = -a_0\sin(\omega t + \varphi_0), \tag{4.4}$$

где $a_0 = A\omega^2$ — амплитудное значение ускорения. Значения скорости и ускорения, так же как и смещения, изменяются по гармоническому закону. Из (4.1), (4.3) и (4.4) следует, что изменения скорости отстают на $\pi/2$ по фазе от смещения, а изменение ускорения происходит в противофазе со смещением:

$$a_x = -\omega^2 x, \quad \text{или} \quad x'' = -\omega^2 x. \tag{4.5}$$

Из сказанного выше следует, что если материальная точка совершает гармонические колебания, то справедливо уравнение (4.5). Эта связь ускорения и смещения, как можно показать, используя методы высшей математики, является необходимым и достаточным условием для того, чтобы тело совершало гармонические колебания около положения равновесия. Следовательно, если при анализе поставленной задачи будет найдено, что $a_x = -cx$, где c — положительная постоянная величина, то тело будет совершать гармонические колебания около положения равновесия с циклической частотой $\omega = \sqrt{c}$.

Динамика гармонических колебаний

Согласно 2-му закону Ньютона,

$$ma_x = F_{\text{рез}\,x},$$

где $F_{\text{рез}\,x}$ — проекция на ось x результирующей всех сил, действующих на тело. Поскольку

$$a_x = -\omega^2 x,$$
$$F_{\text{рез}\,x} = -m\omega^2 x, \tag{4.6}$$

где $F_{\text{рез}\,x}$ — проекция сил на ось x, вдоль которой совершаются колебания.

Из (4.6) следует, что равнодействующая сил, действующих на тело, совершающее гармоническое колебание, прямо пропорциональна смещению и направлена в сторону, противоположную смещению. Силы, прямо пропорциональные смещению и направленные в сторону, противоположную смещению, т. е. удовлетворяющие условию $F_x = -kx$, но имеющие иную природу, чем упругие силы, называются *квазиупругими*. Гармонические колебания совершаются под действием упругих или квазиупругих сил.

Преобразования энергии при гармонических колебаниях

Если колебания тела происходят по закону

$$x = A\sin(\omega t + \varphi_0),$$

то кинетическая энергия тела равна:

$$W_{\text{кин}} = \frac{mv_x^2}{2} = \frac{mA^2\omega^2\cos^2(\omega t + \varphi_0)}{2}. \tag{4.7}$$

Потенциальная энергия равна

$$W_{\text{пот}} = \frac{kx^2}{2} = \frac{kA^2\sin^2(\omega t + \varphi_0)}{2}, \tag{4.8}$$

а так как $k = m\omega^2$,

$$W_{\text{пот}} = \frac{m\omega^2A^2\sin^2(\omega t + \varphi_0)}{2}.$$

При этом за нулевой уровень отсчета потенциальной энергии выбирается положение равновесия ($x = 0$). Полная механическая энергия системы равна

$$W_0 = W_{\text{кин}} + W_{\text{пот}} = m\omega^2A^2/2. \tag{4.9}$$

Амплитуда колебаний равна

$$A = \frac{1}{\omega}\sqrt{\frac{2W_0}{m}}$$

и определяется энергией, сообщенной системе. Потенциальная и кинетическая энергии изменяются по гармоническому закону с частотой 2ω. Выражения для потенциальной и кинетической энергий можно переписать в виде:

$$W_{\text{пот}} = (mA^2\omega^2/4)[1 - \cos 2(\omega t + \varphi_0)],$$
$$W_{\text{кин}} = (mA^2\omega^2/4)[1 + \cos 2(\omega t + \varphi_0)].$$

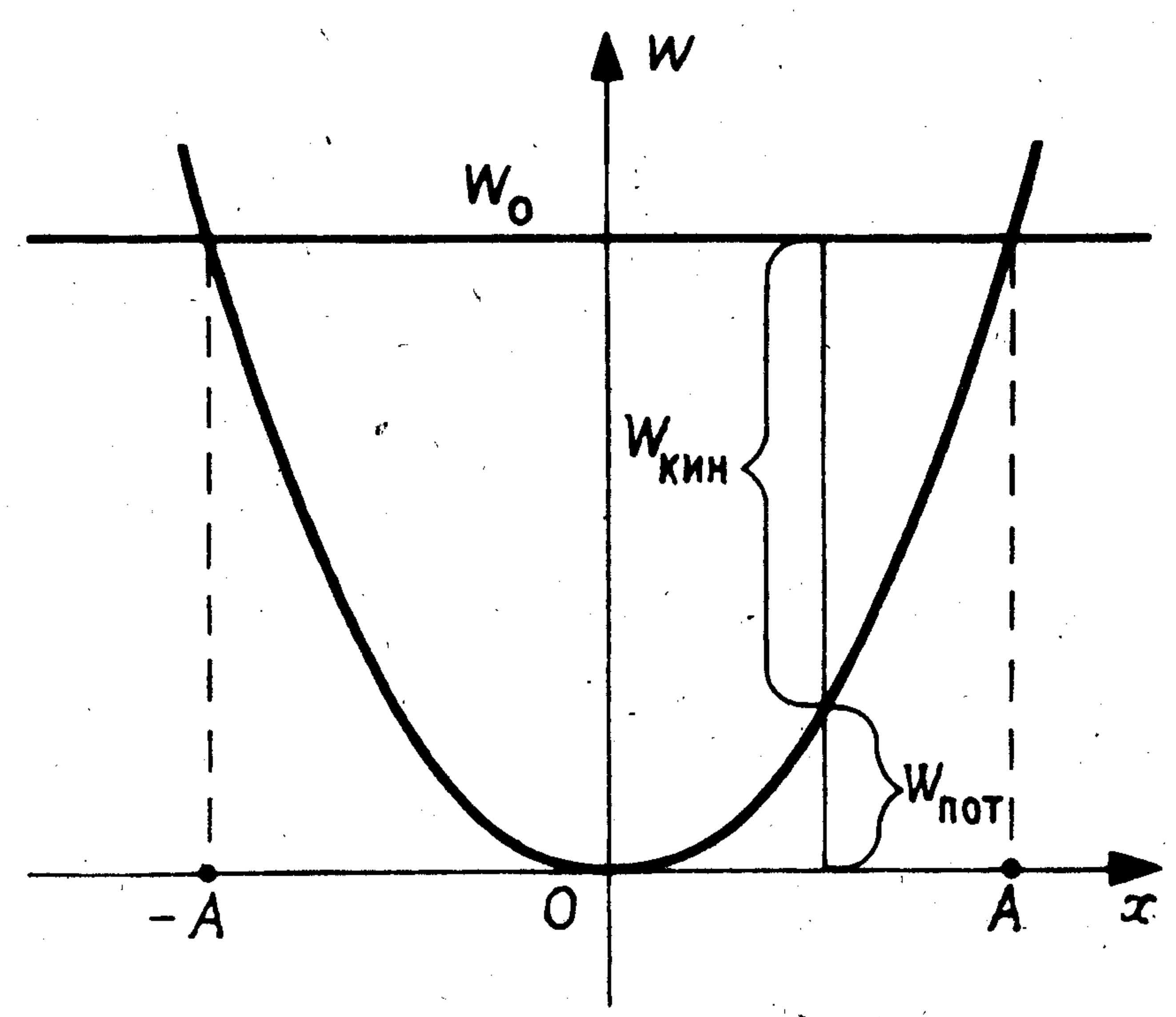


Рис. 4.2.

График зависимости потенциальной энергии колеблющегося тела от смещения x изображен на рис. 4.2. На рисунке показаны кинетическая и потенциальная энергия тела при $x < A$, полная механическая энергия тела при любом x рана W_0. При этом $W_0 = W_{пот} + W_{кин} = \text{const}$, если в системе отсутствует трение (сопротивление).

Сложение колебаний, направленных вдоль одной прямой

Пусть материальная точка одновременно участвует в двух колебаниях, происходящих вдоль одной прямой, например, вдоль оси x. Частоты колебаний одинаковы, а разность фаз есть $\Delta\varphi$. Тогда уравнения колебаний имеют вид

$$x_1 = A_1 \sin\omega t, \quad x_2 = A_2 \sin(\omega t + \Delta\varphi).$$

При сложении этих двух колебаний получим

$$x = x_1 + x_2 = A_1 \sin\omega t + A_2 \sin(\omega t + \Delta\varphi).$$

Очевидно, что амплитуда результирующего колебания будет зависеть от разности фаз. Так, если $\Delta\varphi = \pm 2\pi n$, где $n = 0, 1, 2, \ldots, n$, то $x = (A_1 + A_2)\sin\omega t$, т. е. амплитуда результирующего колебания равна сумме амплитуд складываемых колебаний. Если $\Delta\varphi = \pm(2n+1)\pi$, то $x = (A_1 - A_2)\sin\omega t$, т. е. амплитуда результирующего колебания равна разности амплитуд и колебания происходят с минимальной амплитудой. Если амплитуды складываемых колебаний равны, то в этом случае колебаний вообще происходить не будет.

Затухающие колебания

Выше был рассмотрен случай, когда сопротивление отсутствует и на тело действует только сила $F_1 = -kx$. Во всех реальных случаях помимо этой силы на тело действует сила сопротивления, которая обычно считается пропорциональной скорости и направленной в сторону, противоположную скорости:

$$F_2 = -rv,$$

где r — постоянный коэффициент. Тогда из 2-го закона Ньютона имеем

$$ma = -kx - rv, \tag{4.10}$$

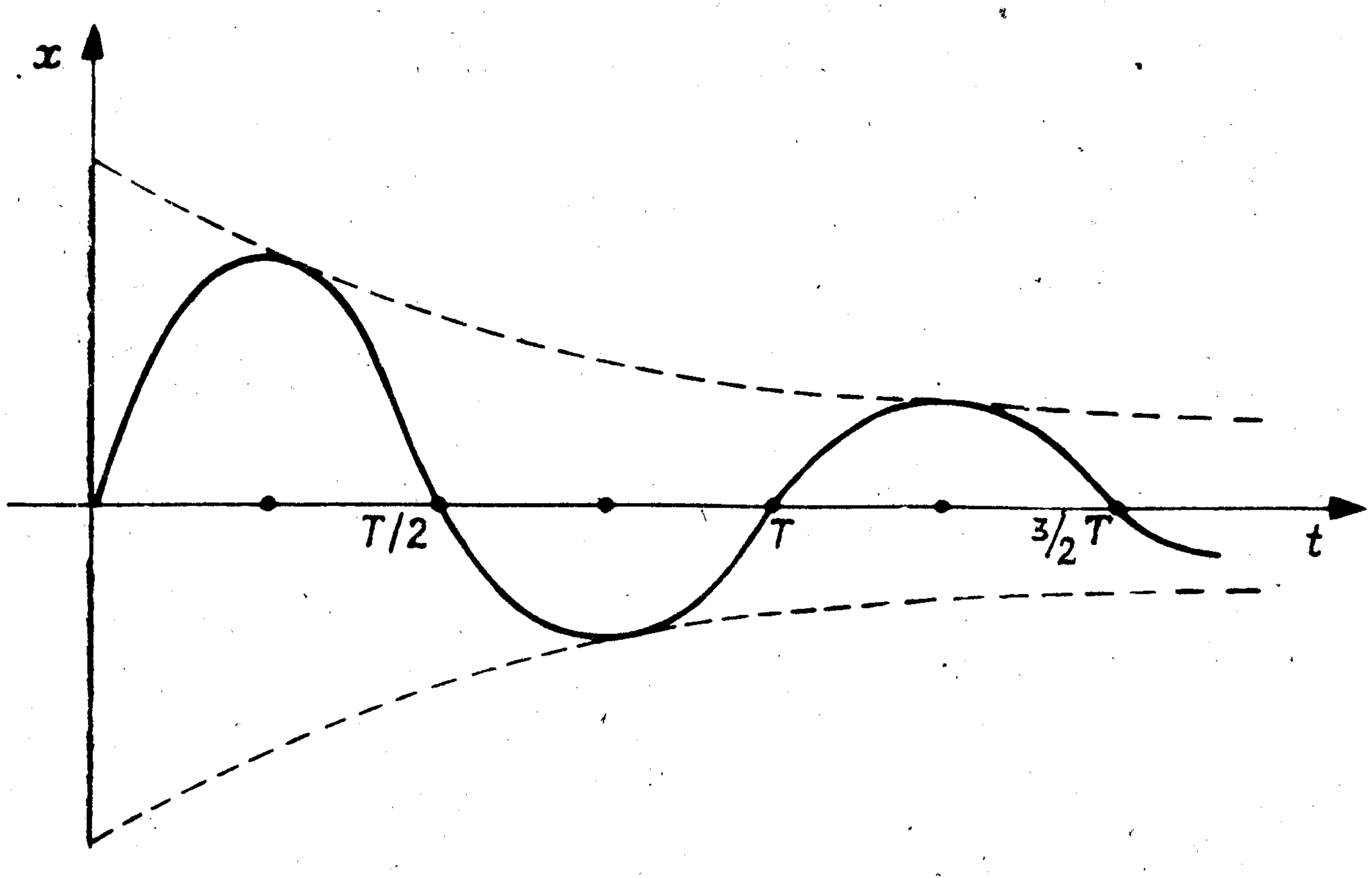


Рис. 4.3.

или

$$a = -\omega_0^2 x - 2\beta v,$$

причем $\omega_0^2 = k/m$, ω_0 — частота собственных колебаний системы в отсутствие затухания, $r/m = 2\beta$, где β — коэффициент затухания. Очевидно, чем больше r и чем меньше m, тем быстрее будут затухать колебания.

Решение уравнения (4.10) имеет вид:

$$x = A_0 e^{-\beta t} \sin(\omega t + \varphi_0), \tag{4.11}$$

где $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$. Колебания, описываемые уравнением (4.11), строго говоря не являются периодическими. Такие колебания принято называть *затухающими* колебаниями с периодом

$$T = 2\pi/\omega = 2\pi/\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}.$$

На рис. 4.3 приведен график зависимости $x(t)$. Амплитуда изменяется по экспоненциальному закону (штриховая линия). Если силой сопротивления пренебречь нельзя, то механическая энергия в процессе колебаний непрерывно уменьшается, переходя во внутренюю энергию. Амплитуда колебаний будет уменьшаться и колебания постепенно затухнут.

Вынужденные колебания

Для поддержания колебаний в системе необходимо, чтобы действовала сила, работа которой компенсировала бы уменьшение механической энергии. Эта сила должна быть переменной, так как постоянная сила может только изменить положение равновесия, но не может способствовать поддержанию колебаний в системе. Таким образом, на систему, совершающую колебания должна действовать *вынуждающая сила*

$$F_3 = F_0 \sin \Omega t,$$

где F_0 — амплитуда вынуждающей силы, Ω — ее частота. Помимо вынуждающей силы на тело действуют сила упругости (или квазиупругая сила) $F_1 = -kx$

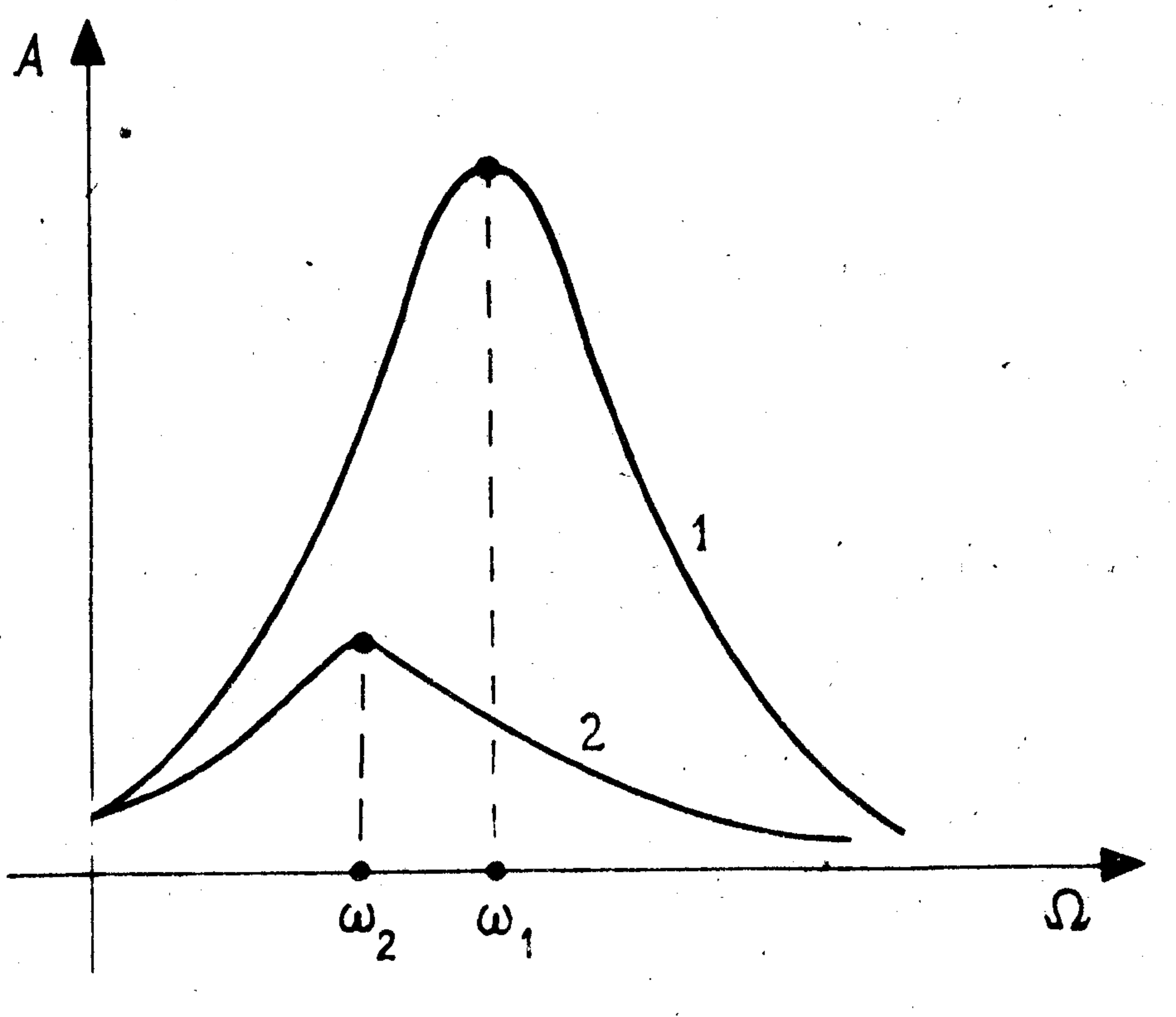


Рис. 4.4.

и сила сопротивления $F_2 = -rv$. Из 2-го закона Ньютона в этом случае имеем

$$ma = -kx - rv + F_0 \sin \Omega t. \tag{4.12}$$

Собственные колебания в системе затухнут, следовательно, вынужденные колебания происходят с частотой вынуждающей силы. Колебания, происходящие под действием вынуждающей силы, называются ***вынужденными колебаниями***. Уравнение вынужденных колебаний имеет вид

$$x = A \sin(\Omega t + \alpha_0), \tag{4.13}$$

где A — амплитуда вынужденных колебаний, α_0 — фаза, определяемые соотношениями

$$A = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\beta^2\Omega^2}},$$

$$\mathrm{tg}\alpha_0 = -\frac{2\beta\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}. \tag{4.14}$$

Из (4.14) видно, что амплитуда и фаза зависят от соотношения между частотой собственных колебаний ω_0 и частотой вынуждающей силы Ω. При совпадении этих частот амплитуда колебаний будет резко возрастать. Это явление получило название ***резонанса***. Резонансная амплитуда зависит от сопротивления среды (рис. 4.4). Кривой 1 соответствует меньшее сопротивление среды, чем кривой 2. При $\omega_0 = \Omega$ $\mathrm{arctg}\, \alpha_0 \to -\pi/2$, и соответственно уравнение колебаний имеет вид $x = -A \cos \Omega t$. Тогда скорость изменяется по закону $v_x = x' = A\Omega \sin \Omega t$. Из последнего равенства очевидно, что скорость изменяется в фазе с вынуждающей силой. Возрастание амплитуды при резонансе объясняется тем, что при $\omega_0 = \Omega$ направление вынуждающей силы все время совпадает с перемещением, и следовательно, вынуждающая сила будет непрерывно совершать положительную работу. Таким образом, механическая энергия, а соответственно, и амплитуда будут расти. При отсутствии сопротивления среды амплитуда стремится к бесконечности. При $\omega_0 \neq \Omega$ вынуждающая сила на одних перемещениях совершает положительную, а на других отрицательную работу, и поэтому амплитуды вынужденных колебаний невелики.

Упругие (механические) волны

Процесс распространения колебаний в пространстве называется *волновым процессом*. Механические волны могут распространяться только в упругих средах, т. е. в средах, в которых возникают силы, препятствующие 1) деформации растяжений (сжатий) или 2) деформации сдвига.

В первом случае распространяется *продольная волна*, т. е. волна, вызывающая в пространстве колебания частиц среды вдоль направления распространения волны. Продольные волны могут распространяться в твердых, жидких и газообразных средах.

Во втором случае в пространстве существует *поперечная волна*, т. е. волна, вызывающая в пространстве колебания частиц среды перпендикулярно направлению распространения волны. Поперечные волны могут распространяться только в твердых телах.

Пусть колебания точки O упругого шнура происходит по закону $y_0 = A\sin\omega t$ (рис. 4.5а), ось x указывает направление распространения волны. В начальный момент времени точка O начинает двигаться вверх, увлекая соседние части шнура. В момент $t_1 = T/4$ смещение точки O будет максимальным. За время $T/4$ в колебательный процесс будет вовлечена часть шнура OA. К моменту времени $t_4 = T$ точка O шнура завершит полное колебание, причем фазы колебаний точек O и D одинаковы. Кратчайшее расстояние между точками, колеблющимися в одной фазе, называется *длиной волны* λ.

Длина волны — это расстояние, на которое распространяется волна за время,

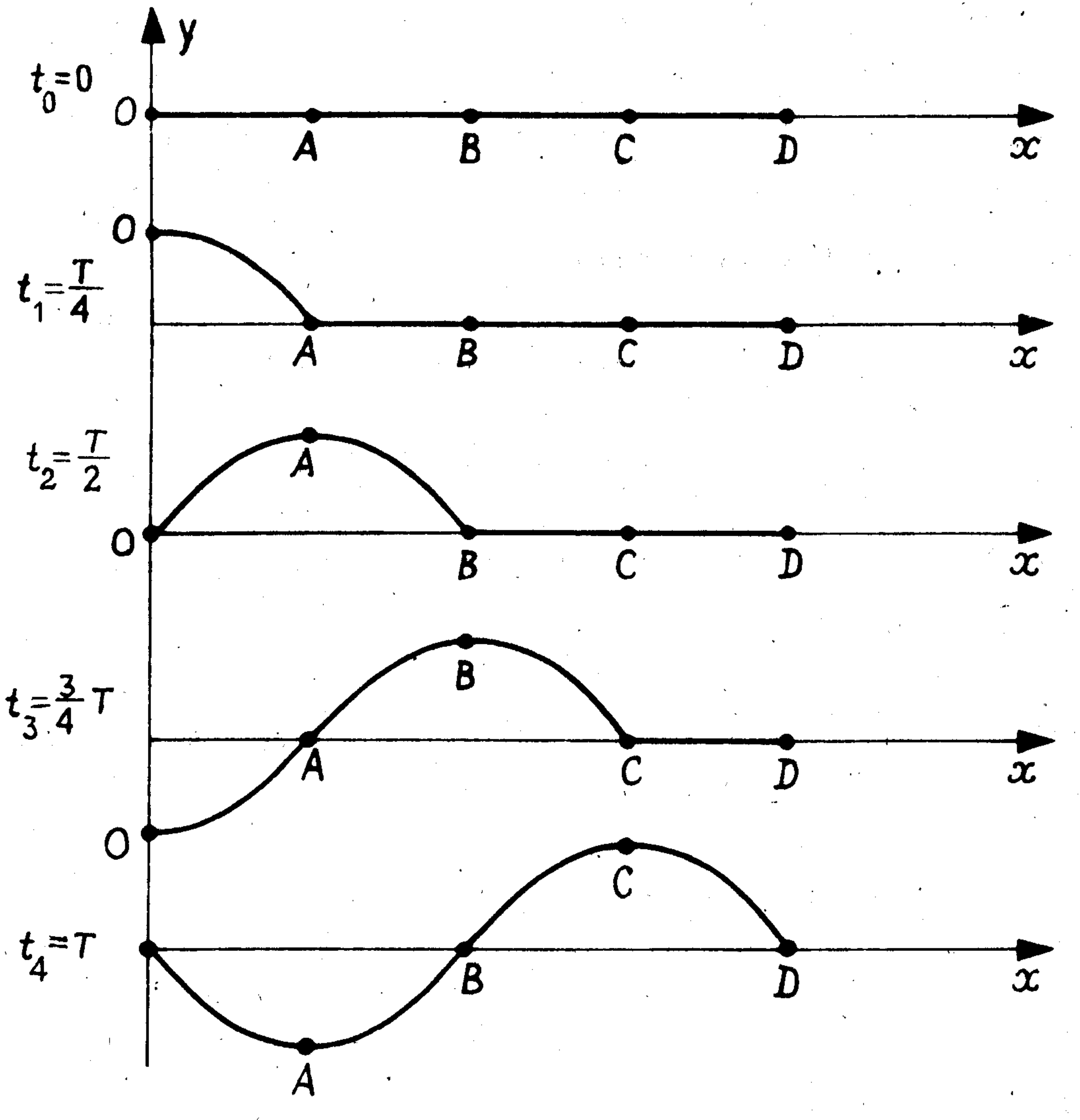


Рис. 4.5а.

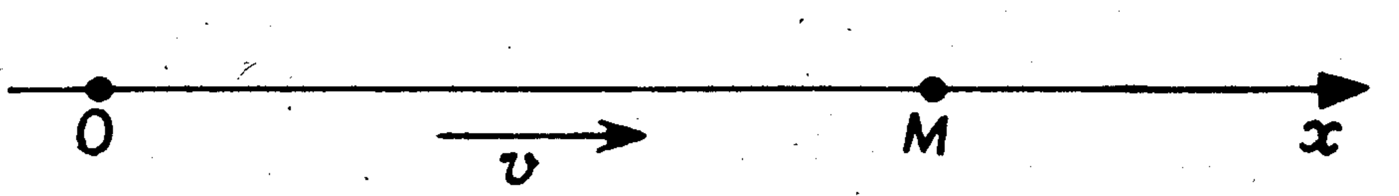


Рис. 4.5б.

равное одному периоду колебаний T:

$$\lambda = vT, \tag{4.15}$$

где v — скорость распространения волны, зависящая от свойств среды. В однородной среде скорость постоянна.

Скорость распространения продольных волн в твердых средах

$$v = \sqrt{E/\rho}, \tag{4.16}$$

где E — модуль Юнга, ρ — плотность среды. Скорость звука в газе (продольная механическая волна) есть

$$v = \sqrt{\gamma RT/M}, \tag{4.16a}$$

где γ — отношение теплоемкости газа при постоянном давлении к теплоемкости при постоянном объеме c_P/c_V, M — эффективная молекулярная масса воздуха.

Фронтом волны называется геометрическое место точек, которых достигло возмущение в данный момент времени. Форма фронта определяется источником. Так, фронт волны, генерируемой точечным источником, имеет форму сферы, и говорят, что распространяется *сферическая волна.*

Волна называется *плоской*, если фронт плоский. При распространении плоской волны все точки в плоскости, перпендикулярной направлению распространения, колеблются в одинаковой фазе, поэтому, зная закон колебаний в одной точке, мы тем самым можем описать колебательный процесс во всех точках плоскости. Фронт волны всегда перпендикулярен направлению ее распространения.

Пусть вдоль оси x распространяется плоская волна (рис. 4.5б). В точке O находится источник колебаний, уравнение смещения в точке O $y_0 = A\sin\omega t$, где t — время, отсчитываемое с момента начала колебаний в точке O.

В точке M колебания происходят по аналогичному закону: $y_M = A\sin\omega t'$, где t' — время, отсчитываемое с момента начала колебаний в точке M. Очевидно, t' меньше t на промежуток времени τ, за который волна успевает пройти расстояние $OM = x_M$, т. е. $\tau = x_M/v$. Таким образом,

$$y_M = A\sin\omega(t - x_M/v).$$

Так как точка M произвольна, можно записать

$$y = A\sin\omega(t - x/v). \tag{4.17}$$

Уравнение (4.17) представляет собой *уравнение бегущей волны.* Оно позволяет определить смещение в любой точке среды в любой момент времени. Уравнение (4.17) можно переписать в виде

$$y = A\sin 2\pi(t/T - x/\lambda). \tag{4.18}$$

Интерференция волн

Интерференция — сложение волн с образованием устойчивой картины максимумов и минимумов амплитуды колебаний. Необходимым условием интерференции является *когерентность* источников. *Когерентными* называются источники, вызывающие в каждой точке пространства колебания, разность фаз которых остается постоянной во времени. Такие источники излучают когерентные волны.

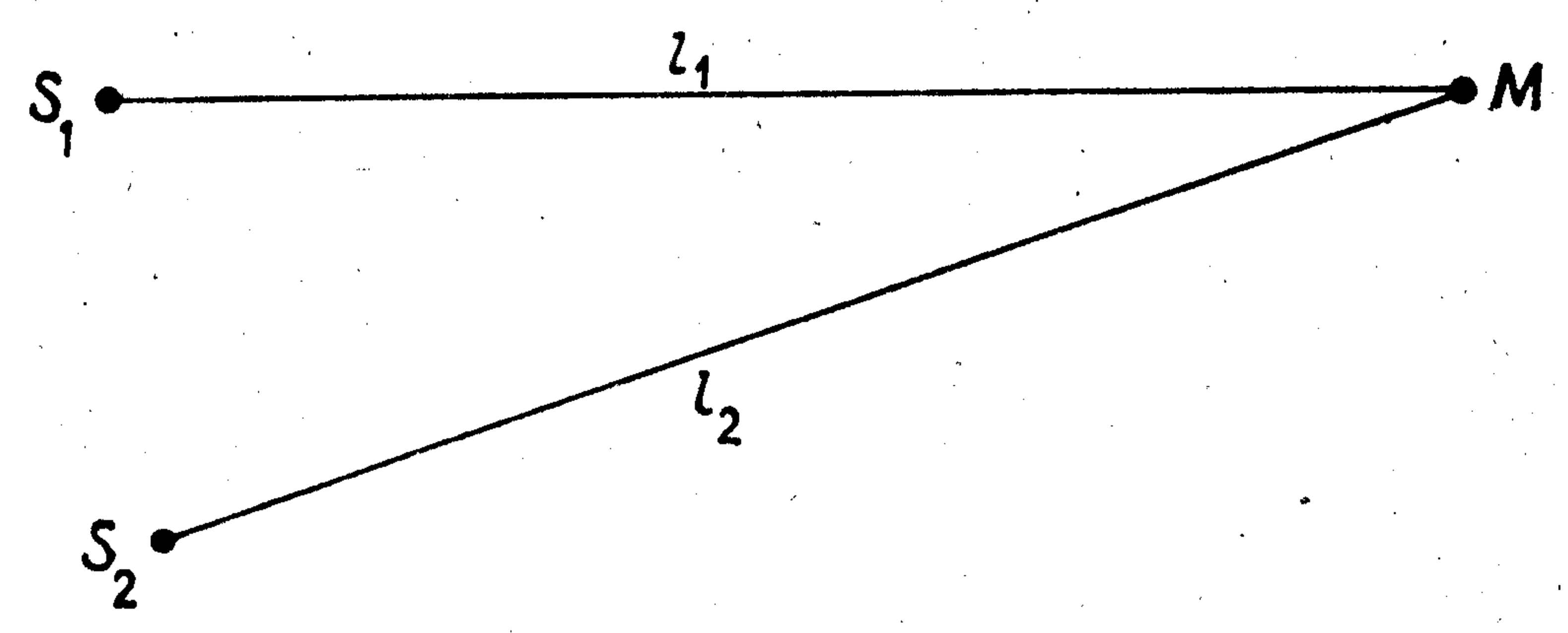


Рис. 4.6а.

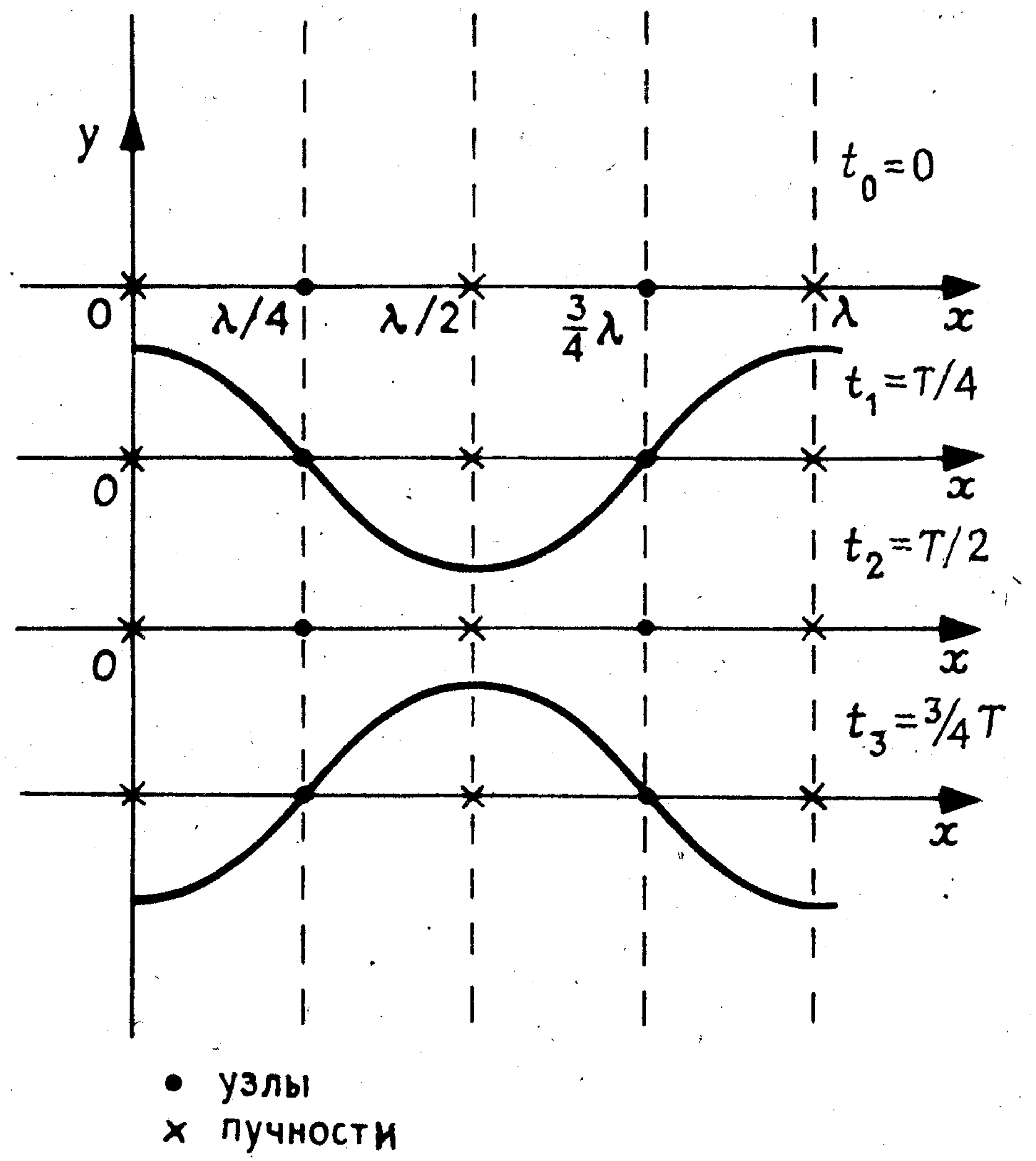


Рис. 4.6б.

Очевидно, что только источники, возбуждающие колебания с одинаковыми частотами, могут быть когерентными, так как, если $\omega_1 \neq \omega_2$, то разность фаз равна

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \omega_2 t + \varphi_{02} - \omega_1 t - \varphi_{01} = (\omega_2 - \omega_1)t + \varphi_{02} - \varphi_{01}$$

и зависит от времени.

Если источники некогерентны, то во всех точках пространства будут возбуждаться колебания, разность фаз которых изменяется со временем. Изменяется со временем и амплитуда результирующего колебания, т. е. интерференции не будет. На рис. 4.6а источники S_1 и S_2 — когерентные и вызывают колебания частиц в одном направлении. Рассмотрим сложение колебаний, возбуждаемых этими источниками в точке M:

$$y_1 = A_1 \sin 2\pi(t/T - l_1/\lambda),$$

$$y_2 = A_2 \sin 2\pi(t/T - l_2/\lambda),$$

где l_1 и l_2 — расстояниияот источников до точки M. Разность фаз складываемых колебаний:

$$\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2 = 2\pi(l_1 - l_2)/\lambda = (2\pi/\lambda)\Delta l. \tag{4.19}$$

Напомним, что если разность фаз складываемых колебаний равна $0, 2\pi$, 4π и т. д., т. е. $\Delta\varphi = \pm 2\pi n$, где $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$, то оба колебания вызывают смещение в одном направлении и амплитуда результирующего колебания будет равна сумме амплитуд складываемых колебаний.

Если разность фаз складываемых колебаний равна π, 3π, 5π и т. д., т. е. $\Delta\varphi = \pm(2n+1)\pi$, то эти колебания вызывают смещение в противоположных направлениях и амплитуда результирующего колебания равна разности амплитуд исходных колебаний. Приняв $\Delta\varphi = \pm 2\pi n$, из выражения (4.19) получим

$$2\pi\Delta l/\lambda = \pm 2\pi n, \quad \Delta l = \pm n\lambda. \tag{4.20}$$

Таким образом, в точках пространства, где разность хода $\Delta l = l_1 - l_2$ равна целому числу длин волн, наблюдаются интерференционные максимумы и $A = A_1 + A_2$. Сделав аналогичные выкладки, получим, что если разность хода равна нечетному числу длин полуволн

$$\Delta l = \pm(2n+1)\lambda/2, \tag{4.21}$$

то в этих точках пространства находятся интерференционные минимумы $A = |A_1 - A_2|$.

При интерференции происходит перераспределение энергии в пространстве, так что в точках максимумов $A = 2A_1$ (для простоты будем считать, что $A_1 = A_2$), и энергия колебаний $W \sim A^2 = 4A_1^2$, в точках минимумов $W = 0$.

Если складываются две волны, идущие навстречу друг другу (прямая и отраженная), то образуется *стоячая волна*:

$$y_{\text{пр}} = A \sin 2\pi(t/T - x/\lambda),$$

$$y_{\text{отр}} = A \sin 2\pi(t/T + x/\lambda),$$

$$y_{\text{ст}} = y_{\text{пр}} + y_{\text{отр}} = 2A\cos(2\pi x/\lambda)\sin\omega t \tag{4.22}$$

есть уравнение стоячей волны. Из уравнения (4.22) следует, что амплитуда колебаний при возбуждении стоячей волны

$$A_{\text{ст}} = 2A\cos(2\pi x/\lambda)$$

зависит от положения колеблющейся точки. В точках, для которых $2\pi x/\lambda = \pi n$, т. е. $x = n\lambda/2$, колебания происходят с удвоенной амплитудой: $A_{\text{ст}} = 2A$ (*пучности волны*). В точках, для которых $2\pi x/\lambda = (2n+1)\pi/2$, т. е. $x = (2n+1)\pi/4$, колебаний не происходит, $A_{\text{ст}} = 0$ (*узлы стоячей волны*). Расстояние между двумя соседними пучностями или двумя соседними узлами равно $\lambda/2$. На рис. 4.5а и 4.6б изображены “мгновенные снимки” бегущей и стоячей волн в моменты времени $t = 0$, $t_1 = T/4$, $t_2 = T/2$, $t_3 = (3/4)T$, $t_4 = T$. Для сравнения стоячей и бегущей волн приведем таблицу.

	Бегущая волна	Стоячая волна
Уравнение	$y = A\sin 2\pi(t/T - x/\lambda)$	$y = 2A\cos(2\pi x/\lambda)\sin\omega t$
Амплитуда	Одинакова во всех точках и равна A	Зависит от положения колеблющейся точки $0 \le A_{\text{ст}} \le 2A$
Фаза	Зависит от положения колеблющейся точки	Одинакова между двумя соседними узлами
Энергия	Переносит энергию	Не переносит энергии (в прямом и обратном направлениях за один и тот же промежуток времени переносятся равные порции энергии)

Стоячие волны возбуждаются, например, в струнах музыкальных инструментов. Образование стоячей волны — частный случай интерференции волн.

Электромагнитные колебания

Колебательный контур состоит из катушки индуктивности L и конденсатора C (рис. 4.7). Если зарядить конденсатор до напряжения U_0, то в начальный момент времени $t_1 = 0$ на обкладках конденсатора будут амплитудные (максимальные) значения напряжения U_0 и заряда $q_0 = CU_0$. Полная энергия системы равна энергии электрического поля конденсатора:

$$W = W_{\text{эл}} = CU_0^2/2 = q_0^2/2C.$$

По цепи начинает течь ток, так как обкладки конденсатора накоротко замкнуты на индуктивность, однако вследствие самоиндукции конденсатор разряжается не мгновенно, а постепенно. Ток через индуктивность увеличивается, достигая максимального значения I_0. В момент времени $t_2 = T/4$ заряд конденсатора станет равным нулю, а ток достигнет максимального значения I_0. Энергия системы будет равна энергии магнитного поля соленоида:

$$W = W_{\text{м}} = LI_0^2/2.$$

Когда напряжение обращается в нуль, ток в цепи должен прекратиться, однако вследствие самоиндукции ток будет продолжать течь, что вызовет перезарядку

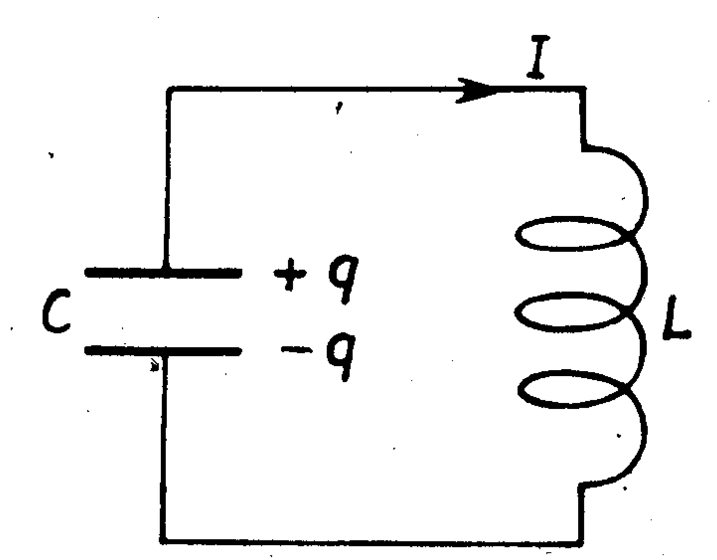


Рис. 4.7.

конденсатора. Постепенно ток уменьшится до нуля. В момент времени $t_3 = T/2$ $q = q_0$, $U = U_0$, $I = 0$. Затем конденсатор начинает разряжаться, причем ток через индуктивность течет в обратном направлении, и т. д. Через промежуток времени, равный T, система приходит в исходное состояние. Напряжение на обкладках конденсатора равно эдс самоиндукции:

$$q/C = -LI',$$

где I' — производная силы тока по времени, откуда

$$q'' = -q/CL.$$

Сравнив с (4.5) ($x'' = -\omega^2 x$), для частоты колебаний имеем

$$\omega = 1/\sqrt{LC}.$$

Период колебаний равен

$$T = 2\pi\sqrt{LC}. \tag{4.23}$$

Заряд на обкладках конденсатора со временем изменяется по закону

$$q = q_0 \sin(\omega t + \varphi_0), \tag{4.24}$$

напряжение на обкладках равно

$$U = q/C = U_0 \sin(\omega t + \varphi_0). \tag{4.25}$$

Выражение для тока, равного $I = q'$, имеет вид

$$I = I_0 \cos(\omega t + \varphi_0), \quad I_0 = \omega q_0. \tag{4.26}$$

Таким образом, в колебательном контуре по гармоническому закону изменяются заряд, напряжение на обкладках конденсатора и сила тока в контуре. Так же происходит превращение энергии электрического поля в энергию магнитного поля и обратно.

Если в цепи колебательного контура сопротивление R не равно нулю, то в процессе колебаний часть энергии непрерывно будет переходить во внутреннюю (в тепло) и колебания затухнут. Для поддержания колебаний необходимо в цепь колебательного контура подключить переменную эдс:

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \sin \Omega t,$$

где $\mathcal{E}_0$ — амплитудное значение эдс, Ω — ее частота. При совпадении собственной частоты колебаний с частотой внешней эдс амплитудные значения заряда, напряжения и тока резко увеличиваются (резонанс). Электрический резонанс используется для настройки на определенную длину электромагнитной волны. В колебательном контуре индуктивность или емкость берутся переменными, что позволяет настроить контур на нужную частоту. При совпадении частоты сигнала с собственной частотой колебательного контура ток в контуре становится достаточно большим. Сигналы всех остальных частот вызывают в цепи слабые токи (рис. 4.8).

Переменный ток

Переменный ток — ток, изменяющийся во времени. Будем рассматривать ток, изменяющийся во времени по синусоидальному закону:

$$I = I_0 \sin(\omega t + \varphi_0) \tag{4.27}$$

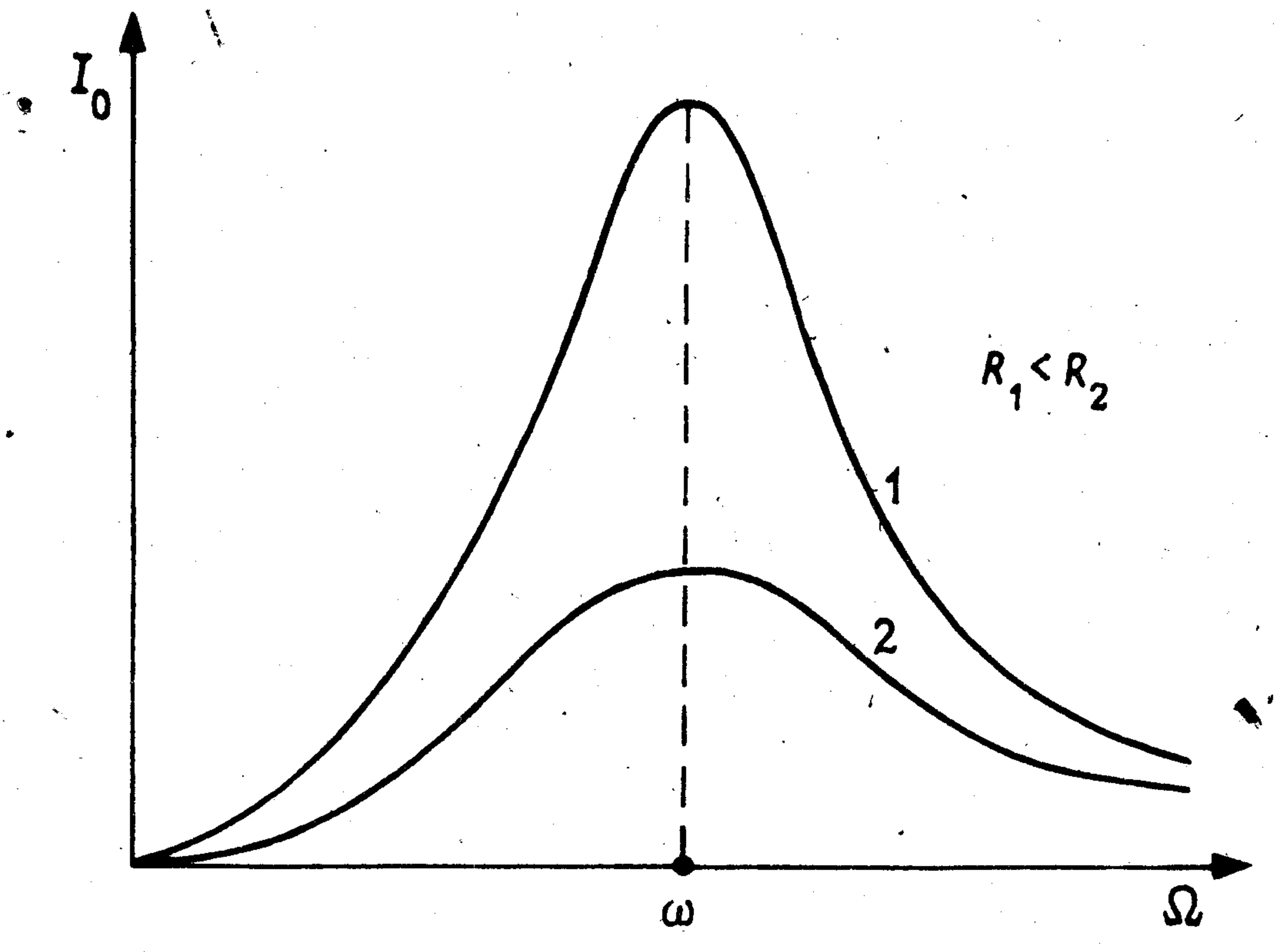


Рис. 4.8.

и возникающий в цепи, подключенной к источнику эдс:

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \sin \omega t,$$

где I_0 — амплитудное значение силы тока, ω — циклическая частота, φ_0 — начальная фаза.

Эффективное, или *действующее, значение* силы тока $I_э$— это значение силы такого постоянного тока, который за промежуток времени, равный одному периоду, вызовет в омическом сопротивлении выделение такого же количества теплоты, что и переменный ток:

$$I_э = I_0/\sqrt{2}. \tag{4.28}$$

Аналогично, эффективные значения напряжения $U_э$ и эдс $\mathcal{E}_э$ равны соответственно

$$U_э = U_0/\sqrt{2},$$

$$\mathcal{E}_э = \mathcal{E}_0/\sqrt{2}.$$

Если цепь состоит из омического сопротивления R, электрической емкости C и индуктивности L, то сопротивление этого участка цепи равно

$$Z = \sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}, \tag{4.29}$$

где ωL — реактивное индуктивное сопротивление, $1/\omega C$ — реактивное емкостное сопротивление.

Если в цепь включена эдс (рис. 4.9) $\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \sin \omega t$, то сила тока равна

$$I = I_0 \sin(\omega t - \varphi), \tag{4.30}$$

где

$$I_0 = \mathcal{E}_0/Z, \quad \varphi = \operatorname{arctg} X/R. \tag{4.31}$$

Величина

$$X = \omega L - 1/\omega C \tag{4.32}$$

называется реактивным сопротивлением и определяет отставание по фазе тока

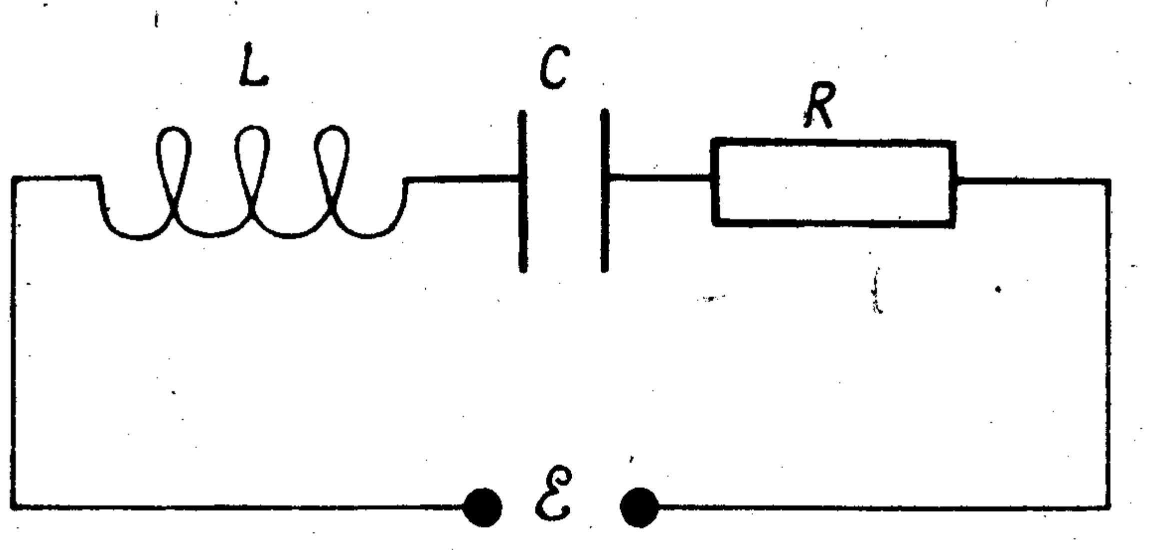


Рис. 4.9.

от эдс. Среднее за период значение мощности переменного тока

$$P = I_э \mathcal{E}_э \cos\varphi. \tag{4.33}$$

Если $X = 0$, т. е. отсутствует реактивное сопротивление, получаем формулу для мощности постоянного тока:

$$P = I\mathcal{E}.$$

Электромагнитные волны

Согласно теории Максвелла, переменное магнитное поле вызывает появление переменного вихревого электрического поля, которое, в свою очередь, вызывает появление переменного магнитного поля и т. д. Таким образом происходит распространение электромагнитных возмущений в пространстве, т. е. распространяется электромагнитная волна. Силовые линии электрического поля в этом случае являются замкнутыми. Источником этого поля является переменное магнитное поле, а не положительные и отрицательные заряды. Электрическое поле в электромагнитной волне — вихревое, силовые линии этого вихревого поля лежат в плоскостях, перпендикулярных вектору **B**.

Перечислим основные свойства электромагнитных волн.

1. Электромагнитная волна — поперечная (рис. 4.10). Вектора **E**, **B** и **v** взаимно перпендикулярны и составляют правовинтовую тройку векторов.

2. Скорость электромагнитных волн в вакууме равна

$$v = c = 3 \cdot 10^8 \text{м/с}$$

и совпадает со скоростью света. В среде

$$v = c/\sqrt{\varepsilon\mu},$$

где ε и μ — диэлектрическая и магнитная проницаемости среды.

Напряженность электрического поля **E** и индукция магнитного поля **B** изменяются в фазе:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \sin 2\pi(t/T - x/\lambda),$$
$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 \sin 2\pi(t/T - x/\lambda).$$

3. Электромагнитные волны переносят энергию.

4. Электромагнитные волны отражаются от проводящих поверхностей и преломляются на границе двух диэлектриков.

5. Электромагнитные волны оказывают давление на тела.

6. Если электромагнитная волна оказывает давление на тела, т. е. сообщает им импульс, следовательно, она также обладает импульсом.

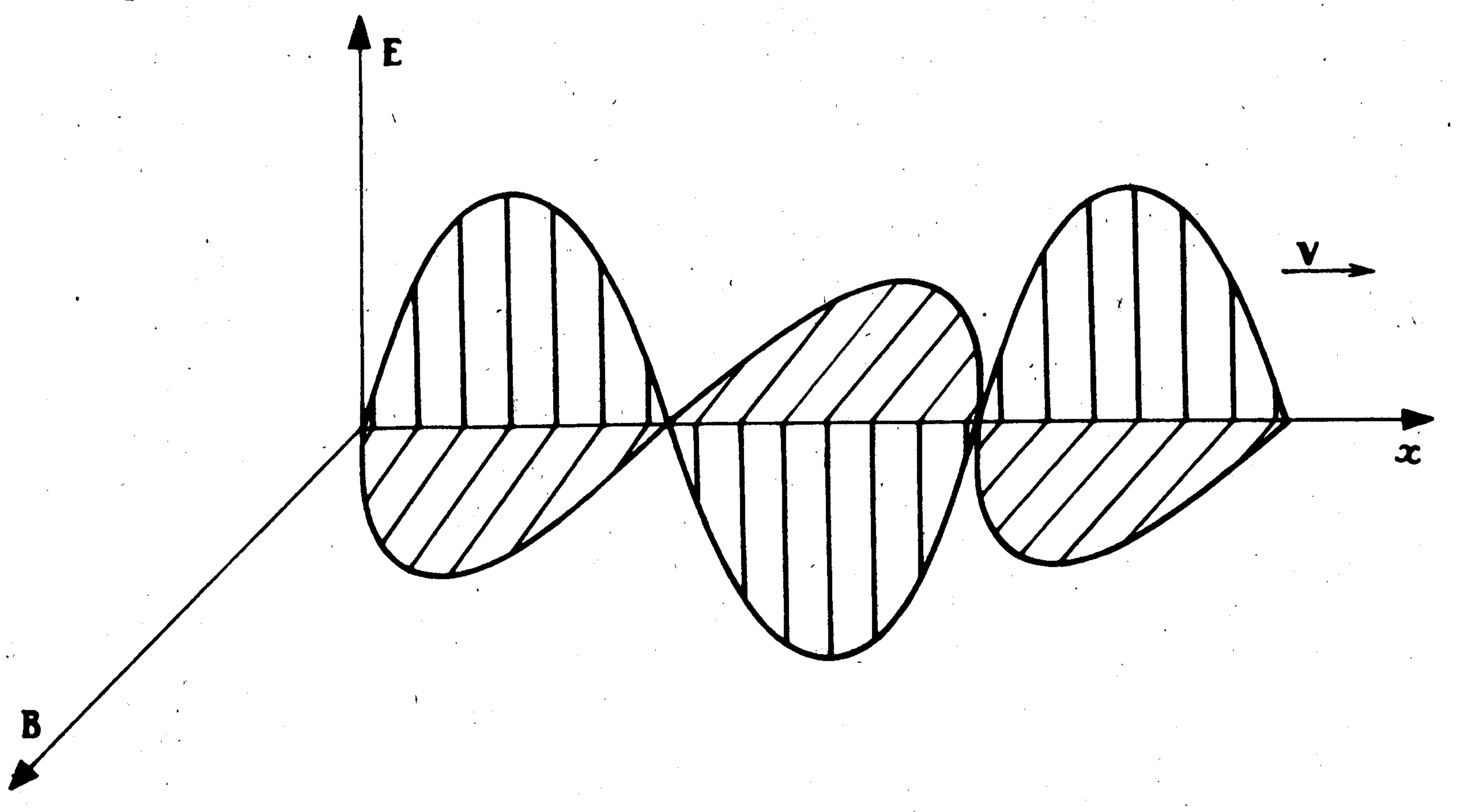


Рис. 4.10.

7. Наблюдаются дифракция, интерференция и поляризация электромагнитных волн.

Шкала электромагнитных волн

Электромагнитные волны генерируются в широком диапазоне частот. Каждый участок спектра имеет свое название (рис. 4.11). Так, видимому свету соответствует довольно узкий диапазон частот и соответственно длин волн: от $4 \cdot 10^{-7}$ до $7,5 \cdot 10^{-7}$ м.

С коротковолновой стороны от видимой области спектра (рис. 4.11) находится ультрафиолетовая область, с длинноволновой — инфракрасная. За ультрафиолетовым диапазоном идет рентгеновский, а затем γ-излучение. γ-лучи — электромагнитное излучение самой большой частоты $\nu \geq 10^{20}$ Гц ($\lambda \sim 10^{-12}$м). Радиоволны лежат в диапазоне $\lambda > 10^{-2}$ м. Отметим, что γ-лучи излучаются при распаде радиоактивных ядер, электромагнитные волны 10^{-6} — 10^{-2} м излучаются атомами. Радио- и микроволновое излучение генерируют-

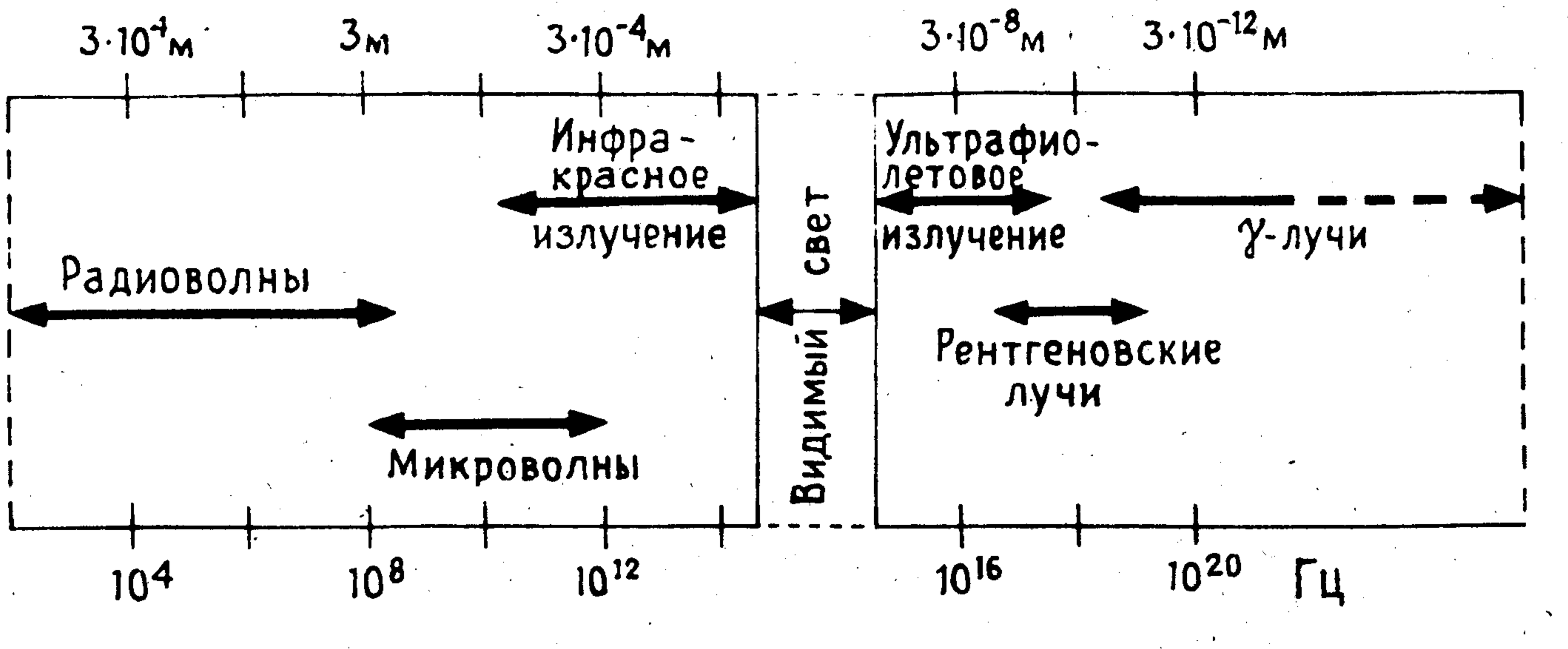


Рис. 4.11.

ся макротелами — системами. Несмотря на кажущееся различие излучений в разных диапазонах, все они обладают свойствами электромагнитных волн.

Примеры решения задач

Задача 1. Тело совершает колебания по закону $x = 0,3 \sin \pi(t + 0,5)$ м. Найти амплитуду, период, начальную фазу колебаний и ускорение в момент времени $t = 0,5$ с.

Дано: $t = 0{,}5$ с; T, φ_0, A, a_x — ?

Решение. Уравнение гармонического колебания имеет вид

$$x = A \sin(\omega t + \varphi_0).$$

По условию задачи $x = 0,3 \sin \pi(t + 0,5)$ м, следовательно, амплитуда колебаний $A = 0,3$ м, циклическая частота $\omega = \pi$ с$^{-1}$ и начальная фаза колебаний $\varphi_0 = 0,5\pi$. Период колебаний определяется по формуле

$$T = 2\pi/\omega = 2\pi/\pi = 2\,\text{с}.$$

Ускорение связано со смещением по формуле

$$a_x = -\omega^2 x = -A\pi^2 \sin(\omega t + \varphi_0),$$

$$a_x = -0,3\pi^2 \sin(\pi + 0,5\pi)\,\text{м/с}^2.$$

В момент времени $t = 0{,}5$ с ускорение будет равно

$$a_x = -0,3\pi^2 \sin(0,5\pi + 0,5\pi)\text{м/с}^2 = 0.$$

Задача 2. Шарик массой 10 г совершает гармонические колебания с амплитудой $A = 0,2$ м и периодом $T = 4$ с. В момент $t_0 = 0$ $x = A$. Найти кинетическую и потенциальную энергию в момент времени $t = 1$ с.

Дано: $m = 10$ г (10^{-2} кг), $A = 0,2$ м, $T = 4$ с, $x|_{t=0} = A$, $t = 1$ с; $W_{\text{кин}}$ — ? $W_{\text{пот}}$ — ?

Решение. Запишем уравнение гармонических колебаний:

$$x = A \cos(\omega t + \varphi_0),$$

где $\omega = 2\pi/T$. Так как по условию при $t = 0$ смещение $x = A$, определим начальную фазу:

$$x = A \cos\left[(2\pi/T) \cdot 0 + \varphi_0\right] = A, \quad \cos \varphi_0 = 1,$$

откуда $\varphi_0 = 0$. Окончательно имеем

$$x = 0,2 \cos\left(\frac{2\pi}{4} t\right)\,\text{м} = 0,2 \cos \frac{\pi}{2} t\,\text{м}.$$

Кинетическая энергия шарика определяется по формуле

$$W_{\text{кин}} = \frac{mv^2}{2} = \frac{mA^2\omega^2 \sin^2 \omega t}{2} = \frac{mA^2 4\pi^2 \sin^2(2\pi/T)t}{2T^2}.$$

Подставим числовые значения и получим

$$W_{\text{кин}} = \frac{10^{-2} \cdot 4 \cdot 10^{-2} \cdot 4\pi^2 \sin^2 \pi/2 \cdot 1}{2 \cdot 16}\,\text{Дж} = 5 \cdot 10^{-3}\,\text{Дж}.$$

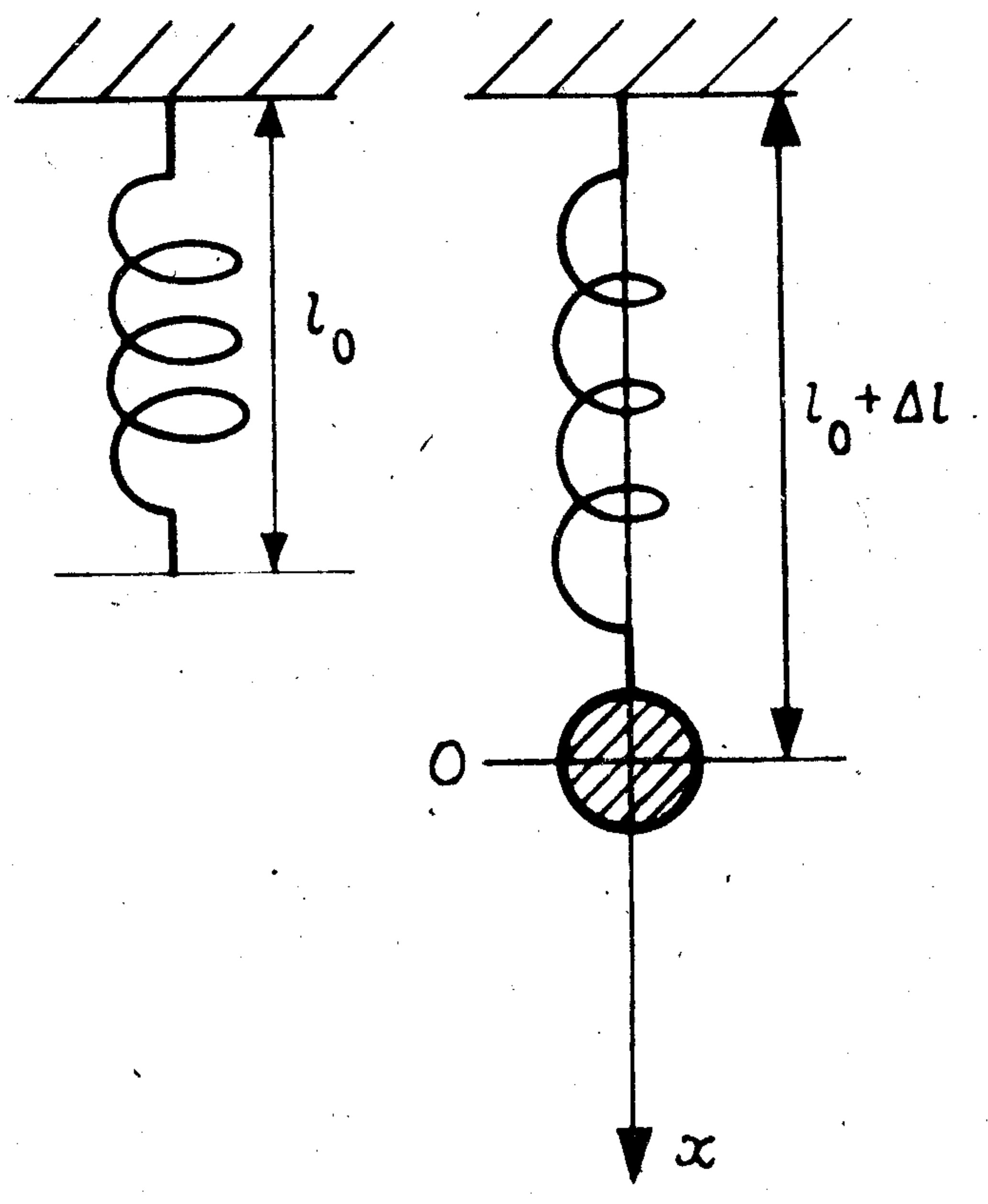


Рис. 4.12.

Потенциальная энергия шарика равна

$$W_{\text{пот}} = \frac{kx^2}{2} = \frac{kA^2\cos^2\omega t}{2} = \frac{m\omega^2A^2\cos^2\omega t}{2} = \frac{mA^2 4\pi^2\cos^2(2\pi/T)t}{2},$$

$$W_{\text{пот}} = \frac{10^{-2}\cdot 4\cdot 10^{-2}\cdot 4\pi^2\cos^2\pi/2\cdot 1}{2\cdot 16}\ \text{Дж} = 0.$$

Задача 3. Колебания материальной точки происходят относительно положения равновесия 0 по закону $x = A\sin\omega t$ с периодом 12 с. Определите, за какой наименьший промежуток времени t_1 точка удалится от положения равновесия на расстояние, равное половине амплитуды. За какой промежуток времени t_2 она пройдет оставшуюся часть пути до максимального отклонения?

Дано: $x = A/2$, $T = 12$ с; t_1 — ? t_2 — ?

Решение. В момент времени t_1 смещение равно $A/2$:

$$A/2 = A\sin\omega t_1,$$

или

$$\sin\omega t_1 = 1/2,$$

откуда

$$\omega t_1 = \pi/6; \quad 2\pi t_1/T = \pi/6.$$

Окончательно, $t_1 = T/12 = 1$ с.

Расстояние от точки равновесия до точки максимального отклонения материальная точка проходит за $t = T/4$. Следовательно,

$$t_2 = T/4 - T/12 = 2\text{с}.$$

Задача 4. Тело массой m подвешено на пружине длиной l_0 с коэффициентом упругости k (рис. 4.12), Определите частоту ω, период колебаний T и положение равновесия l, относительно которого эти колебания происходят.

Дано: m, k, l_0; ω, T, l — ?

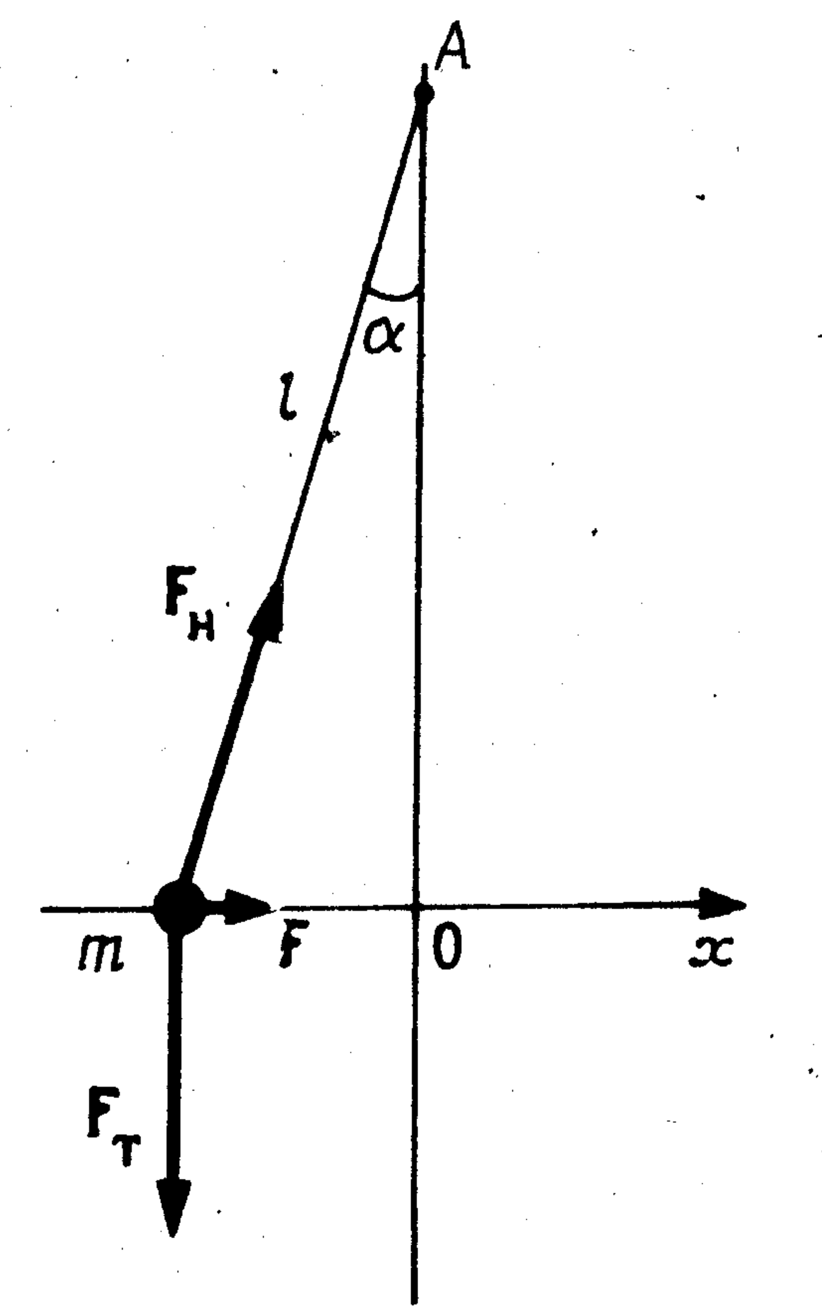


Рис. 4.13.

Решение. Условие равновесия тела, подвешенного на пружине:

$$F_т = F_{упр},$$

или

$$mg = k\Delta l,$$

следовательно, деформация пружины равна $\Delta l = mg/k$. Таким образом, при равновесии длина пружины равна $l = l_0 + \Delta l = l_0 + mg/k$.

Выберем за начало отсчета $x = 0$ положение равновесия. При отклонении тела от положения равновесия основной закон динамики имеет вид

$$ma_x = -kx, \quad a_x = -(k/m)x.$$

Частота колебаний $\omega = \sqrt{k/m}$, период колебаний $T = 2\pi\sqrt{m/k}$.

Задача 5. Математический маятник представляет собой материальную точку, подвешенную на длинной невесомой нерастяжимой нити. Длина нити l. Определите период колебаний математического маятника T.

Дано: l; T — ?

Решение. На тело действуют сила тяжести и сила натяжения (рис. 4.13). Из подобия треугольников AOm и $F_нFm$ с учетом малости угла α получим

$$x/l = -ma_x/mg.$$

Минус в правой части объясняется тем, что при $x < 0$ проекция равнодействующей сил $\mathbf{F}_н$ и $\mathbf{F}_т$, равная ma_x, больше 0:

$$a_x = -(g/l)x. \tag{4.34}$$

Сравнивая (4.34) и (4.5), получим для ω выражение

$$\omega = \sqrt{g/l},$$

откуда период колебаний математического маятника

$$T = 2\pi\sqrt{l/g}.$$

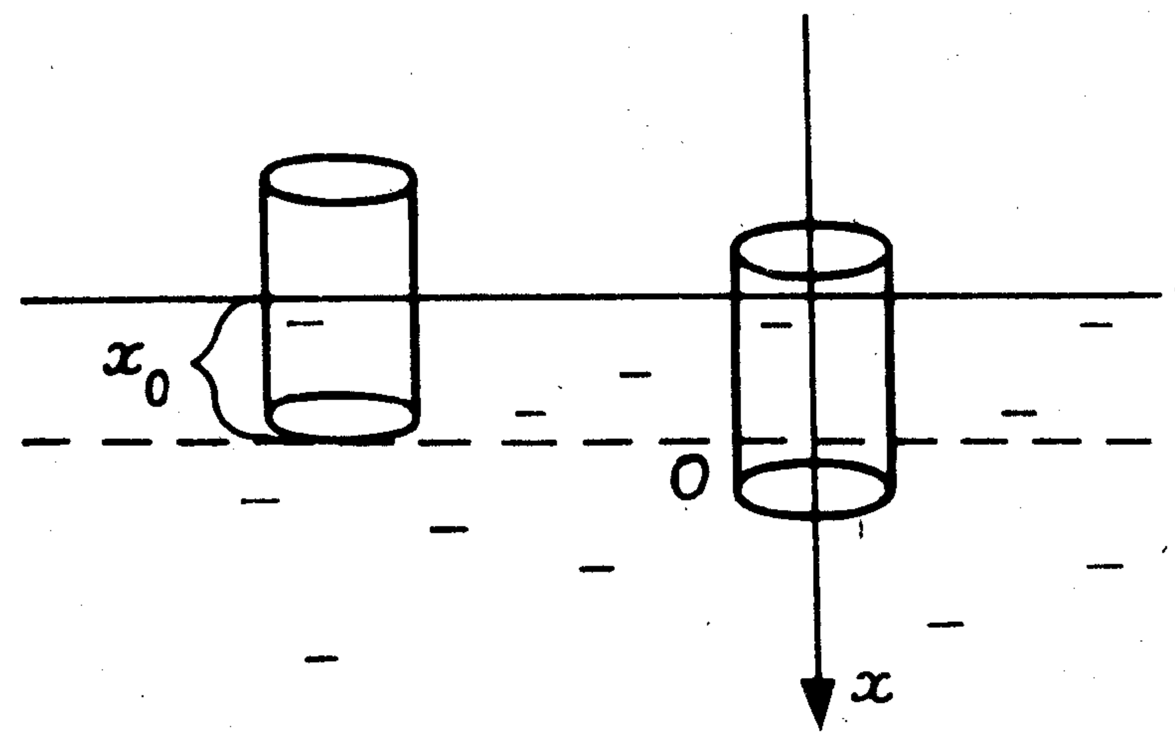


Рис. 4.14.

Очевидно, что гармонические колебания математического маятника совершаются под действием квазиупругой силы.

Задача 6. В жидкости плотностью $\rho_ж$ плавает цилиндр высотой h. Если цилиндр поглубже погрузить в жидкость или, напротив немного вытащить из жидкости, то после того как его отпустят, цилиндр начинает колебаться. Плотность материала, из которого сделан цилиндр, $\rho_м$. Определите частоту колебаний цилиндра.

Дано: $\rho_ж$, $\rho_м$, h; ω — ?

Решение. Условие плавания тела: сила Архимеда равна силе тяжести (рис. 4.14):

$$F_{выт} = F_т, \quad \text{или} \quad \rho_ж S x_0 g = \rho_м S h g,$$

где S — площадь поперечного сечения цилиндра, x_0 — глубина его погружения. Определим глубину погружения цилиндра:

$$x_0 = \rho_м/\rho_ж h.$$

Если увеличить глубину погружения цилиндра, то сила тяжести не будет компенсировать выталкивающую силу и основной закон динамики для цилиндра (в проекции на направление оси x, вдоль которой совершаются колебания) будет иметь вид

$$ma_x = -\rho_ж S g x,$$

где x — смещение цилиндра относительно положения равновесия, или

$$\rho_м h S a_x = -\rho_ж S g x,$$

откуда

$$a_x = -\frac{\rho_ж}{\rho_м}\frac{g}{h}x. \tag{4.35}$$

Сравнивая (4.35) с (4.5), для собственной частоты колебаний получим

$$\omega^2 = \rho_ж g/\rho_м h; \quad \omega = \sqrt{\rho_ж g/\rho_м h}.$$

Задача 7. В U-образной трубке находится столбик жидкости длиной l. При кратковременном изменении давления жидкости в одном из колен уровни жидкости сместились и столбик начал колебаться. Определите частоту колебаний. Трением о стенки пренебречь.

Дано: l; ω — ?

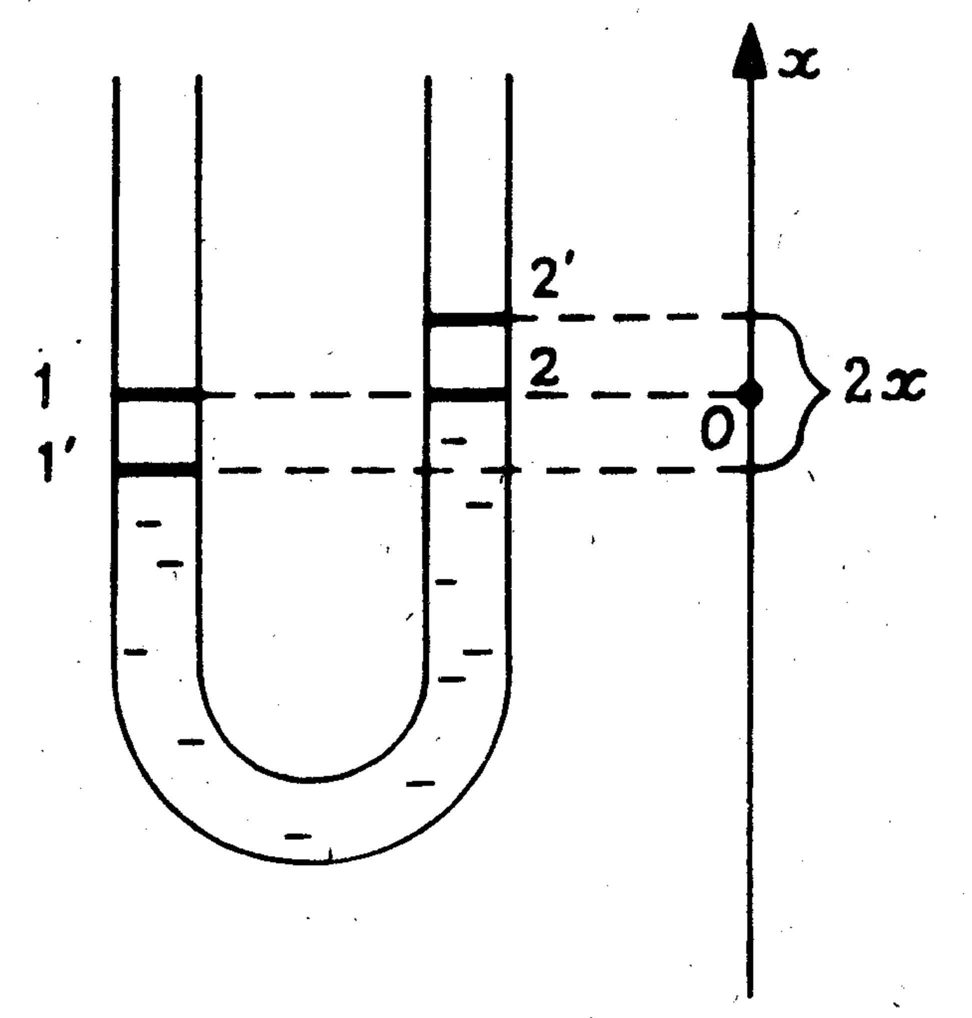


Рис. 4.15.

Решение. При смещении столбика на x в правом колене уровень жидкости поднимется на x, а в левом опустится на $-x$ (жидкость несжимаема) (рис. 4.15). Движение жидкости будет происходить под действием силы давления:

$$F_{д} = PS = \rho g S 2x,$$

S — площадь поперечного сечения трубки, P — давление.

По 2-му закону Ньютона

$$ma = -\rho g 2Sx,$$

где m — масса жидкости, $m = \rho lS$. Знак минус берется потому, что сила давления направлена в сторону, противоположную смещению. Следовательно,

$$a = -(2g/l)x.$$

Сравнив с (4.5), получим для ω

$$\omega = \sqrt{2g/l}.$$

Задача 8. Тело массой m подвешено на двух пружинах одинаковой длины, но с разными упругими свойствами. Коэффициенты упругости k_1 и k_2. Определите частоту колебаний тела в случаях *а* и *б* (рис. 4.16)

Дано: m, k_1, k_2; ω_1 — ? ω_2 — ?

Решение. В случае, показанном рис. 4.16,*а*, в положении равновесия сила тяжести равна силе натяжения. Условие равновесия тела

$$mg = (k_1 + k_2)x_0,$$

где x_0 — деформация пружин. При отклонении тела от положения равновесия на тело действует добавочная сила $F_{упр} = -(k_1+k_2)x$. Основной закон динамики имеет вид

$$ma_x = -(k_1 + k_2)x,$$

или

$$a_x = -x(k_1 + k_2)/m.$$

Следовательно,

$$\omega_1 = \sqrt{(k_1 + k_2)/m}.$$

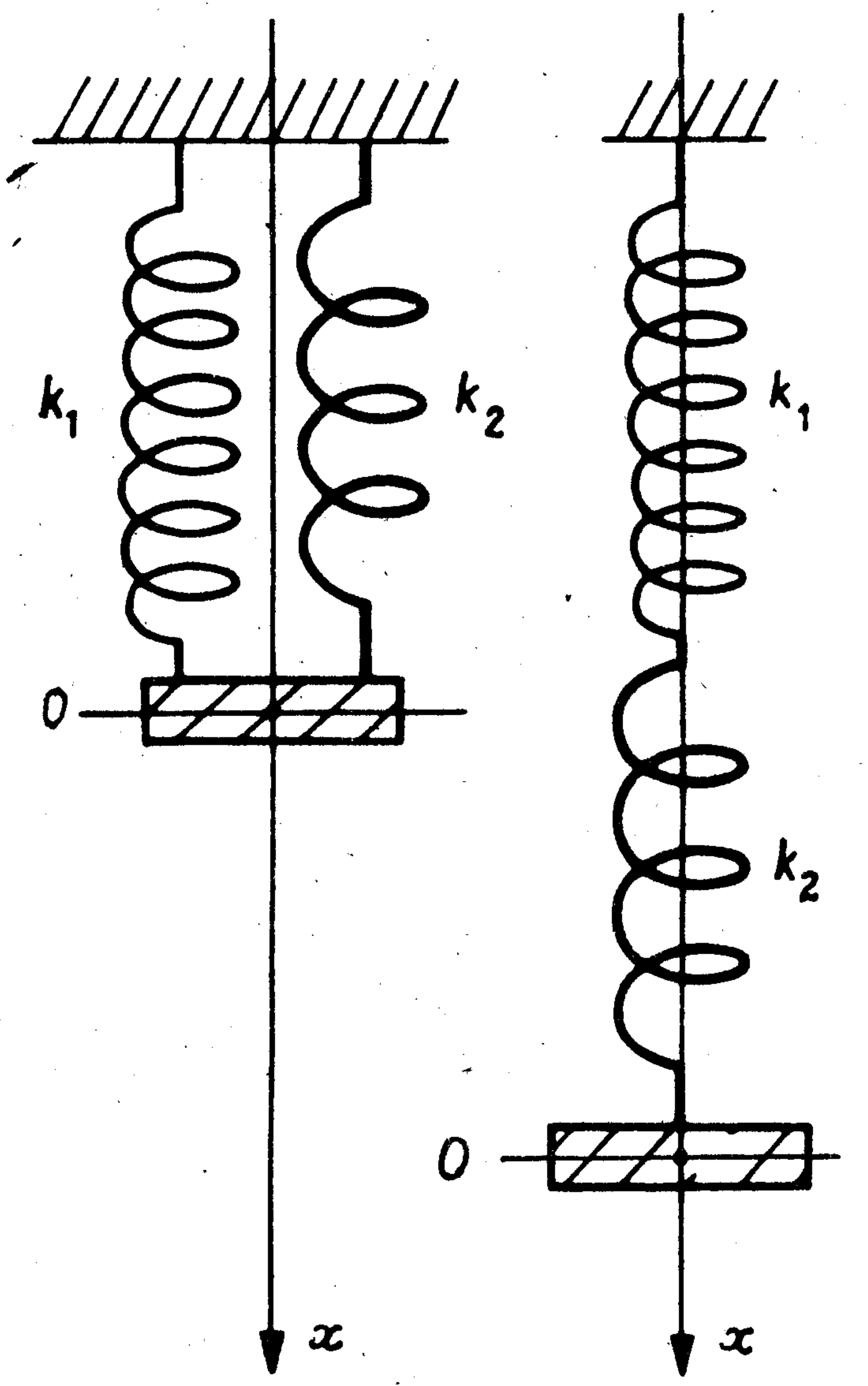


Рис. 4.16.

В случае, показанном на рис. 4.16,*б*, при отклонении тела на x на него действует сила со стороны второй пружины: $F_2 = -k_2x_2$. Основной закон динамики имеет вид

$$ma_x = -k_2x_2. \tag{4.36}$$

Ускорение тела определяется смещением x, складывающимся из деформации обеих пружин:

$$x = x_1 + x_2. \tag{4.37}$$

По условию задачи массой пружины можно пренебречь, поэтому силы упругости первой и второй пружин одинаковы, т. е.

$$k_1x_1 = k_2x_2. \tag{4.38}$$

Из (4.37) и (4.38) получим

$$x_2 = \frac{x}{1 + k_2/k_1} = \frac{k_1x}{k_1 + k_2}. \tag{4.39}$$

Подставив (4.39) в (4.36), имеем

$$a_x = -\frac{k_1k_2x}{(k_1 + k_2)m},$$

откуда

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{k_1k_2}{(k_1 + k_2)m}}.$$

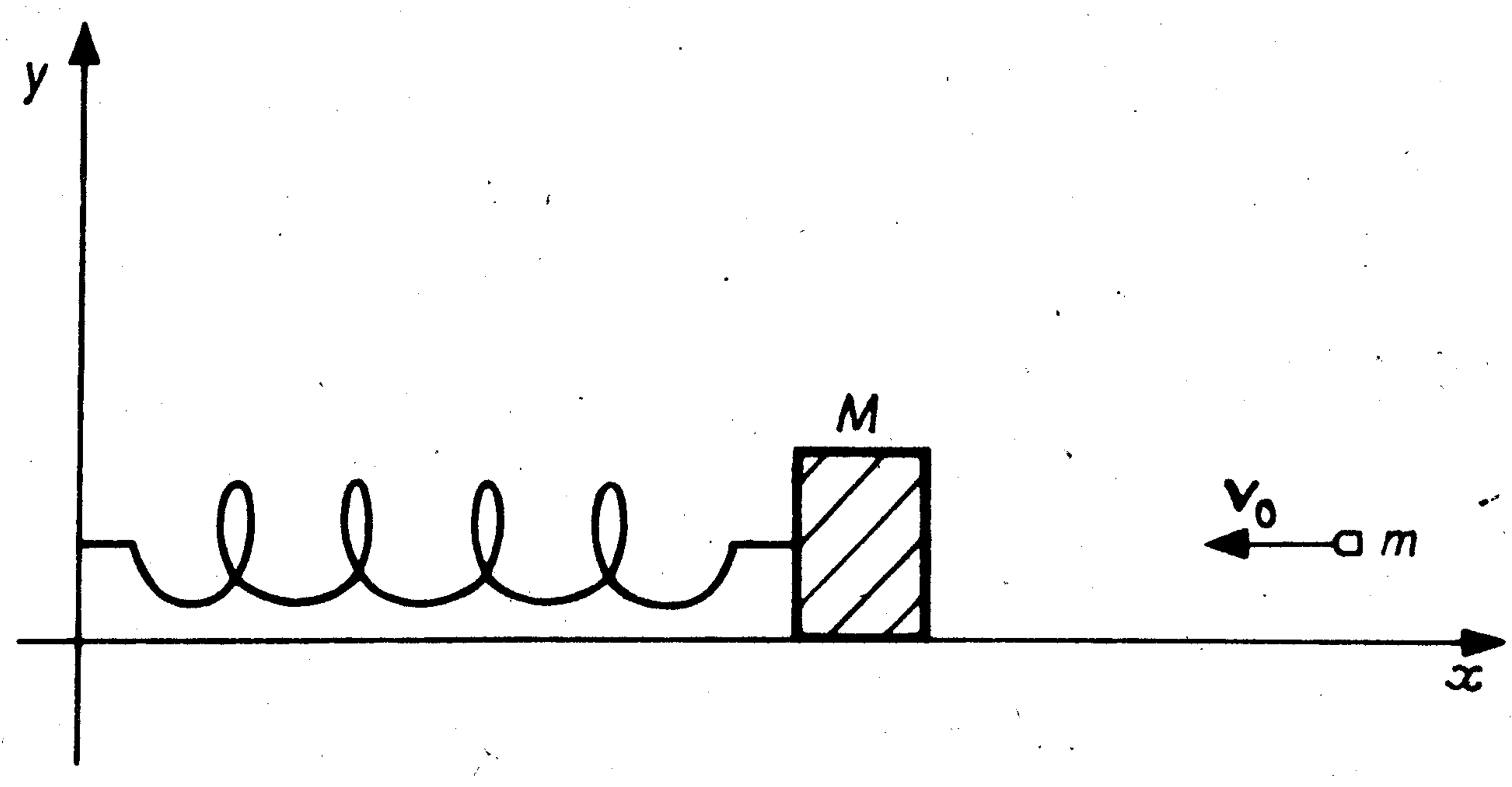


Рис. 4.17.

Задача 9. На идеально гладкой плоской поверхности лежит брусок массой M, прикрепленный к стене пружиной с коэффициентом упругости k (масса пружины равна нулю). В брусок попадает пуля массой m, летящая горизонтально со скоростью v_0, и застревает в нем. Найдите зависимость координаты и скорости бруска от времени. Считать момент попадания пули за начало отсчета времени.

Дано: M, m, v_0, k; $x(t)$, $v(t)$ — ?

Решение. Брусок с застрявшей в нем пулей начинает двигаться, сжимая пружину. На брусок действует сила упругости, под действием которой он совершает гармонические колебания (рис. 4.17).

Взаимодействие пули и бруска абсолютно неупругое. Закон сохранения импульса для пули и бруска имеет вид

$$m\mathbf{v}_0 = (m + M)\mathbf{v}. \tag{4.40}$$

В проекции на ось x уравнение (4.40) имеет вид

$$mv_0 = (m + M)v,$$

следовательно,

$$v = mv_0/(m + M).$$

Кинетическая энергия системы (полная энергия системы) есть

$$W_{\text{кин}} = \frac{(m + M)v^2}{2} = \frac{m^2 v_0^2}{2(m + M)}$$

и равна полной энергии, определяющей амплитуду колебаний:

$$\frac{(m + M)A^2\omega^2}{2} = \frac{m^2 v_0^2}{2(m + M)}. \tag{4.41}$$

Амплитуда колебаний из (4.41) определяется выражением

$$A = \frac{v_0}{\omega} m/(m + M).$$

Частота колебаний равна

$$\omega = \sqrt{k/(m + M)}$$

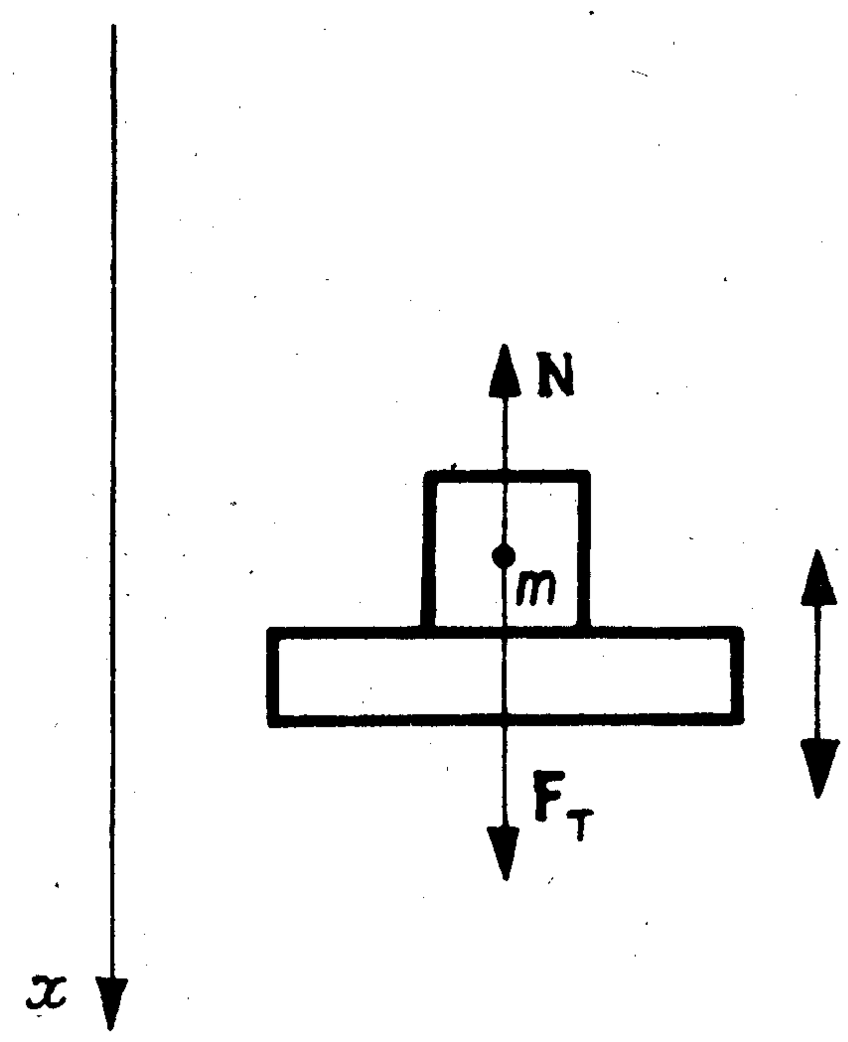


Рис. 4.18.

и, следовательно,

$$A = v_0 \frac{m}{\sqrt{k/(m+M)}}.$$

Закон колебаний бруска имеет вид

$$x = A\sin\omega t = v_0 \frac{m}{\sqrt{k/(m+M)}} \sin\sqrt{k/(m+M)}t.$$

Начальная фаза $\varphi_0 = 0$, так как при $t = 0$ смещение $x = 0$. Скорость бруска

$$v_2 = A\omega\cos\omega t = v_0[m/(m+M)]\cos\sqrt{k/(m+M)}t.$$

Задача 10. На горизонтальной плите находится груз. Плита колеблется с частотой ω, совершая по вертикали гармонические колебания. При каких амплитудах колебания груз не оторвется от поверхности плиты?

Дано: ω; A — ?

Решение. Груз не оторвется от плиты, если сила нормальной реакции $\mathbf{N}$ будет отлична от нуля во всех точках траектории, $N \geq 0$ (рис. 4.18). На груз действуют две силы: сила тяжести $\mathbf{F}_т$ и сила нормальной реакции $\mathbf{N}$. Основное уравнение динамики для груза имеет вид

$$ma_x = mg - N.$$

Очевидно, что груз может оторваться от плиты, когда ускорение направлено вниз. Если

$$x = A\sin\omega t$$

есть уравнение колебаний плиты, то $a_x = -\omega^2 A\sin\omega t$. При $x = A$ ускорение максимально по величине и равно $a_x = -\omega^2 A$. В этом положении N может обратиться в нуль: $N = 0$ и $a_x = -g$, откуда $\omega^2 A = g$, или при $A \leq g/\omega^2$ груз не оторвется от плиты. В других положениях времени $N \neq 0$.

Задача 11. К потолку подвешены два маятника. За одинаковое время один маятник совершил 10 колебаний, а другой 7 колебаний. Какова длина каждого маятника, если разность их длин 51 см.

Дано: $n_1 = 10$, $n_2 = 7$, $\Delta l = 51$ см ($51 \cdot 10^{-2}$ м); l_1 — ? l_2 — ?

Решение. Периоды колебаний маятников определяются по формулам:

$$T_1 = 2\pi\sqrt{l_1/g} \quad \text{и} \quad T_2 = 2\pi\sqrt{l_2/g}.$$

За промежуток времени t_0 первый маятник совершает n_1 колебаний, а второй n_2 колебаний, т. е.

$$t_0 = n_1 T_1 = n_2 T_2.$$

Отсюда

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{n_2}{n_1} = \frac{2\pi\sqrt{l_1/g}}{2\pi\sqrt{l_2/g}} = \sqrt{l_1/l_2},$$

или

$$n_2/n_1 = \sqrt{l_1/l_2}.$$

Следовательно,

$$l_2 = l_1 n_1^2/n_2^2.$$

Так как по условию $l_1 = l_2 - \Delta l$,

$$l_2 = (n_1^2/n_2^2)(l_2 - \Delta l).$$

Окончательно имеем

$$l_2 = n_1^2 \Delta l/(n_1^2 - n_2^2),$$

$$l_2 = \frac{100 \cdot 51 \cdot 10^{-2}}{100 - 49}\,\text{м} = 1\,\text{м},$$

$$l_1 = (1 - 0,51)\,\text{м} = 0,49\,\text{м}.$$

Задача 12. Математический маятник (длина нити l) помещен в однородное электрическое поле напряженностью $\mathbf{E}$. Грузу маятника сообщен заряд q. Определите заряд, при котором периоды колебаний маятника в поле и в отсутствие его будут одинаковы. Масса груза равна m.

Дано: l, E, m; q — ?

Решение. Период колебаний математического маятника равен

$$T = 2\pi\sqrt{l/g}.$$

В электрическом поле на заряженное тело действуют сила тяжести и сила $F = qE$, поэтому период колебаний изменяется.

Представим, что под действием электрического поля положение нити изменилось (рис. 4.19), $qE > mg$. Тогда, рассматривая силы, действующие на материальную точку, как в задаче 5, для периода колебаний получим

$$T = 2\pi\sqrt{l/(qE/m - g)}.$$

Приравнивая выражения для T, найдем

$$(qE/m) - g = g,$$

откуда

$$q = 2mg/E.$$

Задача 13. Источник частотой 1000 Гц и амплитудой $A = 0,5$ мм возбуждает в упругом шнуре волны длиной $\lambda = 0,35$ м. Найти

1) скорость распространения колебаний u,

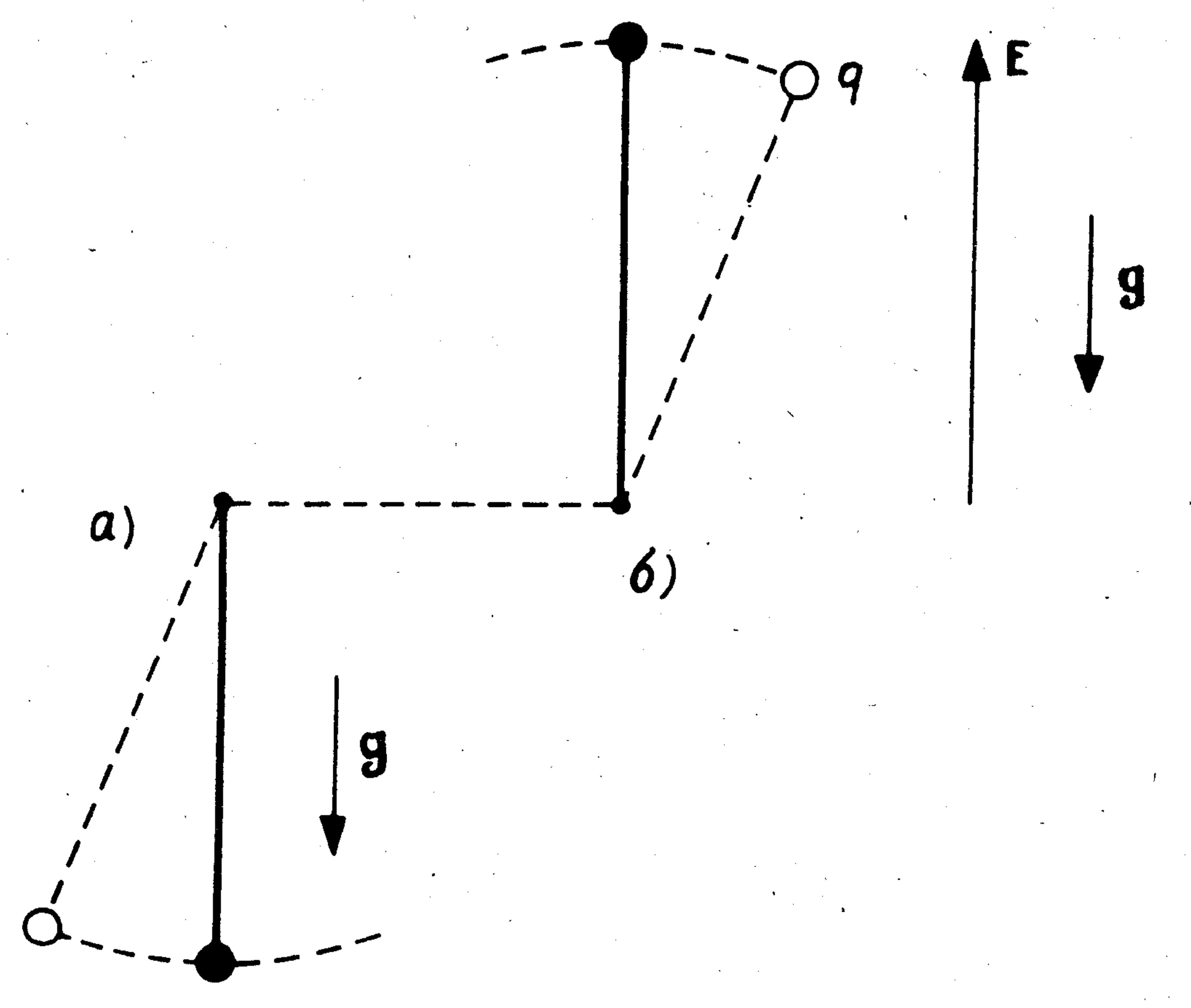


Рис. 4.19.

2) максимальную скорость колеблющихся точек шнура $v_{\max}$.

Дано: $\nu = 1000$ Гц, $A = 0,5$ мм ($5 \cdot 10^{-4}$ м), $\lambda = 0,35$ м; u — ? $v_{\max}$ — ?

Решение. Скорость распространения колебаний, т. е. скорость волны, определяется из соотношения

$$u = \lambda\nu = 0,35 \cdot 1000\,\text{м/с} = 350\,\text{м/с}.$$

2) Колебания частиц в волне происходят по гармоническому закону, максимальная скорость колеблющихся частиц

$$v_{\max} = A\omega = A \cdot 2\pi\nu = 5 \cdot 10^{-4} \cdot 2\pi \cdot 1000\,\text{м/с} = \pi\,\text{м/с}.$$

Задача 14. В среде распространяется волна со скоростью $v = 720$ м/с при частоте источника 600 Гц. Определите разность фаз колебаний в двух точках, отстоящих друг от друга на расстоянии $\Delta x = 0{,}2$ м.

Дано: $\Delta x = 0,2$ м, $\nu = 600$ Гц, $v = 720$ м/с; $\Delta\varphi$ — ?

Решение. На рис. 4.20 y — смещение точек от их положения равновесия. Рассмотрим любые две точки M и N. Согласно уравнению колебаний

$$y_M = A\sin[\omega t - (2\pi/\lambda)x_M] = A\sin\varphi_M,$$
$$y_N = A\sin[\omega t - (2\pi/\lambda)x_N] = A\sin\varphi_N,$$
$$\Delta\varphi = \varphi_N - \varphi_M = (2\pi/\lambda)(x_M - x_N),$$

или

$$\Delta\varphi = (2\pi/\lambda)\Delta x.$$

Длина волны равна $\lambda = v/\nu$. Окончательно

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi\nu\Delta x}{v},$$

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi \cdot 600 \cdot 0,2}{720} = \frac{\pi}{3}.$$

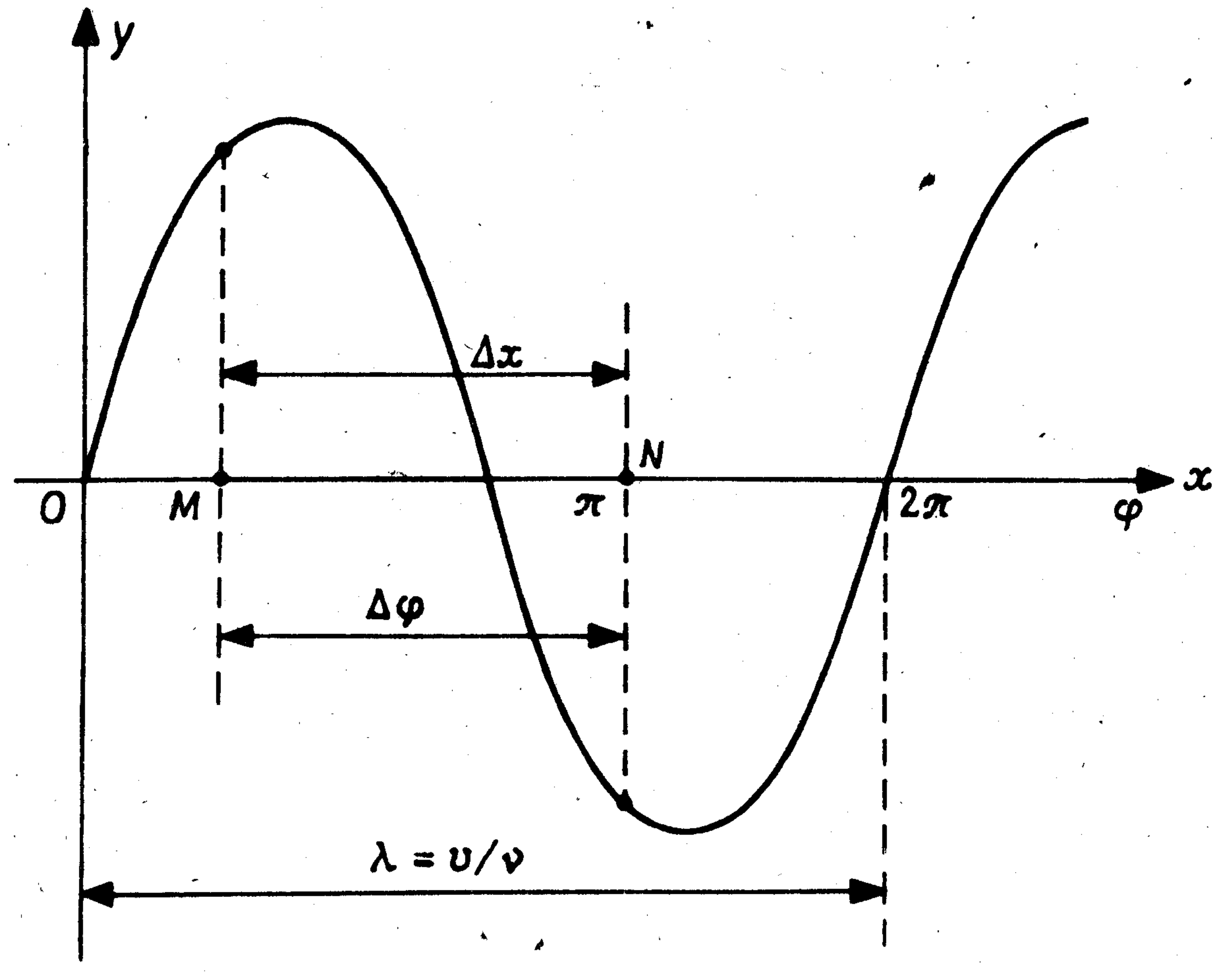


Рис. 4.20.

Задача 15. Выстрел произведен вертикально вверх. Какова начальная скорость пули v_0, если звук выстрела и пуля достигают одновременно высоты $h = 850$ м? Скорость звука в воздухе $v_{зв} = 340$ м/с.

Дано: $h = 850$ м, $v_{зв} = 340$ м/с; v_0 — ?

Решение. Звук распространяется в однородной среде с постоянной скоростью. Направив ось y вертикально вверх и выбрав в качестве начала отсчета место, откуда произведен выстрел, для фронта звуковой волны получим

$$y_1 = v_{зв} t_1.$$

Пуля летит с начальной скоростью v_0, направленной вверх, и ускорением g, направленным вертикально вниз. Следовательно,

$$y_2 = v_0 t_2 - g t_2^2/2.$$

По условию задачи $y_1 = y_2 = h$, $t_1 = t_2 = t$. Выразив время $t = h/v_{зв}$ и подставив в уравнение для y_2, получим

$$h = \frac{v_0 h}{v_{зв}} - \frac{g h^2}{2 v_{зв}^2}.$$

Отсюда

$$v_0 = \frac{(h + g h^2/2 v_{зв}^2) v_{зв}}{h} = (1 + g h/2 v_{зв}^2) v_{зв},$$

$$v_0 = \left(1 + \frac{10 \cdot 850}{2 \cdot 340^2}\right) \cdot 340\,\text{м/с} = 352\,\text{м/с}.$$

Задача 16. Конденсатор емкостью $C = 2,4 \cdot 10^3$ пФ соединен с катушкой индуктивности $L = 32$ мкГн сопротивлением $R = 2$ Ом. Определите резонансную частоту контура.

Дано: $C = 2,4 \cdot 10^3$ пФ ($2,4 \cdot 10^{-9}$ Ф), $L = 32$ мкГн ($3,2 \cdot 10^{-5}$ Гн), $R =$ $= 2$ Ом; ω — ?

Решение. Сопротивление не влияет на значение резонансной частоты, при которой достигается максимальное значение амплитуды тока. Резонансная частота определяется формулой

$$\omega = 1/\sqrt{LC},$$

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{2,4 \cdot 3,2 \cdot 10^{-14}}}\,\text{с}^{-1} = 3,6 \cdot 10^6\,\text{с}^{-1},$$

$$\nu = \omega/2\pi = 0,57\,\text{МГц}.$$

Задача 17. Колебательный контур состоит из катушки индуктивности $L = 0,2$ Гн и конденсатора емкостью $C = 2 \cdot 10^{-5}$ Ф. Конденсатор зарядили до напряжения 4 В, т. е. в момент времени $t = 0$ $U_0 = 4$ В. Какими будут ток, напряжение и заряд в моменты времени, когда отношения энергии электрического и магнитного поля равны 0, 1/2?

Дано: $L = 0,2$ Гн, $C = 2 \cdot 10^{-5}$ Ф, $U_0 = 4$ В; I, U, q — ?

Решение. Напряжение и заряд на обкладках конденсатора изменяются по закону

$$U = U_0 \cos\omega t,$$

$$q = q_0 \cos\omega t,$$

ток — по закону

$$I = -q_0\omega \sin\omega t = -I_0 \sin\omega t.$$

Энергия электрического и магнитного полей равны

$$W_э = CU^2/2, \quad W_м = LI^2/2.$$

Отношение энергий равно

$$W_э/W_м = CU^2/LI^2.$$

1) При $W_э/W_м = 0$, очевидно, $W_э = 0$. Это означает, что заряд и напряжение на обкладках конденсатора равны нулю. Энергия магнитного поля максимальна и равна $W_м = LI_0^2/2$ — энергии электрического поля в начальный момент времени $W_э = CU_0^2/2$, откуда ток равен $I_0 = U_0\sqrt{C/L}$, $q_1 = 0$, $U_1 = 0$,

$$I_1 = I_0 = 4\sqrt{\frac{2 \cdot 10^{-5}}{2 \cdot 10^{-1}}}\,\text{А} = 0,04\,\text{А}.$$

Здесь q_1, U_1, I_1 — значения заряда, напряжения и силы тока в момент времени, когда $W_э/W_м = 0$.

2) При $W_э/W_м = 1/2$

$$U/I = (1/\sqrt{2})\sqrt{L/C} = -(U_0/I_0)\text{ctg}\omega t,$$

$$(1/\sqrt{2})\sqrt{L/C} = -(U_0/I_0)\text{ctg}\omega t = -\sqrt{L/C}\,\text{ctg}\omega t,$$

$$\omega = 1/\sqrt{LC}, \quad \text{ctg}\omega t = -1/\sqrt{2}, \quad \omega t = \text{arcctg}\,(-1/\sqrt{2}).$$

Поскольку $\omega t > 0$, имеем $\omega t = 126° = 0,7$ рад

$$I_2 = -I_0 \sin\omega t = -0,04 \sin 126°\ \text{А} = -3,24 \cdot 10^{-2}\,\text{А},$$

$$U_2 = U_0 \cos\omega t = 4 \cos 126°\ \text{В} = -2,35\,\text{В},$$

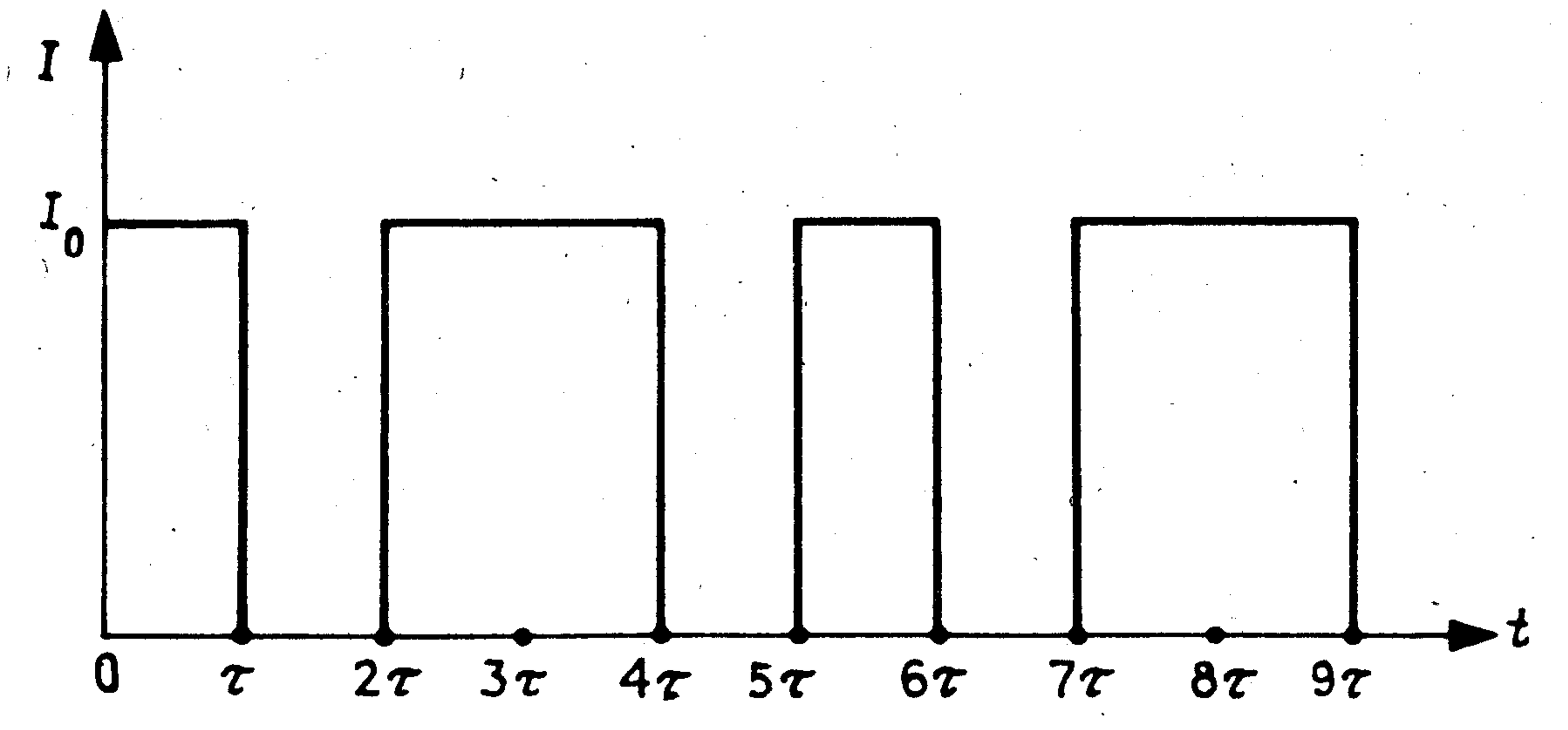


Рис. 4.21.

$$q_2 = q_0 \cos \omega t = (I_0/\omega) \cos \omega t = (0,04/500) \cos 126^\circ \text{ Кл} = 4,7 \cdot 10^{-5} \text{ Кл}.$$

Здесь q_2, U_2, I_2 — значения заряда, напряжения и тока при $W_э/W_м = 1/2$.

Задача 18. Зависимость тока от времени представлена на рис. 4.21. Определить действующее (эффективное) значение тока.

Решение. Из рис. 4.21 видно, что промежуток времени, через который повторяется новый цикл изменения тока (период колебаний), равен $T = 5\tau$. Воспользовавшись определением эффективного значения тока, напишем равенство:

$$I_{эфф}^2 RT = I_0^2 R\tau + I_0^2 R \cdot 2\tau,$$

подставляя $T = 5\tau$, получим

$$I_{эфф} = \sqrt{3/5} I_0.$$

Задача 19. Определить силу тока в соленоиде, индуктивность и сопротивление которого равны L = 0,6 Гн, R = 4 Ом, если к нему приложено

1) постоянное напряжение U = 60 В;

2) переменное напряжение $U = U_0 \sin \omega t$, U_0 = 60 В, частота ν = 20 Гц.

При каком U_0 мощности, выделяемые в цепи постоянного и переменного тока, будут равны?

Дано: $R = 4$ Ом, $L = 0,6$ Гн, $U = 60$ В, $U_0 = 60$ В, $\nu = 20$ Гц; I_1 — ? I_2 — ? U_0 — ?

Решение. При постоянном напряжении значение тока определяем по закону Ома:

$$I_1 = U/R = (60/4) \text{ А} = 15 \text{ А}.$$

Мощность $P_{пост} = U_1^2/R = 15 \cdot 60 \text{ Вт} = 900 \text{ Вт}$.

При переменном напряжении суммарное сопротивление $Z = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2}$ и амплитуда тока $I_0 = U_0/Z$. Сила тока определяется выражением

$$I = I_0 \sin(\omega t - \varphi),$$

где

$$\varphi = \operatorname{arctg}(\omega L/R), \quad \omega = 2\pi\nu,$$

$$I_0 = \frac{U_0}{\sqrt{R^2 + (2\pi\nu L)^2}}, \quad \varphi = \operatorname{arctg} 2\pi\nu L/R.$$

Подставив в выражение для I_0 численные значения, получим:

$$I_0 = \frac{60}{\sqrt{16 + (2 \cdot 3,14 \cdot 20 \cdot 0,6)^2}}\,\text{А} = 0,8\,\text{А},$$

$$\varphi = \operatorname{arctg}\frac{6,28 \cdot 20 \cdot 0,6}{4} = 87^\circ = 0,48\pi,$$

$$I = 0,8\sin(2\pi \cdot 20t - 0,48\pi)\,\text{А},$$

$$P = \frac{I_0 U_0'}{2}\cos\varphi = P_{\text{пост}}, \quad U_0' = \frac{2P_{\text{пост}}}{I_0\cos\varphi},$$

$$U_0' = \frac{2 \cdot 900}{0,8\cos 0,48\pi}\,\text{В} = 4,3 \cdot 10^4\,\text{В}.$$

Задачи для самостоятельного решения

Задача 1. Тело массой 10 г совершает гармонические колебания вдоль оси x с амплитудой 24 см и периодом 4 с. В момент времени $t = 0$ смещение равно 24 см. Найти:

1) положение тела в момент времени $t = 0,5$ с;
2) силу, действующую на тело в этот момент времени;
3) минимальное время, необходимое для перемещения тела из начального положения в точку $x = -12$ см;
4) скорость тела в точке $x = -12$ см.

Ответ: 0,17 м; $4,15 \cdot 10^{-3}$ Н; 1,3 с; 0,33 м/с.

Задача 2. Каков период колебаний груза массой 0,1 кг, подвешенного на пружине с коэффициентом жесткости 10 Н/м?

Ответ: 0,63 с.

Задача 3. Периоды колебаний двух математических маятников относятся как 3:2. Во сколько раз первый маятник длиннее второго?

Ответ: в 2,25 раза.

Задача 4. На сколько отстанут за сутки маятниковые часы, идущие точно на уровне моря, если их поднять на высоту, равную радиусу Земли?

Ответ: на 12 час.

Задача 5. Во сколько раз скорость распространения звука летом (температура воздуха 27°C) больше, чем зимой (−23°C).

Ответ: в 1,1 раза.

Задача 6. Определить сопротивление вторичной обмотки трансформатора с коэффициентом трансформации $k = 10$, если при включении первичной обмотки в сеть напряжением 120 В во вторичной обмотке течет ток 5 А, а ее напряжение 6 В. Потерями энергии в первичной обмотке пренебречь.

Ответ: 1,2 Ом.

Задача 7. Колебательный контур состоит из катушки индуктивности $4 \cdot 10^{-6}$ Гн и конденсатора, емкость которого можно изменять от 0,02 до 0,006 мкФ. Сопротивление контура ничтожно мало. На какой диапазон длин волн можно настроить колебательный контур?

Ответ: 533 м, 293 м.

Задача 8. При проверке стальной детали ультразвуковым дефектоскопом после излучения ультразвукового сигнала получены два отраженных сигнала — через

$3 \cdot 10^{-4}$ с и через $5 \cdot 10^{-4}$ с. Найти, на какой глубине находится дефект, и какова толщина детали, если скорость распространения ультразвука в стали 5200 м/с. Ответ: $7,8 \cdot 10^{-2}$ м; 0,13 м.

Задача 9. Длина линии электропередачи 1000 км, частота изменения напряжения $\nu = 50$ Гц. Найти сдвиг по фазе напряжения в начале и в конце этой линии. Ответ: $\pi/3$.

Задача 10. Катушка индуктивностью 0,1 Гн с активным сопротивлением $R = 25$ Ом включена в сеть переменного тока частотой 50 Гц. Определить силу тока в катушке, если напряжение на ее вводах 120 В.

Ответ: 3 А.

Задача 11. К источнику переменного тока, изменяющегося по закону $I = 2\sin 200\pi t A$, подключили последовательно катушку индуктивностью 86 мГн, конденсатор емкостью 160 мкФ и сопротивление 100 Ом. Определить полное сопротивление цепи, частоту переменного тока, амплитудное значение силы тока.

Ответ: 109 Ом, 100 Гц, 2 А.

Задача 12. Электромагнитная волна распространяется на восток. Вектор **B** направлен вертикально. Определить направление вектора **E**.

Ответ: вектор **E** направлен на север.

Задача 13. Как изменится направление распространения электромагнитной волны, если изменят направление на противоположное 1) **E**, 2) **B**, 3) одновременно **E** и **B**.

Ответ: 1) и 2) на противоположное, 3) останется прежним.

Глава 5

Геометрическая оптика

Геометрическая оптика — это раздел оптики, изучающий законы распространения света в прозрачных средах и его отражения от зеркальных или полупрозрачных поверхностей. При этом используется представление о световом луче, как линии, указывающей направление распространения световой энергии. Отсюда ясно, что одним из основных положений геометрической оптики есть положение о *прямолинейном распространении света*. Понятие о световом луче, как о бесконечно тонком пучке света, распространяющемся прямолинейно, составляет противоречие с представлениями о волновой природе света, согласно которым отклонение от прямолинейного распространения будет тем больше, чем более узкий световой пучок мы пытаемся получить (явление *дифракции*). Закон прямолинейного распространения света и законы преломления и отражения позволяют объяснить и описать многие физические явления, а также провести расчеты и конструирование оптических приборов.

Законы отражения света

1. Падающий и отраженный лучи и нормаль к отражающей поверхности, восстановленная в точке падения, лежат в одной плоскости.

2. Угол падения α равен углу отражения β, причем α — угол между падающим лучом и нормалью, β — угол между отраженным лучом и нормалью. Если падающие параллельные лучи после отражения от плоской поверхности остаются параллельными, то такое отражение называется зеркальным, а отражающая поверхность является плоским зеркалом.

Построим изображение в плоском зеркале. Пусть точечный источник света S находится на расстоянии h от плоского зеркала (рис. 5.1) и пусть один из лучей падает перпендикулярно зеркалу. Тогда, отразившись, он распространяется по той же прямой SO. Пусть второй луч падает под некоторым углом α. Отразившись под углом $\beta = \alpha$, он не сможет пересечь первый отраженный луч. Но продолжения этих лучей пересекутся в точке S'. Тогда S' будет *мнимым изображением* точечного источника. Треугольник $S'AS$ — равнобедренный и OA — его высота, следовательно, $SO = S'O$ и $h = h'$. Если наблюдатель видит отраженный зеркалом поток, то ему будет казаться, что источник находится в точке S'.

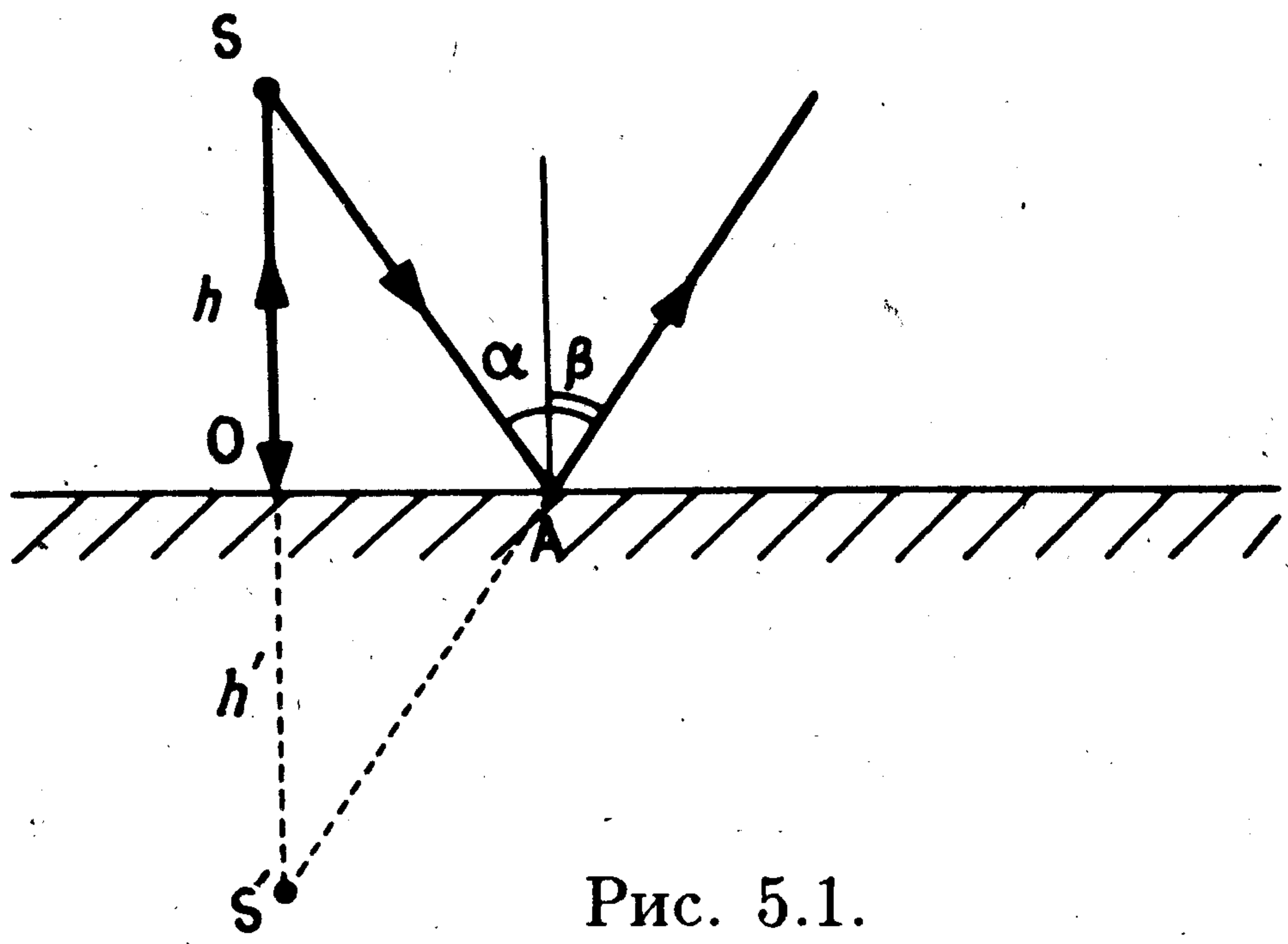


Рис. 5.1.

Законы преломления света

1. Падающий и преломленный лучи и нормаль к границе раздела сред в точке падения лежат в одной плоскости.

2. Отношение синуса угла падения к синусу угла преломления равно *относительному показателю преломления* второй среды относительно первой:

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = n, \tag{5.1}$$

где α — угол между падающим лучом и нормалью, β — угол между преломленным лучом и нормалью. Относительный показатель преломления $n = n_2/n_1$, где n_1 и n_2 — абсолютные показатели преломления двух сред, равные отношению скорости распространения света в вакууме к скорости распространения света в среде:

$$n_1 = c/v_1,\ n_2 = c/v_2.$$

Считается, что чем больше показатель преломления, тем среда оптически более плотная. Если луч идет из среды, оптически менее плотной в среду, оптически более плотную, то $\alpha > \beta$ (рис. 5.2,*а*). Если луч идет из среды, оптически более плотной в среду, оптически менее плотную, то $\alpha < \beta$ (рис. 5.2,*б*).

При определенном значении угла падения α_0 преломленный луч $1 - 1'$ скользит вдоль границы раздела сред (рис. 5.2,*б*) и $\beta = \pi/2$:

$$\frac{\sin\alpha_0}{\sin\beta} = \frac{n_2}{n_1},$$

$$\sin\alpha_0 = n_2/n_1. \tag{5.2}$$

При $\alpha > \alpha_0$ луч полностью отражается от границы раздела сред, поэтому α_0 называется предельным углом, а отражение лучей от границы раздела сред — *полным внутренним отражением*.

Примеры решения задач

Задача 1. На предмет AB высотой h, стоящий на плоском зеркале, падает параллельный пучок лучей. Определить размер геометрической тени на экране (рис. 5.3).

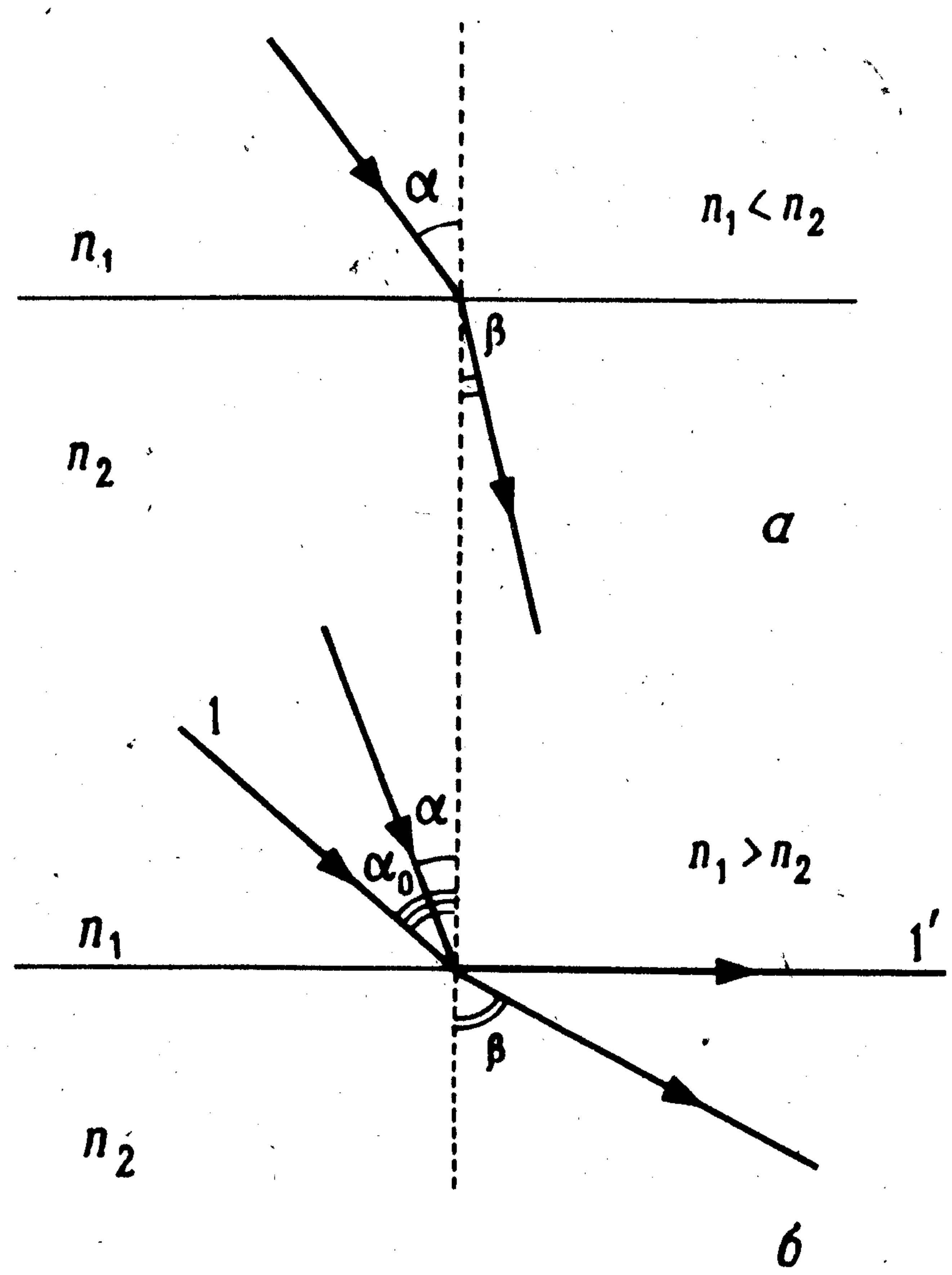


Рис. 5.2.

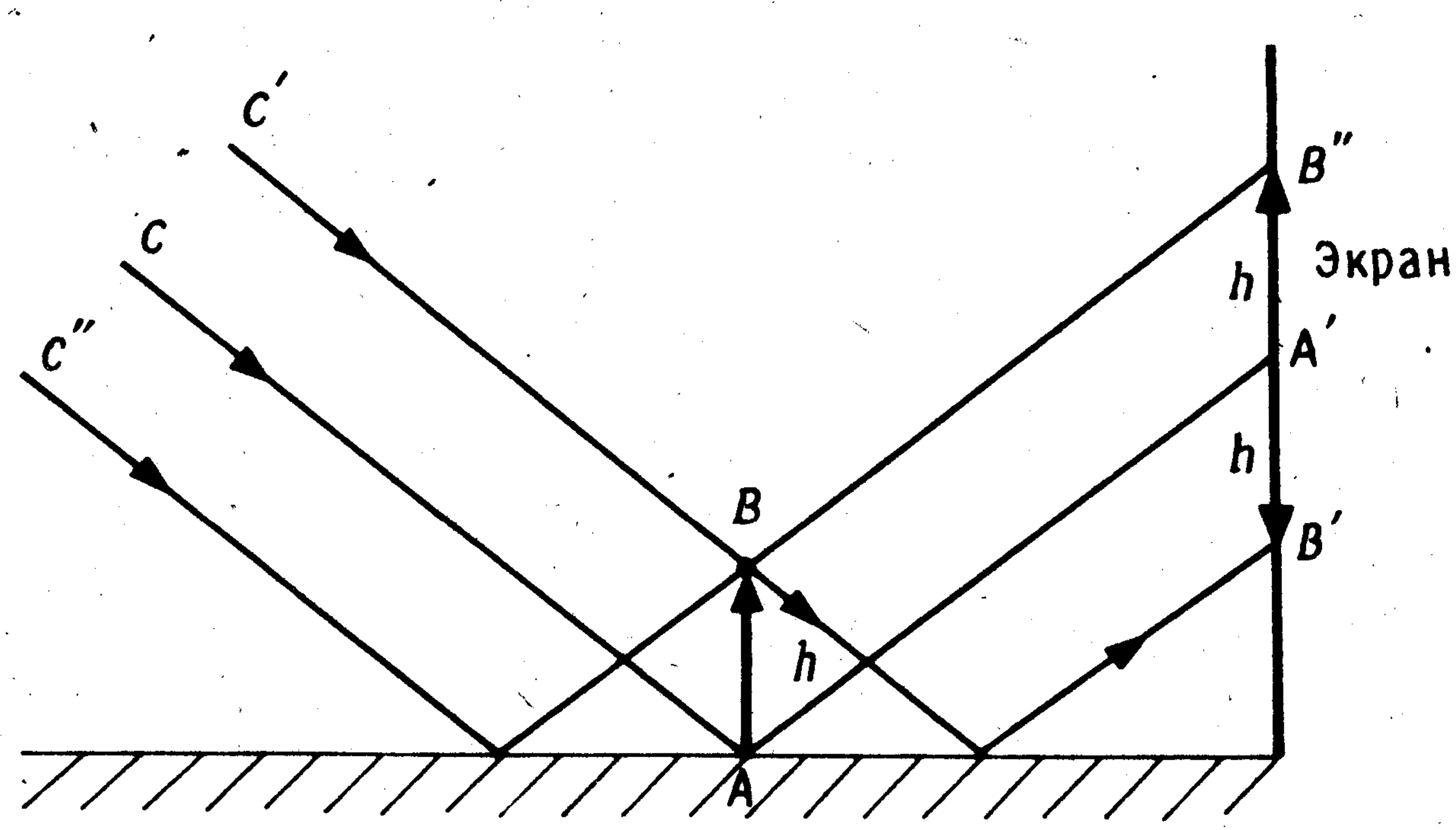


Рис. 5.3.

Дано: h; h' — ?

Решение. Как показано на рис. 5.3, предмет AB загораживает падающий поток между лучами CC' и отраженный от зеркала поток между лучами CC''. Размеры тени $h' = B'B'' = 2h$.

Задача 2. Найти число изображений N точечного источника света S, полученных в двух плоских зеркалах, образующих друг с другом угол $\gamma = 60°$. Источник находится на биссектрисе угла.

Дано: $\gamma = 60°$; N — ?

Решение. Рассмотрим луч, падающий на зеркало I (рис. 5.4). После отражения он падает на зеркало II, затем, отразившись от зеркала II, еще раз отражается от зеркала I и т. д. Мы можем считать изображение, полученное в

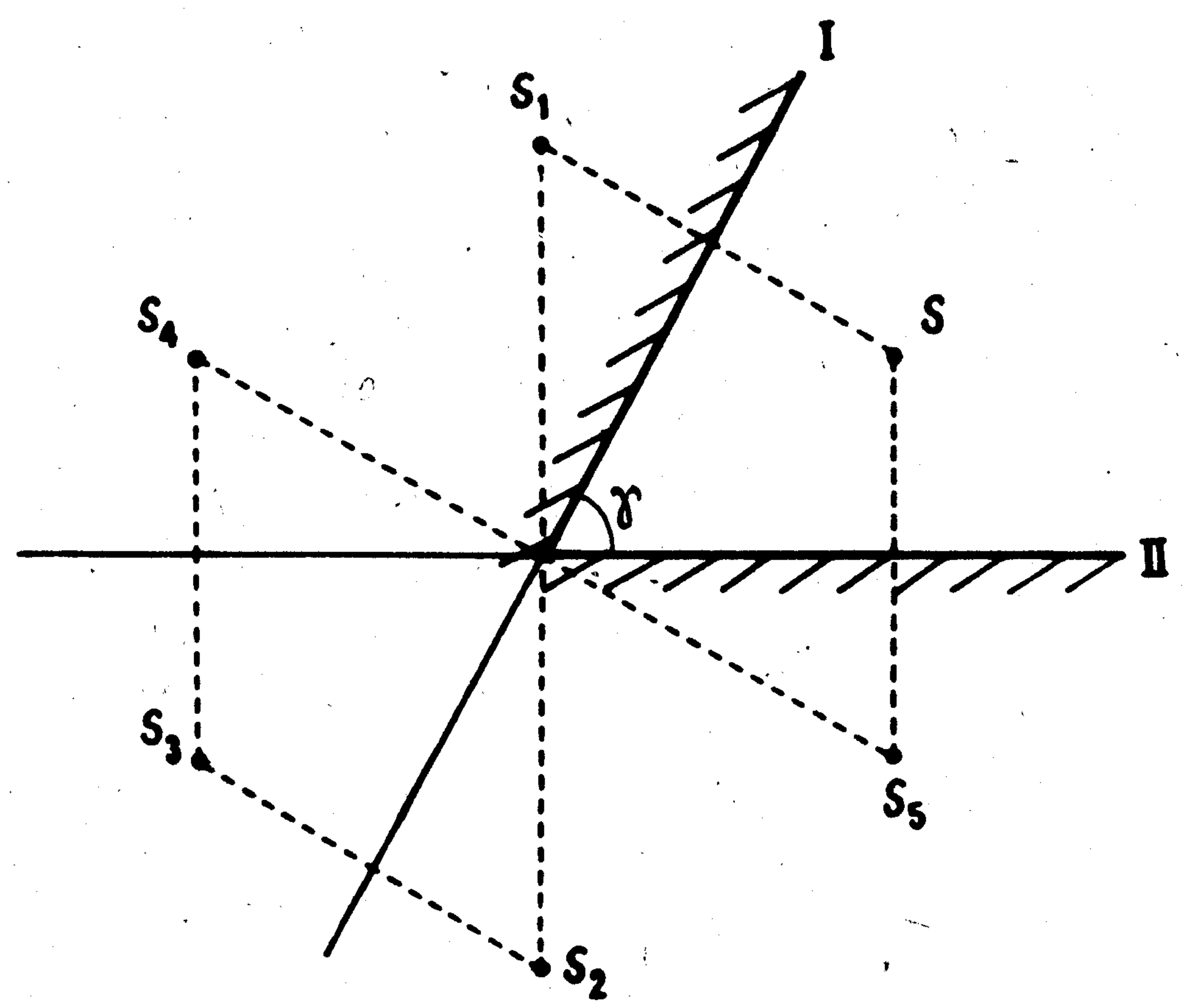


Рис. 5.4.

зеркале I, S_1, предметом для зеркала II, затем изображение S_1 в зеркале II, S_2, предметом для зеркала I, в котором получаем изображение S_3. Также получим изображение источника S в зеркале II, S_5, являющегося предметом для зеркала I, которое дает изображение S_4. Изображение S_4 является предметом для зеркала II, но его изображение в этом зеркале совпадает с изображением S_3. Все последующие изображения будут совпадать. Итак, число изображений $N = 5$:

$$N = (2\pi/\gamma) - 1. \tag{5.3}$$

Формула (5.3) является общей для подобных задач. Так, число изображений точечного источника, полученных в двух взаимно перпендикулярных плоских зеркалах ($\gamma = \pi/2$) $N = 3$, в плоском зеркале ($\gamma = \pi$), $N = 1$.

Задача 3. Кусок трубы радиусом r_0 и длиной h с зеркальной внутренней поверхностью помещен между точечным источником света S и экраном (рис. 5.5). Определите внутренние и внешние радиусы колец, появившихся на экране, l_1 — расстояние от источника до трубы, l_2 — расстояние от трубы до экрана.

Дано: h, l_1, l_2; r_i — ?

Решение. Рассмотрим сначала случай, когда $l_1 < l_2 < l_1 + h$. В центре экрана появляется яркое пятно NN_1 (рис. 5.5,*а*), так как на поверхность круга радиуса $ON = r_N$ падает поток от источника и потоки, отраженные от внутренней поверхности трубы, причем, как видно из рисунка, отраженные потоки перекрываются и на экране накладываются друг на друга:

$$r_N = r_0 - l_2 \mathrm{ctg}\alpha_2.$$

Дальше от центра O на экране будет кольцо с внутренним радиусом r_N и внешним r_L, равным

$$r_L = (l_2 + h - l_1)\mathrm{ctg}\alpha_1,$$

менее яркое, чем центральное пятно, так как на поверхность этого кольца падает поток от источника и отраженный поток. Следующее кольцо с внутренним радиусом r_L и внешним

$$r_K = r_0 + l_2 \mathrm{ctg}\alpha_2$$

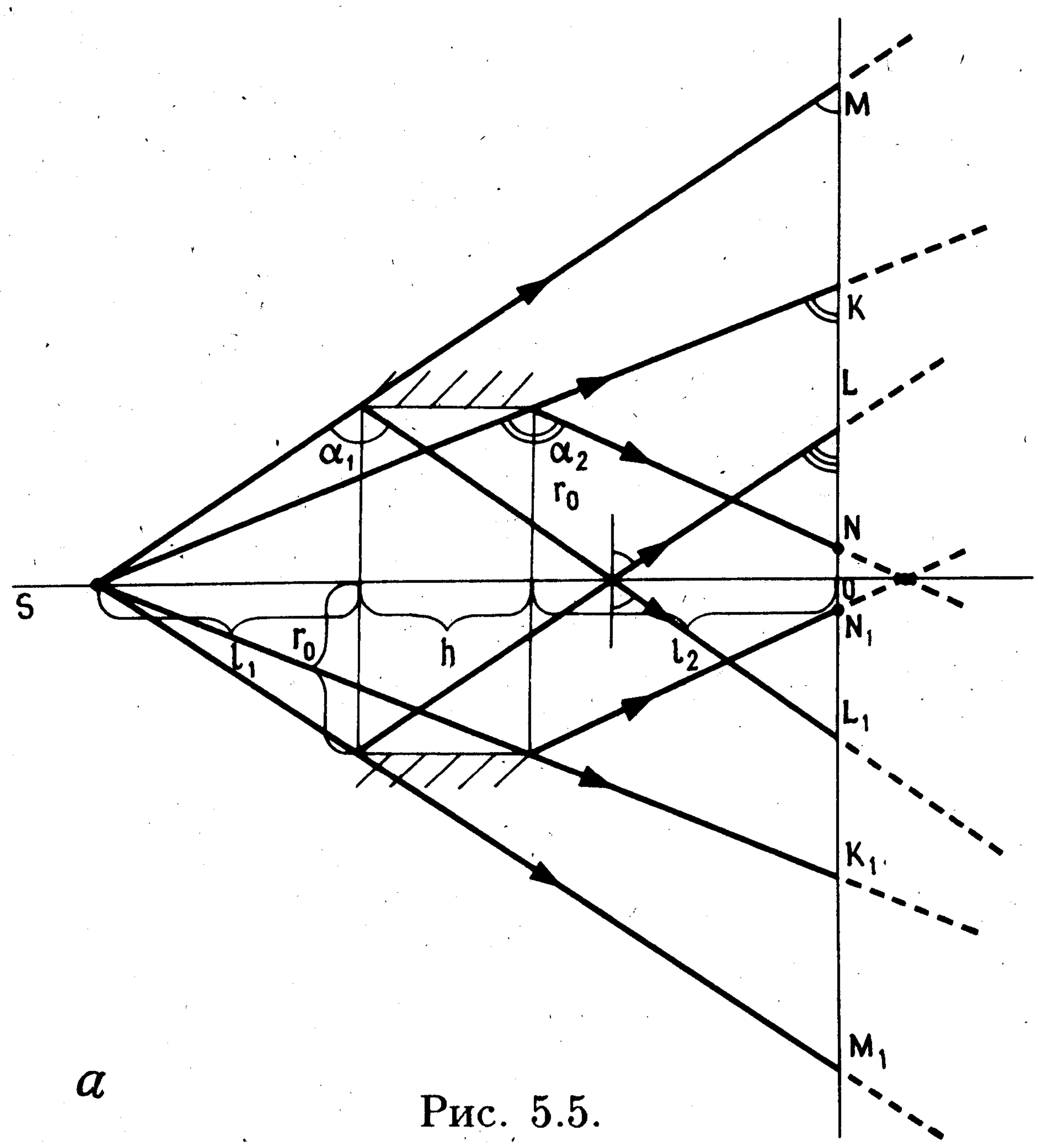


Рис. 5.5.

будет еще слабее, так как на поверхность этого кольца падает поток только от источника. Затем следует темное кольцо. Лучи, идущие от источника между лучами SK и SM, отражаются от трубы и не попадают на экран. Внутренний и внешний радиусы темного кольца равны соответственно r_K и

$$r_M = (l_1 + h + l_2)\mathrm{ctg}\,\alpha_1.$$

При $r > r_M$ труба уже не влияет на освещенность экрана, и освещенность плавно уменьшается к краю экрана.

Рассмотрим теперь случай, когда $l_2 < l_1 - h$ (рис. 5.5,*б*). В центре экрана освещенность такая же, как если бы трубы не было, она определяется световым потоком, падающим от источника. Радиус этого круглого пятна

$$r_N = (l_1 - h - l_2)\mathrm{ctg}\,\alpha_1.$$

За этим пятном на экране появляется яркое кольцо с внутренним и внешним радиусами r_N и

$$r_L = r_0 - l_2\mathrm{ctg}\,\alpha_2.$$

Освещенность этого кольца определяется потоком, падающим непосредственно от источника, и потоком, отраженным от трубы. Затем на экране будет кольцо с внешним и внутренним радиусами, равными r_L и

$$r_K = (l_1 + h + l_2)\mathrm{ctg}\,\alpha_2.$$

Освещенность этого кольца определяется только потоком, падающим от источника. Кольцо на экране с внутренним и внешним радиусами, равными r_K и

$$r_M = (l_1 + h + l_2)\mathrm{ctg}\,\alpha_1,$$

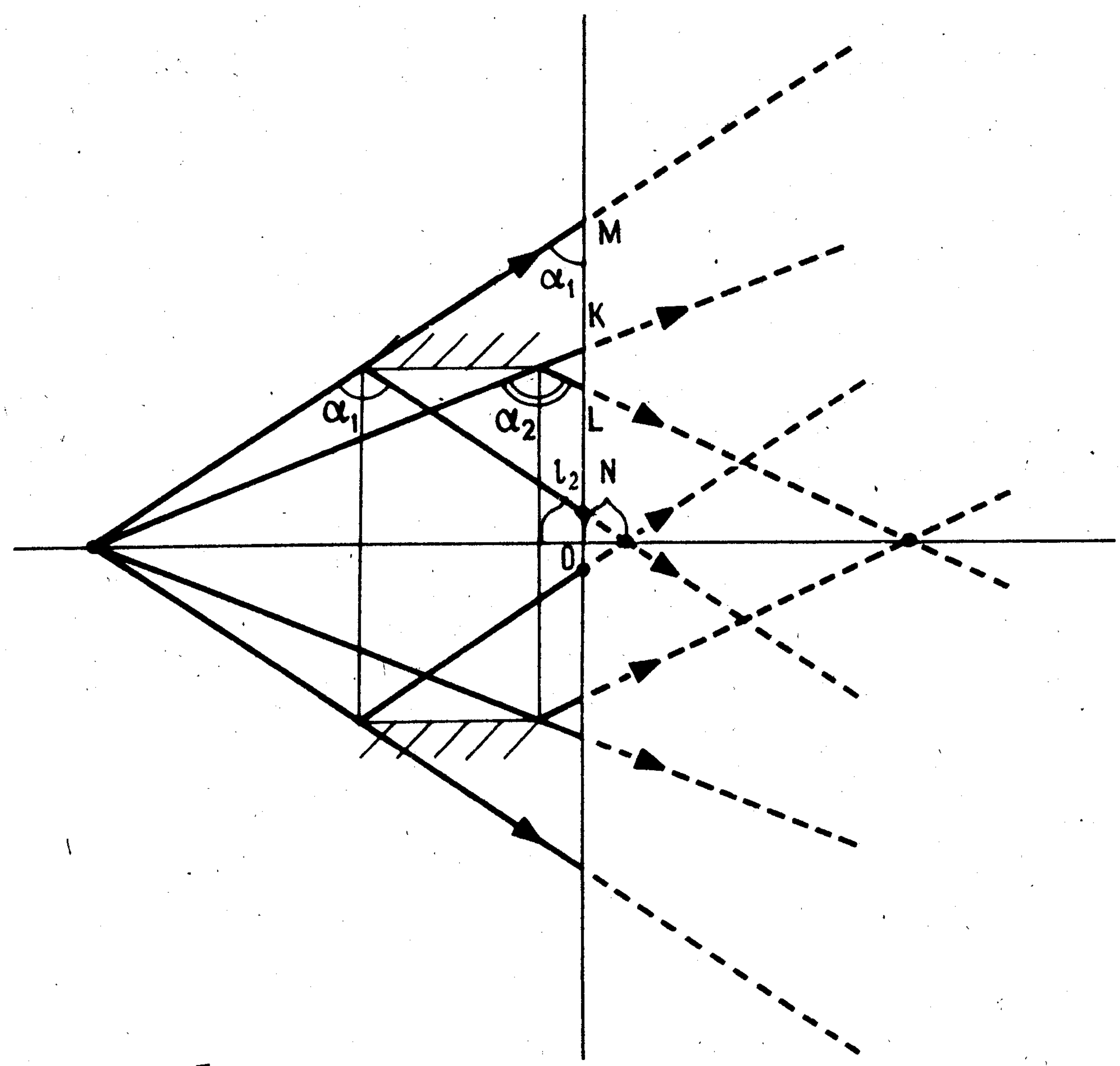


Рис. 5.5.

будет темным, так как лучи, идущие от источника между крайними лучами SK и SM, на экран не попадают. При $r > r_M$ освещенность экрана будет такой же, как если бы трубы не было.

Рассмотрим случай, когда $l_2 > l_1 + h$ (рис. 5.5,*в*). В этом случае в центре экрана будет освещенный диск радиуса

$$r_N = [l_2 - (l_1 + h)]\operatorname{ctg}\alpha_2.$$

Его освещенность определяется световым потоком, падающим от источника. Затем следует яркое кольцо с внутренним и внешним радиусами r_N и

$$r_L = [l_2 - (l_1 - h)]\operatorname{ctg}\alpha_1,$$

освещенность этого кольца определяется падающим от источника и отраженным от кольца потоками. За этим кольцом следует менее яркое кольцо шириной $r_L < r < r_K$, где

$$r_K = r_0 + l_2\operatorname{ctg}\alpha_2.$$

Освещенность этого кольца определяется только потоком, идущим от источника. Затем следует темное кольцо с внутренним и внешним радиусами r_K и

$$r_M = (l_2 + h)\operatorname{ctg}\alpha_1.$$

При $r > r_M$ освещенность экрана определяется только источником.

Из рис. 5.5,*в* следует, что данное решение будет справедливо до того момента, пока экран не совпадет с точкой пересечения лучей C, т. е. до значений

$$l_{2C} = \frac{(l_1 + h)\operatorname{ctg}\alpha_2 + (l_1 - h)\operatorname{ctg}\alpha_1}{\operatorname{ctg}\alpha_1 - \operatorname{ctg}\alpha_2}$$

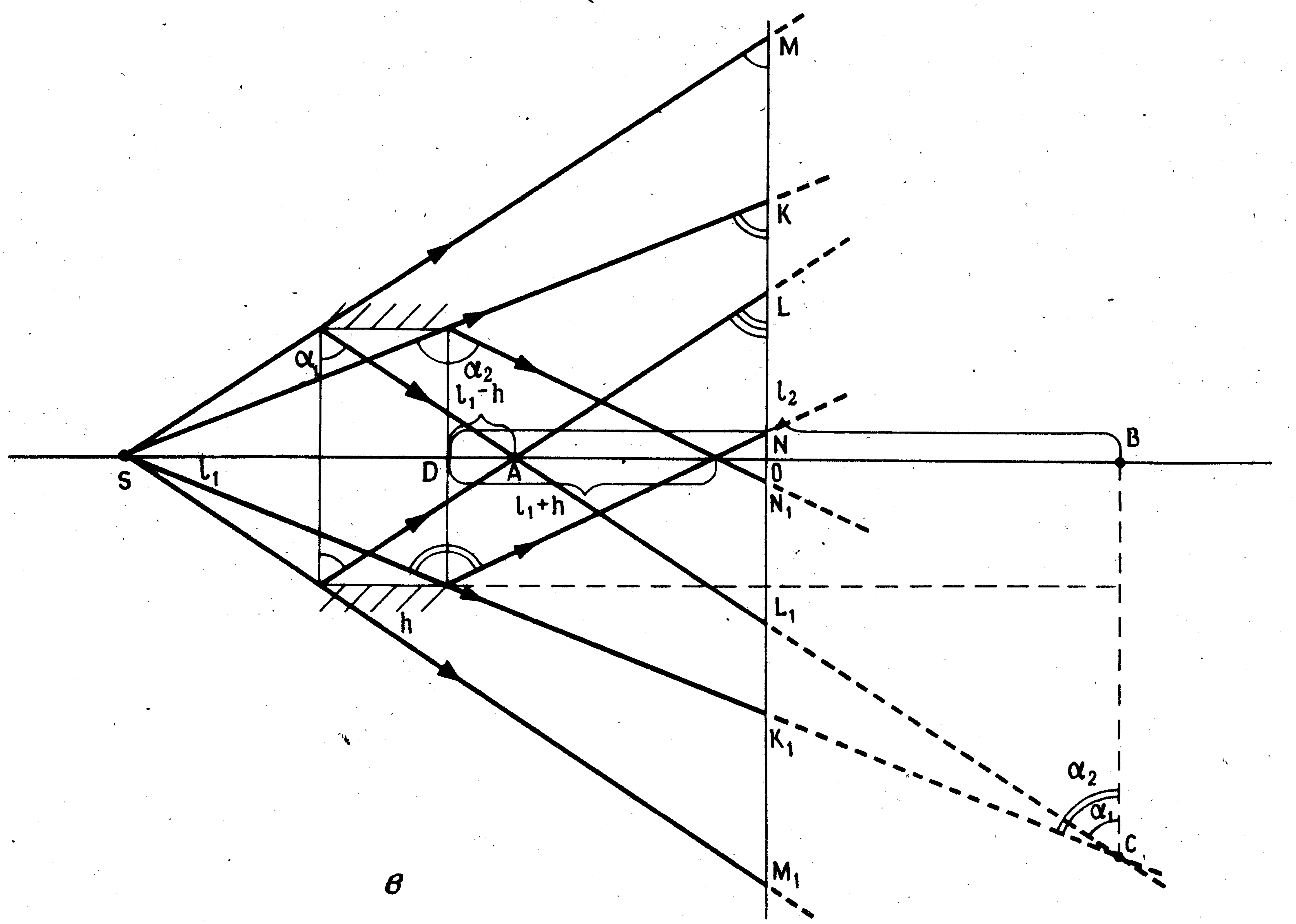


Рис. 5.5.

Определение выражения для l_2 и рассмотрение случая $l_2 > l_{2C}$ предоставляем читателю.

Задача 4. Кажущаяся глубина водоема 3 м. Определите истинную глубину водоема h_0. Показатель преломления воды $n = 1,33$.

Дано: $h = 3$ м, $n = 1,33$; h_0 — ?

Решение. Луч, отраженный от некоторой точки дна водоема, преломляется на границе раздела вода — воздух и попадает в глаз наблюдателя. Рассмотрим лучи, падающие под небольшим углом β (рис. 5.6) Наблюдателю кажется, что лучи идут из точки B. Из анализа треугольника ACD следует, что $CD = h_0 \operatorname{tg}\alpha$, из треугольника BCD имеем $CD = h \operatorname{tg}\beta$. Таким образом,

$$h_0 = h \operatorname{tg}\beta / \operatorname{tg}\alpha.$$

По закону преломления Снелля имеем

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{1}{n}.$$

Вследствие малости углов α и β можно считать

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} \approx \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\beta} = \frac{1}{n}.$$

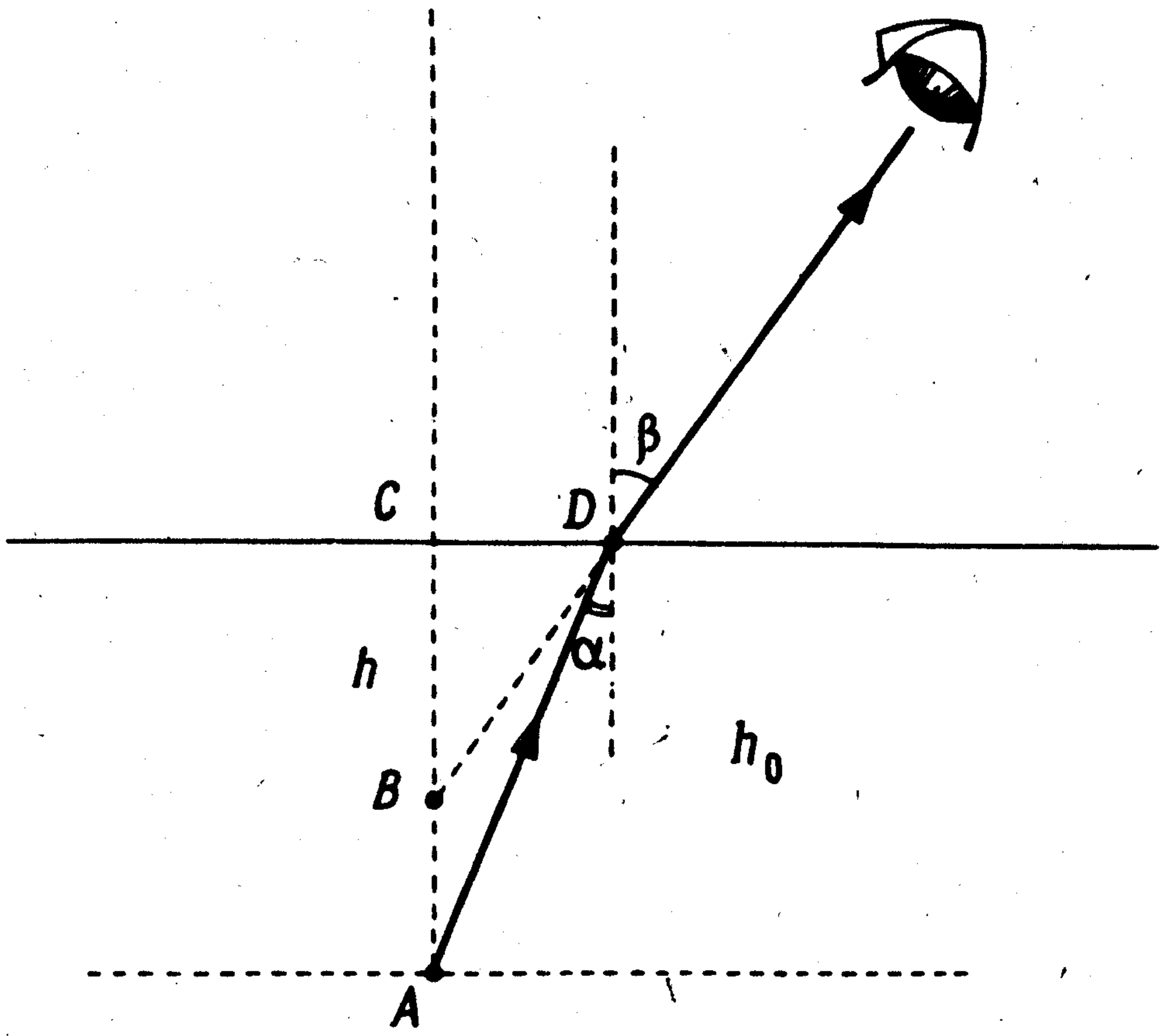


Рис. 5.6.

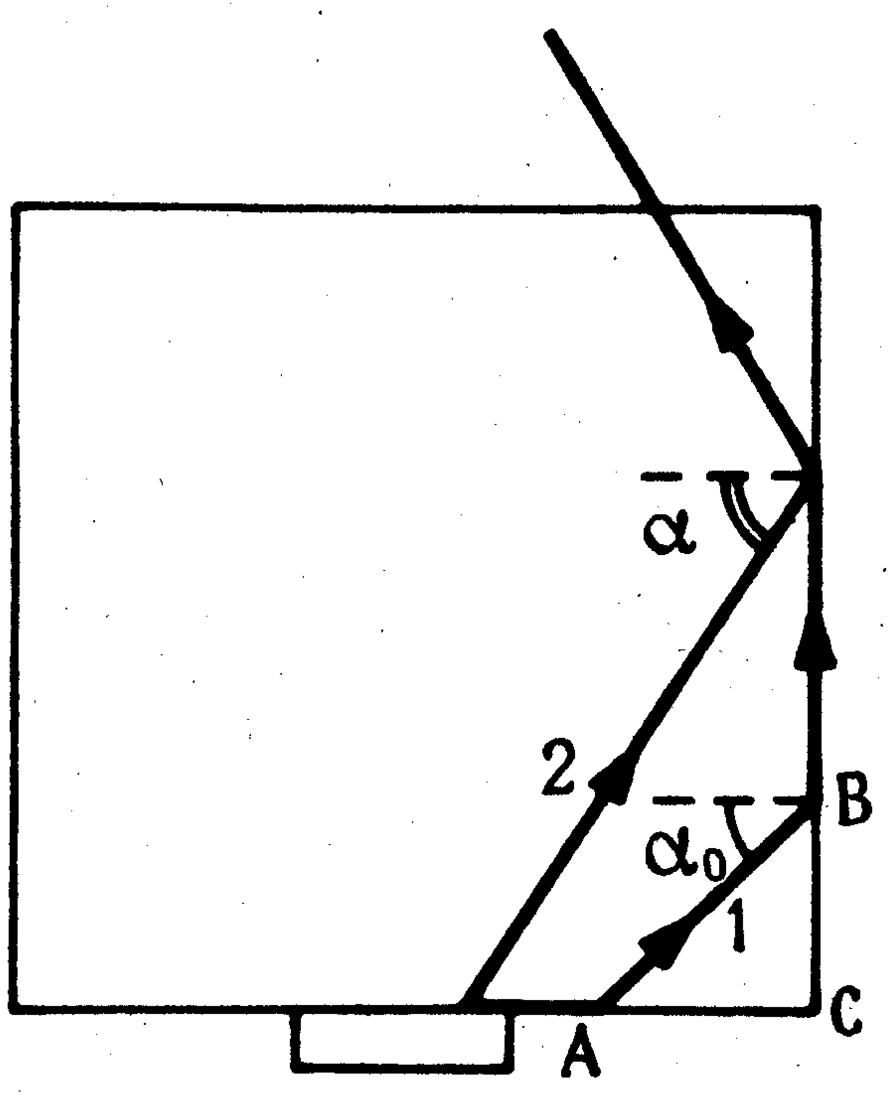


Рис. 5.7.

Окончательно имеем

$$h_0 = nh, \quad h_0 \approx 4\,\text{м}.$$

Задача 5. Прозрачный кубик лежит на монете. Монета освещается рассеянным светом. Определите, при каком значении показателя преломления материала кубика монета не будет видна через его боковую поверхность.

Решение. Из рис. 5.7 следует, что для того, чтобы через боковую поверхность не была видна монета, необходимо, чтобы лучи или отражались от боковой поверхности кубика или в крайнем случае скользили вдоль нее. Из этого следует, что луч должен падать на боковую поверхность под углом, большим или равным предельном углу: $\alpha \geq \alpha_0$. Из рис. 5.7 очевидно (ΔACB), что самый маленький угол падения на боковую грань будет у луча, преломленного у основания под предельным углом, и, следовательно, наибольшая вероятность выхода через боковую грань у лучей, падающих на основание под углом, близким к $\pi/2$. Таким образом, если луч, дважды преломившись, будет скользить вдоль боковой поверхности кубика, то все остальные лучи, имеющие меньший угол падения, будут падать на боковую поверхность под углом, большим α_0, и отразятся от нее: $\alpha > \alpha_0$ (например, луч 2). Для первого преломления луча, отраженного от монеты, на основании кубика справедливо выражение:

$$\sin \pi/2 / \sin \beta = n.$$

Закон преломления на боковой грани кубика имеет вид:

$$\frac{\sin \alpha_0}{\sin \pi/2} = \frac{1}{n},$$

откуда $\beta = \alpha_0$, а так как треугольник ABC — прямоугольный, угол между нормалью к основанию и нормалью к боковой поверхности равен $\pi/2$, $\alpha_0 = 45°$. Откуда $\sin \alpha_0 = 1/n$ и $n = \sqrt{2}$.

Задача 6. На грань призмы с углом при вершине γ под малым углом α падает луч. Докажите, что отклонение луча $\delta = (n-1)\gamma$, n — показатель преломления призмы.

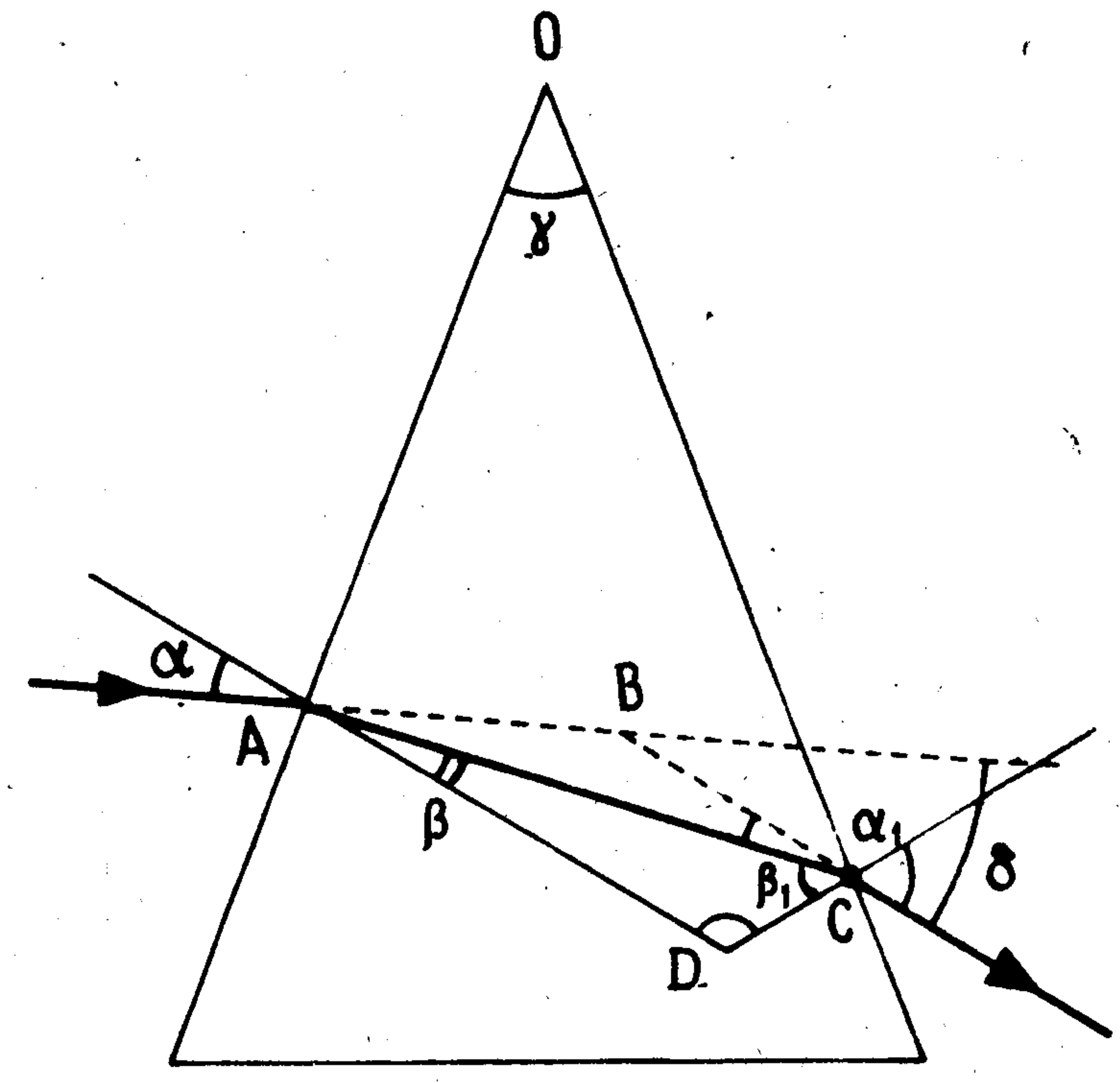


Рис. 5.8.

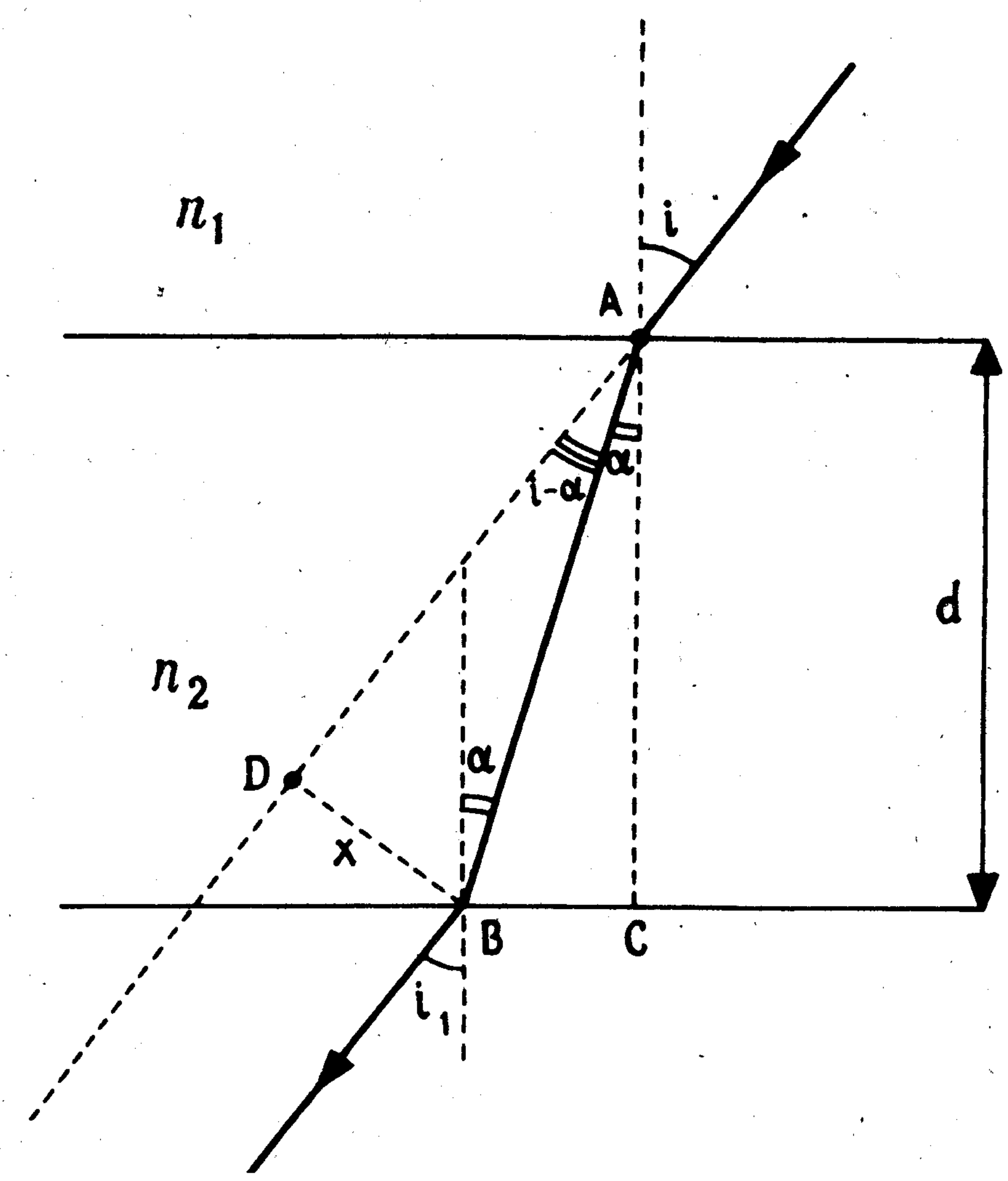


Рис. 5.9.

Дано: n, γ; δ — ?

Решение. Очевидно, что δ — внешний угол треугольника ABC, равный

$$\delta = \angle BAC + \angle BCA$$

(рис. 5.8). Обозначим через α и β, α_1 и β_1 углы падения и преломления на первой и на второй поверхностях призмы соответственно:

$$\angle BAC = \alpha - \beta, \quad \angle BCA = \alpha_1 - \beta_1.$$

По условию углы малы, и, следовательно $\alpha/\beta \approx n$ и $\alpha_1/\beta_1 \approx n$. Из четырехугольника $AOCD$ (углы OAD и OCD прямые) следует, что $\angle ADC = \pi - \gamma$. Из треугольника ACD получим

$$\angle ADC = \pi - \beta - \beta_1,$$

откуда $\beta_1 = \gamma - \beta$. Таким образом,

$$\delta = (n-1)\beta + (n-1)\beta_1.$$

Подставив в это уравнение выражение для β_1, получим

$$\delta = (n-1)\beta + (n-1)\gamma - (n-1)\beta = (n-1)\gamma.$$

Задача 7. Определить линейное смещение луча при прохождении его через плоскопараллельную стеклянную пластинку с показателем преломления $n_2 = 1,7$ толщиной $d = 4$ см. Угол падения луча 30°. Показатель преломления воздуха равен $n_1 = 1$ (рис. 5.9).

Дано: $i = 30°$, $d = 4$ см (0,04 м), $n_1 = 1$, $n_2 = 1,7$; x — ?

Решение. Выходящий и входящий в пластинку лучи параллельны, что следует из закона преломления: на первой границе воздух — стекло

$$\sin i / \sin\alpha = n_2/n_1,$$

на второй границе стекло — воздух

$$\sin\alpha_1/\sin i = n_1/n_2,$$

откуда $\alpha = \alpha_1$.

Для определения смещения луча x рассмотрим треугольники ABC и ABD:

$$x = AB\sin(i-\alpha),$$

$$AB = AC/\cos\alpha = d/\cos\alpha.$$

Тогда

$$x = (d/\cos\alpha)\sin(i-\alpha) = (d/\cos\alpha)\left[\sin i\cos\alpha - \cos i\sin\alpha\right] = d\,(\sin i - \cos i\,\mathrm{tg}\alpha)\,.$$

Предоставляем читателю самому получить численный результат.

Линзы

Линза представляет собой прозрачное тело, ограниченное криволинейными поверхностями. Простейшая линза — сферическая. Преломление лучей при прохождении их через линзу строго определяется законами преломления. Расчеты, проводимые на основании этих законов показывают, что линзы можно разделить на два типа: *собирающие* и *рассеивающие*. Используя законы преломления света, можно показать, что линзы *а* — *в* (рис. 5.10) будут собирать падающий на них параллельный пучок лучей, а линзы *г* — *е* — рассеивать. Слева на рисунках показаны условные обозначения тонких собирающей и рассеивающей линз.

Рассмотрим *тонкую линзу*, т. е. линзу, максимальная толщина которой значительно меньше ее радиусов кривизны (рис. 5.11). *Главной оптической осью*

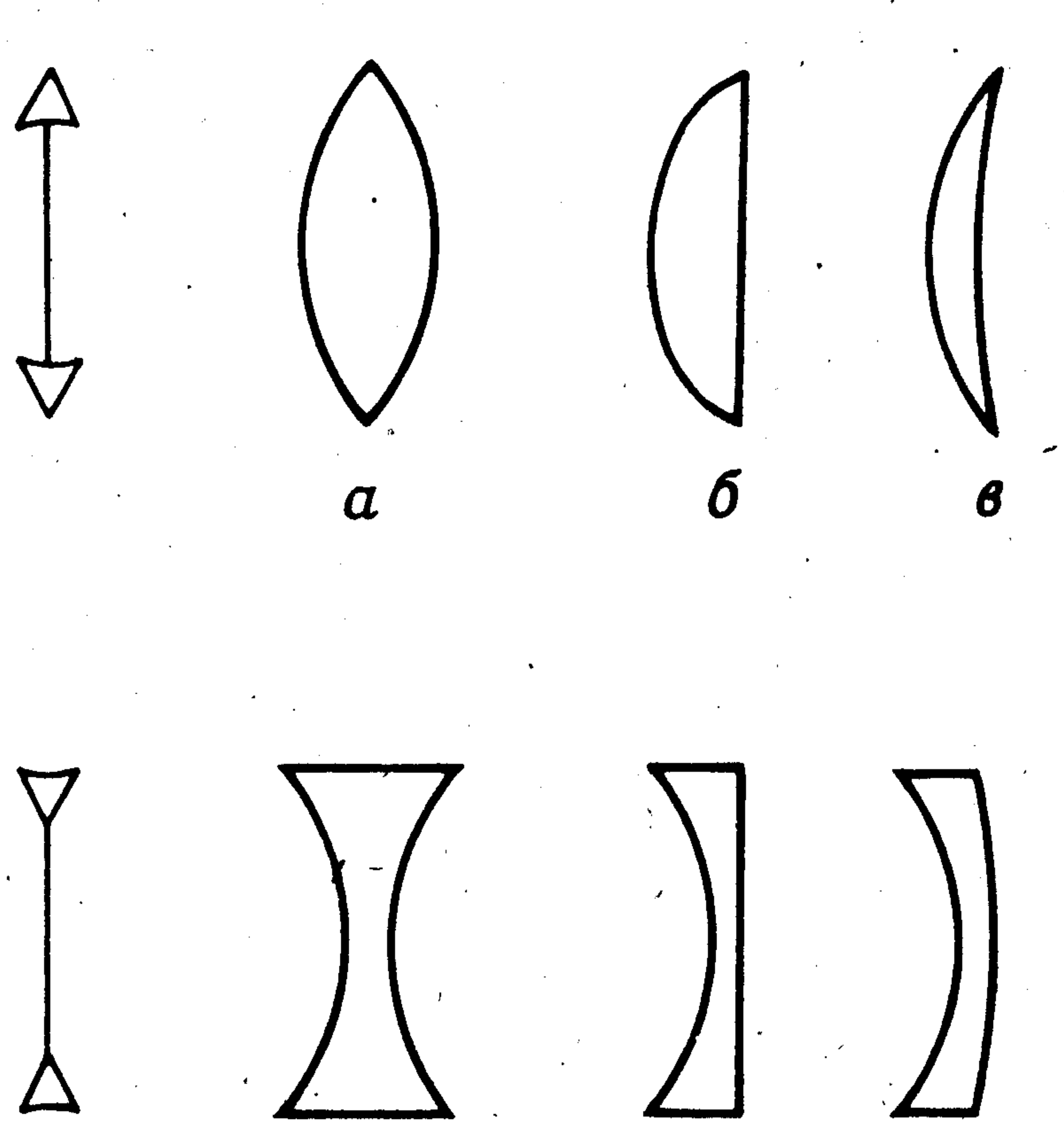


Рис. 5.10.

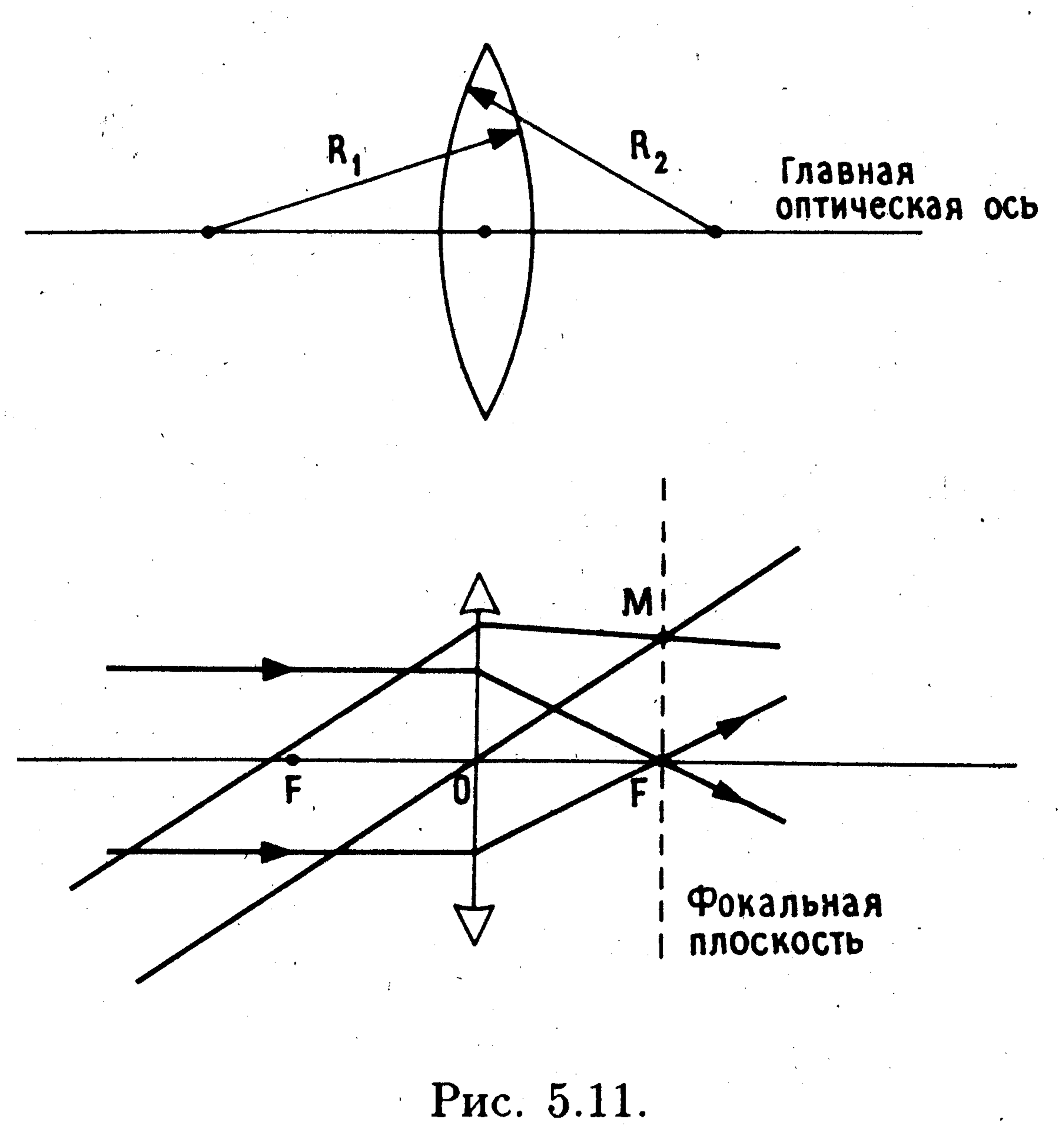


Рис. 5.11.

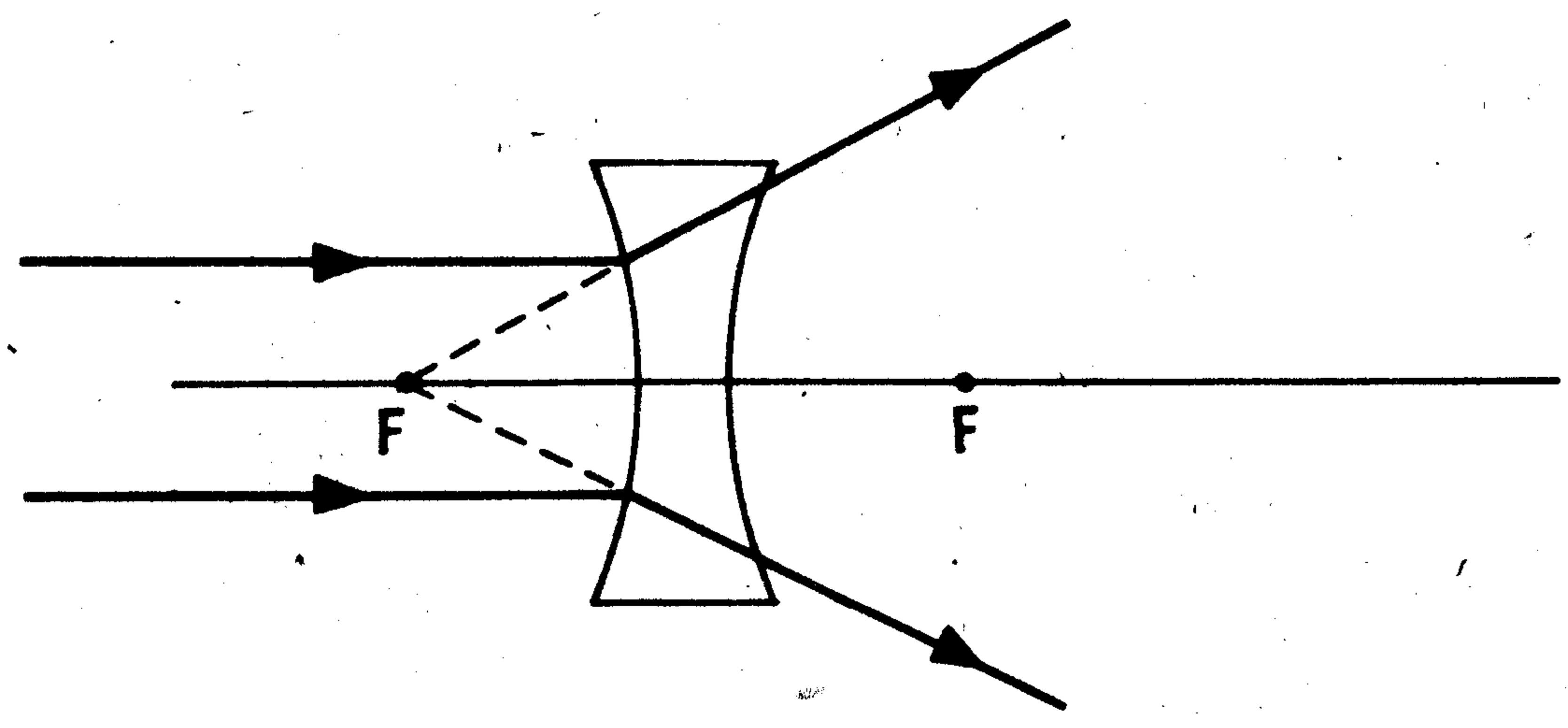


Рис. 5.12.

называется прямая, проходящая через центры сферических поверхностей, ограничивающих линзу. Радиусы этих сфер называются *радиусами кривизны*. *Фокусом* линзы называется точка пересечения F преломленных линзой лучей, падающих параллельно главной оптической оси.Плоскость, проходящая через фокус перпендикулярно главной оптической оси, называется *фокальной плоскостью*. Оптическим центром линзы называется точка, при прохождении через которую любой луч преломляется таким образом, что направление его распространения не изменяется. Оптический центр — это точка пересечения главной оптической оси с тонкой линзой. Другие прямые, проходящие через оптический центр линзы, называются побочными оптическими осями. Расстояние между оптическим центром линзы и фокусом называется *фокусным расстоянием*. Очевидно, что фокусное расстояние является величиной положительной.

Лучи, параллельные побочной оптической оси, собираются в фокальной плоскости, в точке ее пересечения побочной оптической осью (точка M).

У рассеивающей линзы фокус мнимый. Параллельный пучок лучей, падающих на линзу, рассеивается. Пересекаются продолжения этих лучей (рис. 5.12).

Все изложенное относится к идеальным оптическим системам и справедливо в достаточно узком параксиальном пучке лучей, т. е. лучей, образующих с главной оптической осью малый угол.

Величина, обратная фокусному расстоянию (выраженному в метрах), называется *оптической силой линзы*:

$$D = 1/F\,(\text{дп}),$$

которая измеряется в *диоптриях*: 1 дп — это оптическая сила такой линзы, фокусное расстояние которой равно 1 м.

Отметим, что форма линзы не определяет того, будет линза собирающей или рассеивающей. Выпуклая линза, помещенная в среду с большей оптической плотностью, будет рассеивать лучи.

Фокусное расстояние и оптическая сила линзы определяются радиусами кривизны ее сферических поверхностей. Формула, связывающая эти величины, имеет вид

$$D = (n-1)\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right), \tag{5.4}$$

$$D = \pm 1/F.$$

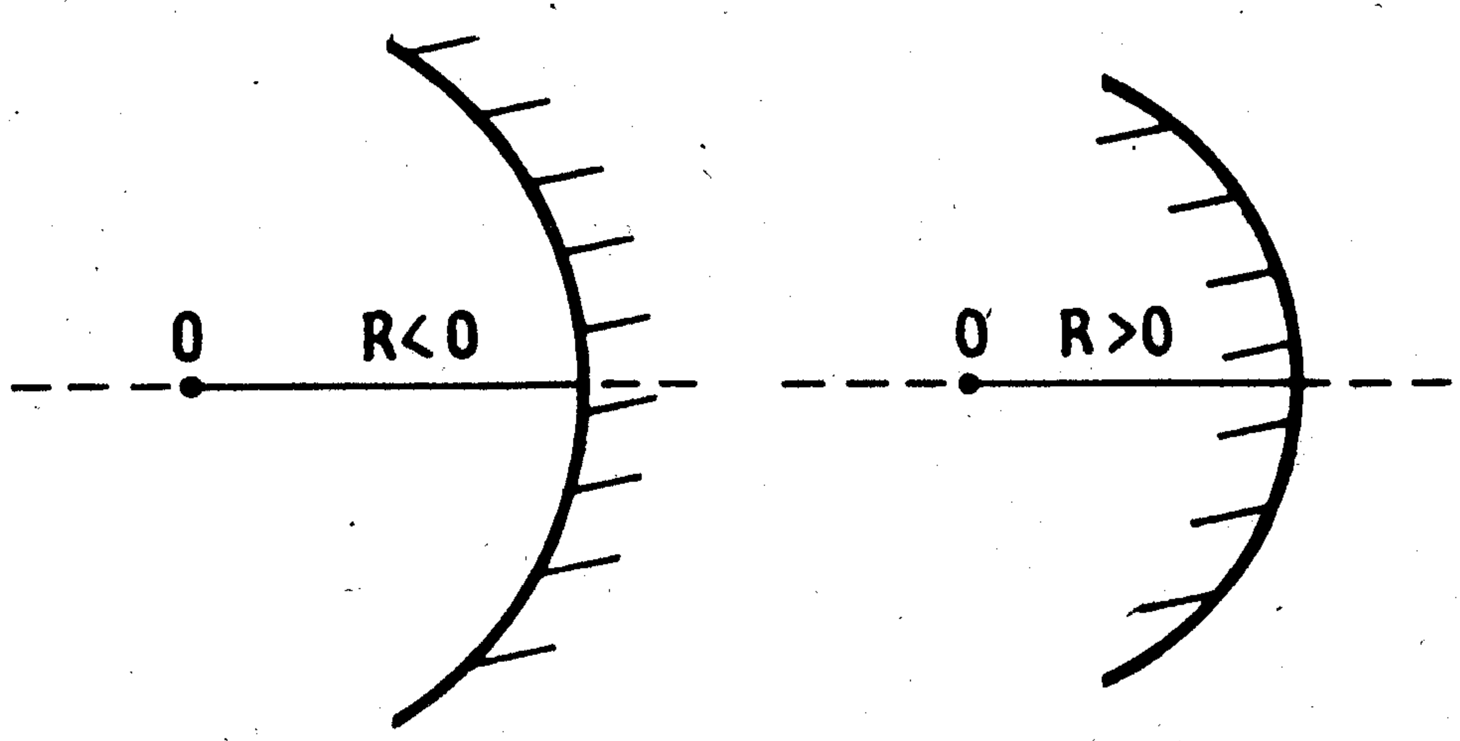


Рис. 5.13.

Для выпуклой линзы R_1 и $R_2 > 0$. Тогда, если $n > 1$, то $D > 0$, т. е. линза собирающая, если же $n < 1$, то $D < 0$, линза рассеивающая, где $n = n_л/n_{ср}$ — отношение показателей преломления линзы и среды. Радиус кривизны считается положительным для выпуклых поверхностей и отрицательным для вогнутых (рис. 5.13). Для двояковогнутой линзы R_1 и $R_2 < 0$. Тогда, если $n > 1$, то $D < 0$, т. е. линза рассеивающая, если $n < 1$, то $D > 0$, и линза собирающая.

Построение изображений в линзах

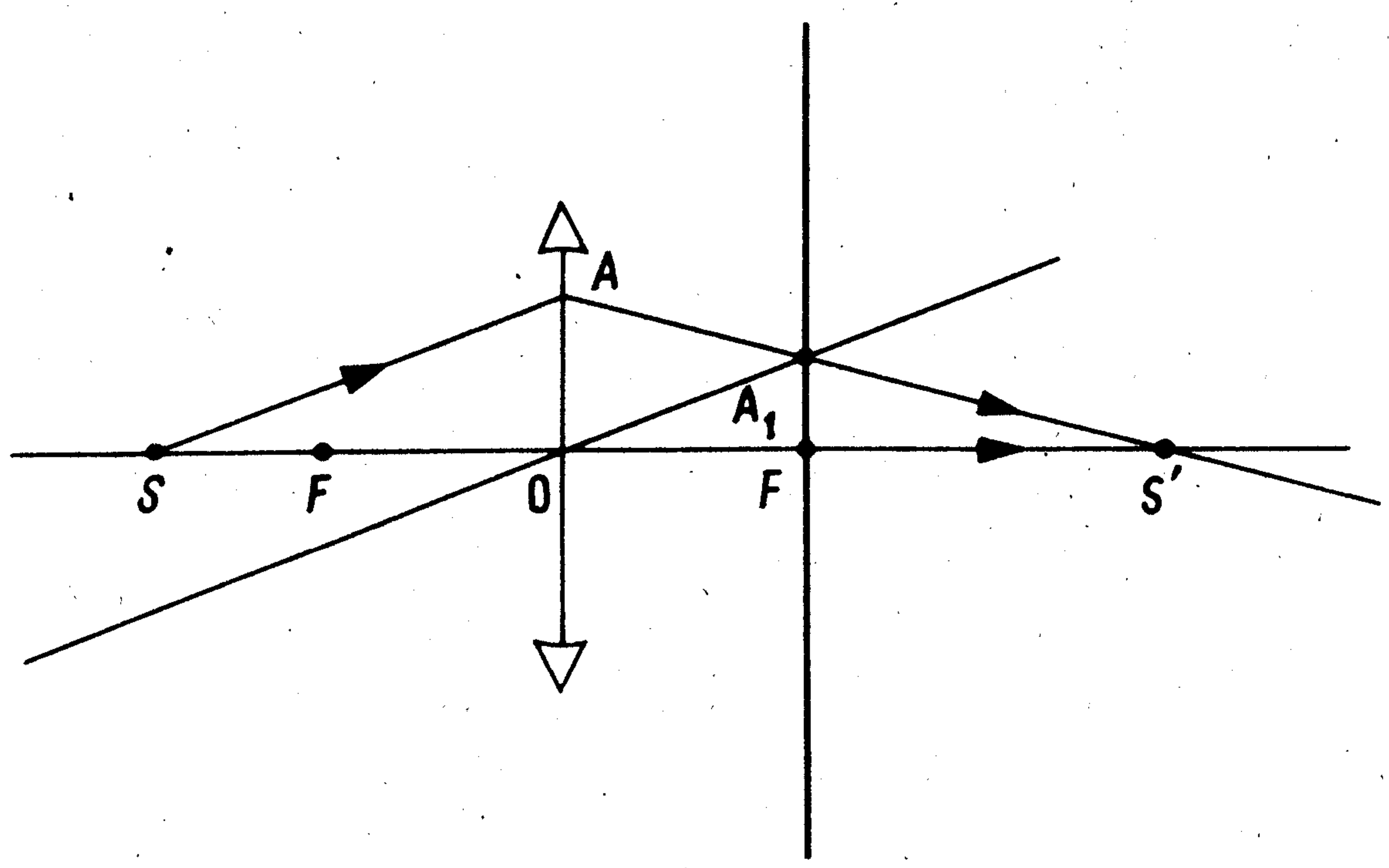
Изображение точечного источника — это точка, в которой собираются лучи от источника, преломленные в линзе. Если после преломления лучи, идущие от источника, пересекаются в некоторой точке, то такое изображение называется *действительным*; если после преломления в линзе лучи расходятся, а пересекаются их продолжения, то такое изображение называется *мнимым*.

Пусть точечный источник света помещен на главной оптической оси собирающей линзы (рис. 5.14,*а*). Луч, идущий от источника вдоль главной оптической оси, не преломляется. Возьмем некоторый произвольный луч SA. Чтобы найти, каким образом он преломляется, проведем побочную оптическую ось параллельно SA. Она пересекает фокальную плоскость в точке A_1. Очевидно, что преломленный луч SA пересекает фокальную плоскость в той же точке. Пересечение двух лучей SO и AA_1 дает изображение в точке S'. Изображение S' источника S в любой оптической системе — это точка, в которой пересекаются все лучи, исходящие из источника S, после прохождения лучами оптической системы. Следовательно, для построения изображения достаточно найти точку пересечения двух любых лучей. Изображение в данном случае действительное.

Пусть источник находится в некоторой произвольной точке S (рис. 5.14,*б*). Возьмем два луча: луч SO проходит, не преломляясь, через оптический центр линзы, луч SA параллелен главной оптической оси. После преломления в линзе этот луч проходит через фокус линзы. Точка пересечения лучей S' — действительное изображение источника S.

Аналогично можно построить изображение предмета, используя те же лучи. Рассмотрим несколько случаев построения изображений в собирающей линзе (рис. 5.15).

1) Предмет находится на расстоянии, превосходящем двойное фокусное



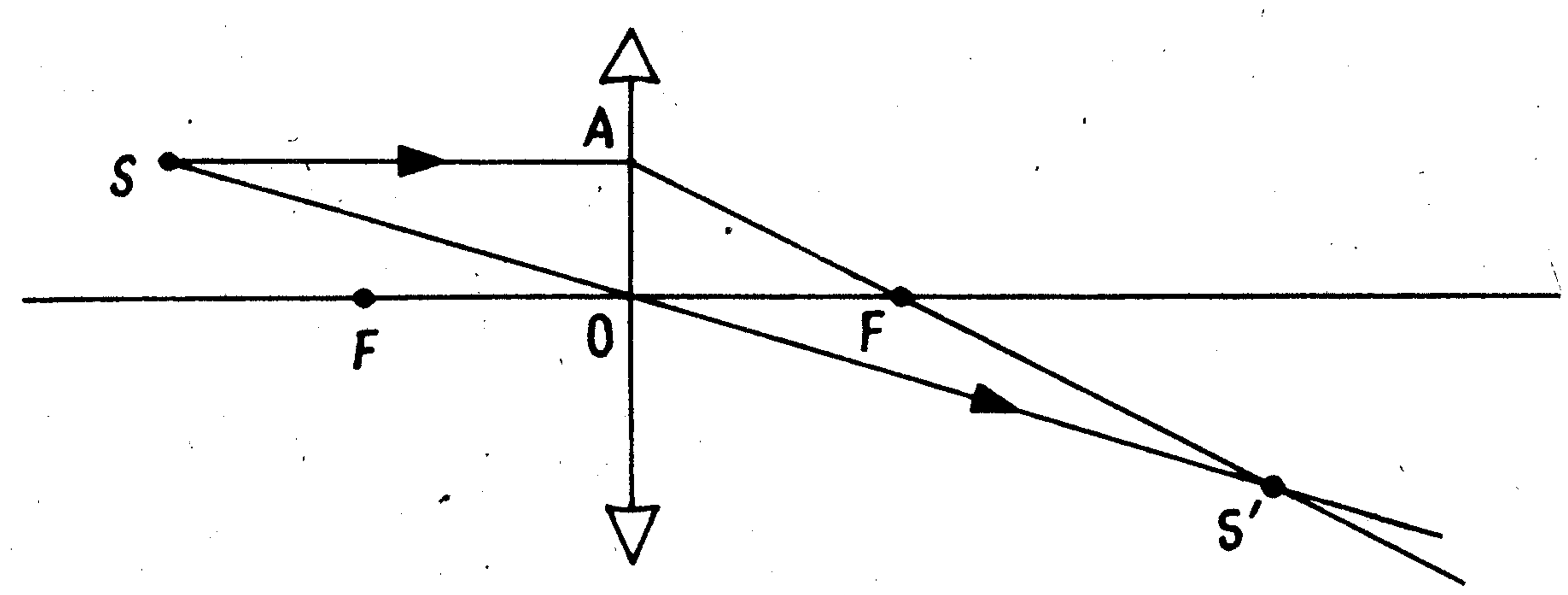


Рис. 5.14.

расстояние $d > 2F$. Изображение действительное перевернутое уменьшенное (рис. 5.15,*а*).

2) При $d = 2F$ изображение действительное перевернутое. Размеры изображения равны размеру предмета (рис. 5.15,*б*).

3) При $F < d < 2F$ изображение действительное перевернутое увеличенное (рис. 5.15,*в*).

4) При $d = F$ изображения нет. Лучи, идущие от каждой точки источника, выходят под разными углами из линзы параллельными потоками (рис. 5.15,*г*).

5) При $d < F$ изображение получается с той же стороны, что и предмет. Изображение мнимое, прямое, увеличенное (рис. 5.15,*д*).

На рис. 5.15,*е* показаны графики зависимости расстояния от изображения до оптического центра от расстояния от предмета до оптического центра линзы.

Вывод формулы линзы

Отношение линейных размеров изображения к линейным размерам предмета называется *линейным увеличением*:

$$\Gamma = A'B'/AB$$

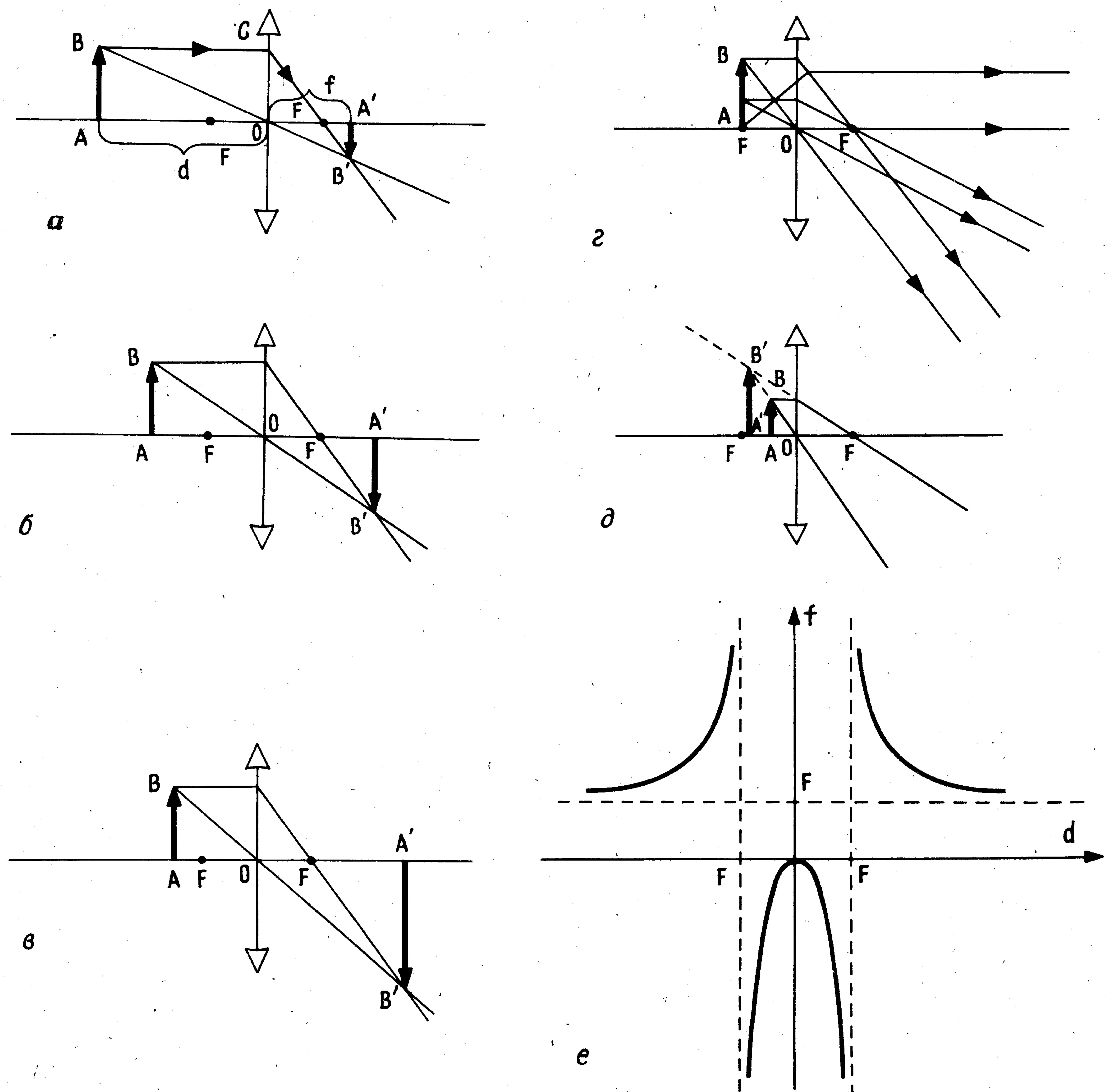


Рис. 5.15.

(рис. 5.15, *а*). Из подобия треугольников ABO и $A'B'O$ следует, что

$$\Gamma = \frac{A'B'}{AB} = \frac{f}{d}. \tag{5.5}$$

Из подобия треугольников OCF и $A'B'F$ и равенства $OC = AB$ следует, что

$$\Gamma = \frac{A'B'}{OC} = \frac{f - F}{F}.$$

Приравнивая выражения для Γ, получим

$$\frac{f}{d} = \frac{f - F}{F}.$$

Воспользуемся свойством пропорции и получим уравнение:

$$fF = fd - dF.$$

Разделив все члены уравнения на fdF, получим *формулу линзы*:

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{d} + \frac{1}{f}. \tag{5.6}$$

Построение изображений в рассеивающей линзе

1) Пусть точечный источник света S находится на главной оптической оси линзы (рис. 5.16,*а*). Луч, идущий через оптический центр, не изменяет направления. Возьмем произвольный луч SA. Побочная оптическая ось пересечет фокальную плоскость в точке B. В этой же точке пересечет фокальную плоскость продолжение преломленного в линзе луча SA. Точка пересечения продолжения этого луча с главной оптической осью S' есть изображение источника S. Изображение *мнимое*.

2) Если источник находится в любой точке плоскости чертежа, то один луч удобно выбрать идущим через оптический центр, а другой—параллельно главной оптической оси. После преломления продолжение этого луча пересечет главную оптическую ось в точке фокуса. Точка пересечения указанных лучей даст изображение источника.

Изображение предмета строится аналогично. Рассмотрим несколько случаев построения изображения. Заметим, что рассеивающая линза позволяет получить только мнимое изображение предмета (рис. 5.16,*б*).

1) При $d > F$ изображение мнимое уменьшенное прямое.

2) При $d = F$ изображение существует (в отличие от собирающей линзы). Из построения очевидно, что размеры изображения в два раза меньше размеров предмета (рис. 5.16,*в*).

3) При $d < F$ изображение мнимое прямое уменьшенное (рис. 5.16,*г*). С приближением к линзе размеры изображения увеличиваются, однако они всегда будут меньше размеров предмета, $\Gamma < 1$.

На рис. 5.17 изображена зависимость f от d для рассеивающей линзы. Для рассеивающей линзы справедлива формула, аналогичная (5.6).

Запишем формулу линзы в общем случае:

$$\pm\frac{1}{F} = \pm\frac{1}{d} \pm \frac{1}{f}. \tag{5.7}$$

Слева знак плюс берется в случае собирающей, знак минус в случае рассеивающей линзы. При первом члене в правой части равенства знак плюс берется в случае действительного источника, знак минус в случае, когда на линзу падает сходящийся пучок лучей, который пересекся бы в некоторой точке S за линзой на расстоянии d от нее, если бы линзы не было. Такой источник можно трактовать как мнимый, поэтому в этом случае в формуле (5.7) берется $-1/d$. При втором слагаемом знак плюс берется в случае действительного изображения, знак минус в случае мнимого.

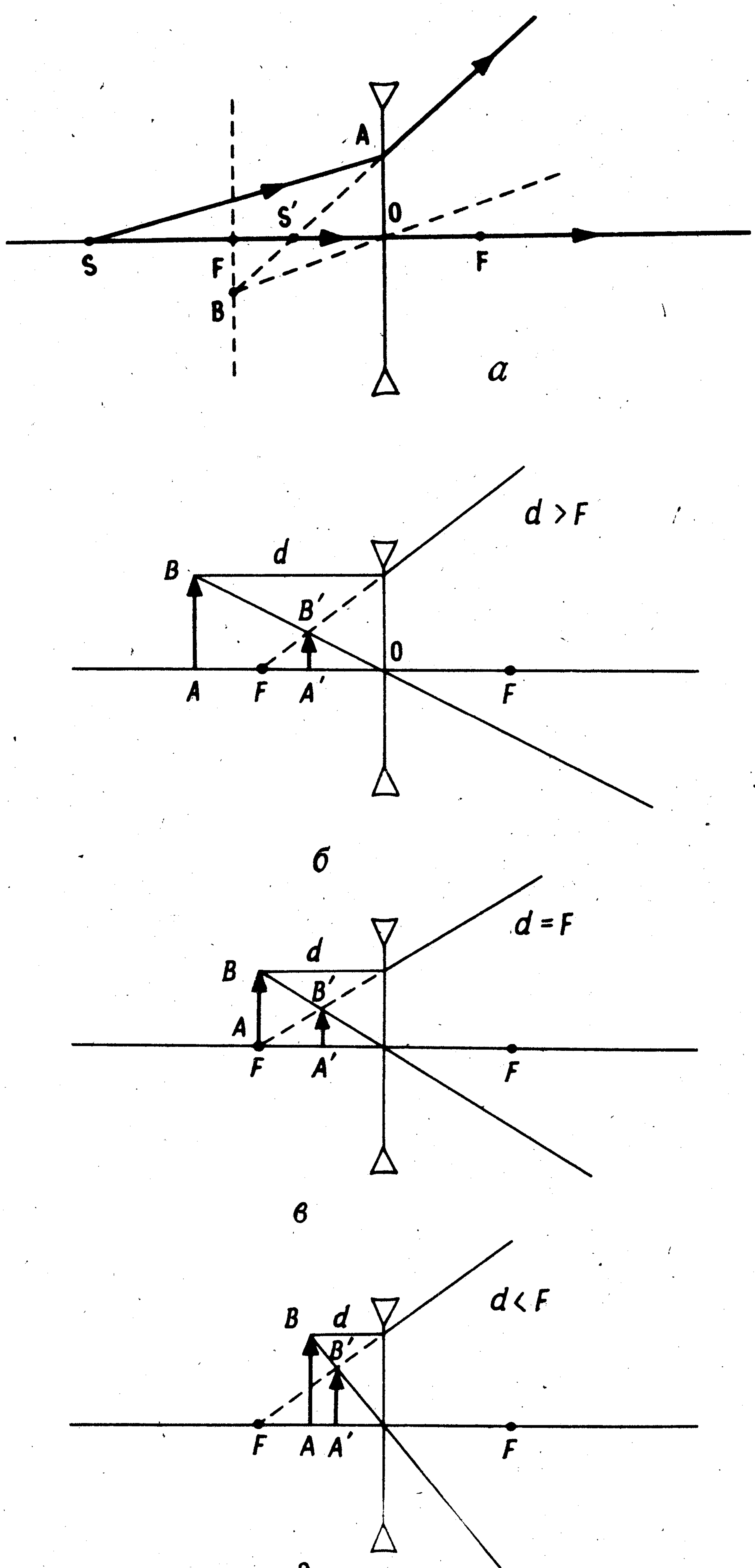


Рис. 5.16.

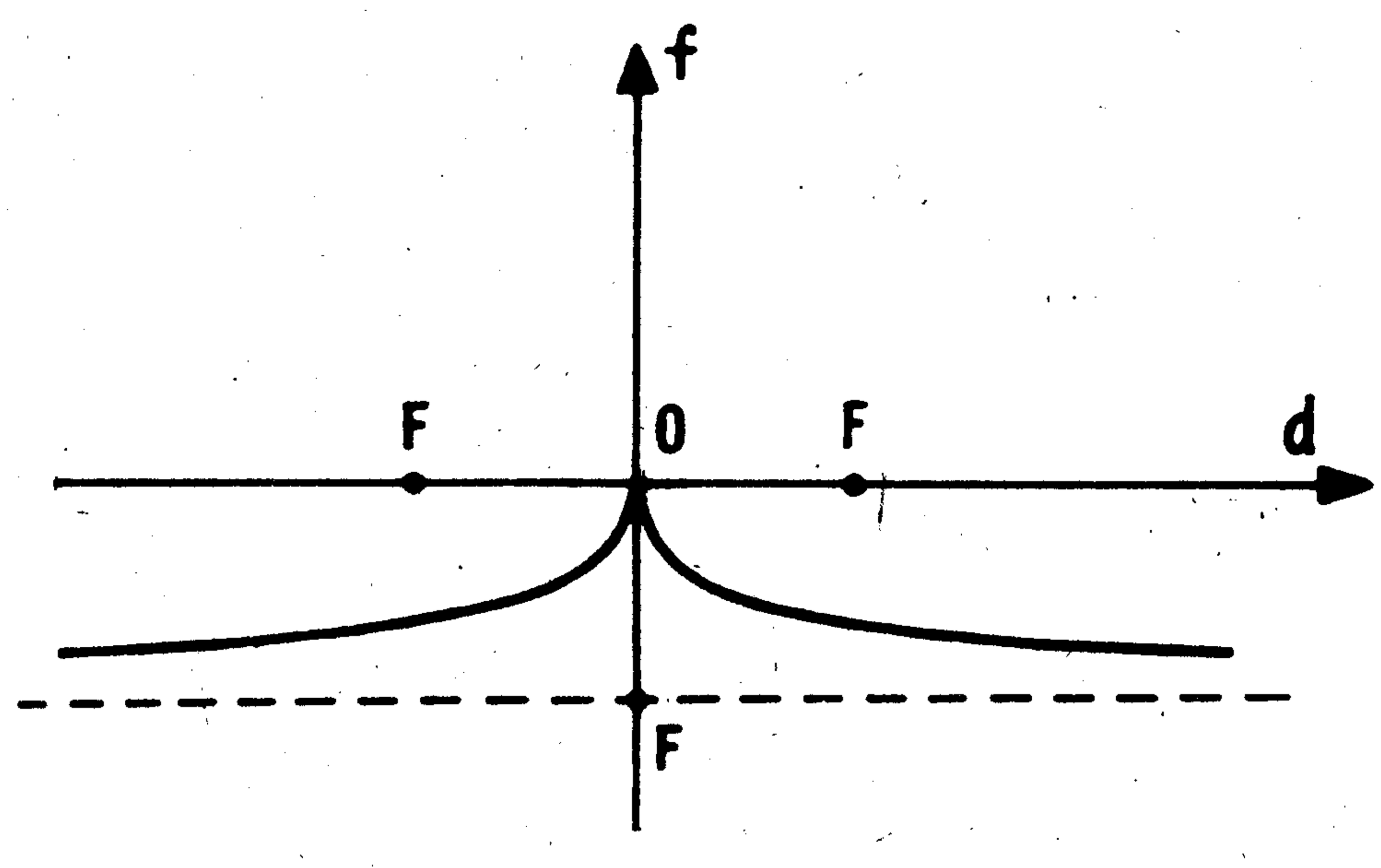


Рис. 5.17.

Примеры решения задач

Задача 1. Найти ход луча AB после преломления в собирающей линзе (рис. 5.18,*а*).

Решение. Для определения хода луча AB проведем побочную оптическую ось O_1O_2 (рис. 5.18,*б*), параллельную лучу AB. Эта ось пересечет фокальную плоскость линзы в точке C. Через точку C должен пройти и преломленный луч BD.

Задача 2. Известен ход луча SA после его преломления в рассеивающей линзе. Найти с помощью геометрического построения положение главных фокусов линзы (рис. 5.19,*а*).

Решение. Проведем побочную оптическую ось O_1O_2, параллельную лучу SA (рис. 5.19,*б*). Продолжение преломленного луча AB и эта ось пересекаются в точке C, лежащей в фокальной плоскости. Точка пересечения фокальной плоскости с главной оптической осью—это главный фокус линзы.

Задача 3. Построить изображение точки S, лежащей на главной оптической оси рассеивающей линзы на расстоянии, большем фокусного. Положения фокусов линзы заданы (рис. 5.20).

Решение. Чтобы построить изображение точки S, нужно найти ход двух любых лучей, выходящих из точки S. Рассмотрим ход луча SO (падающего на оптический центр линзы O) и произвольного луча SA. Чтобы найти ход

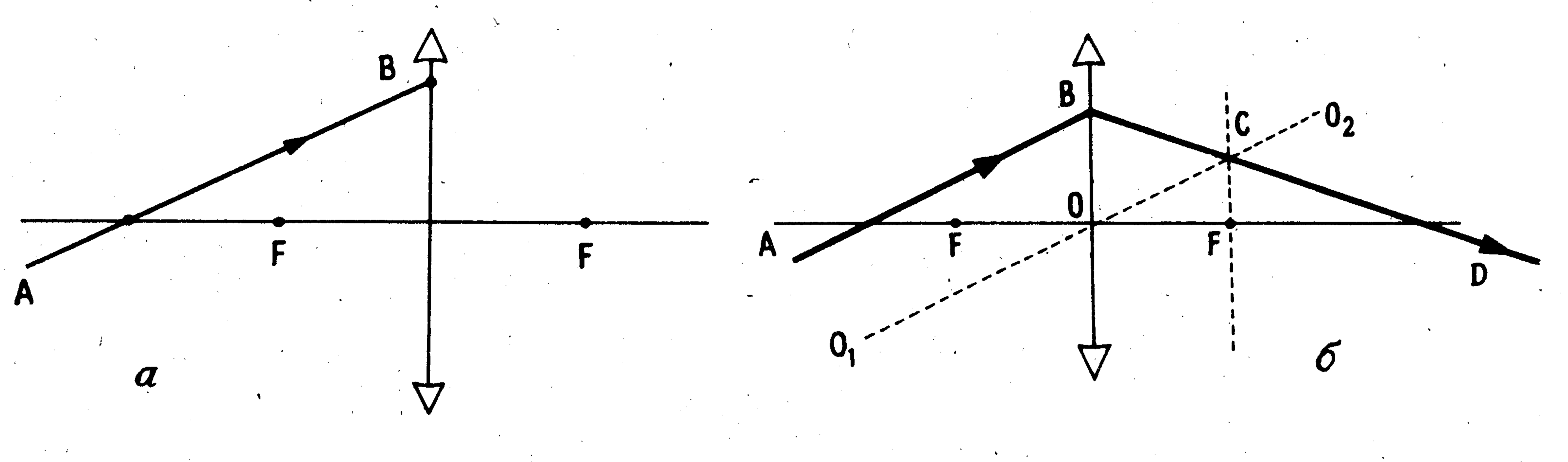
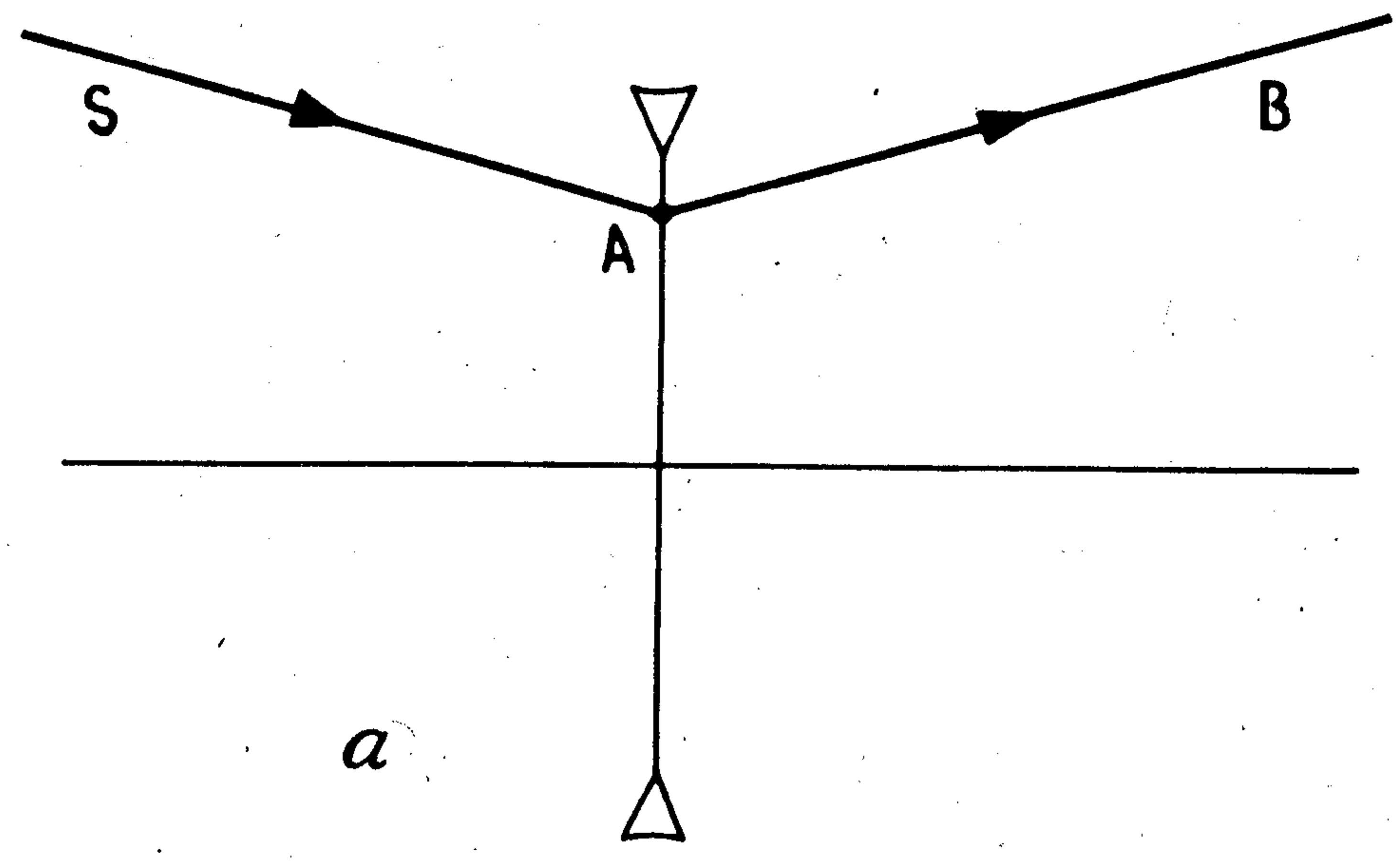


Рис. 5.18.



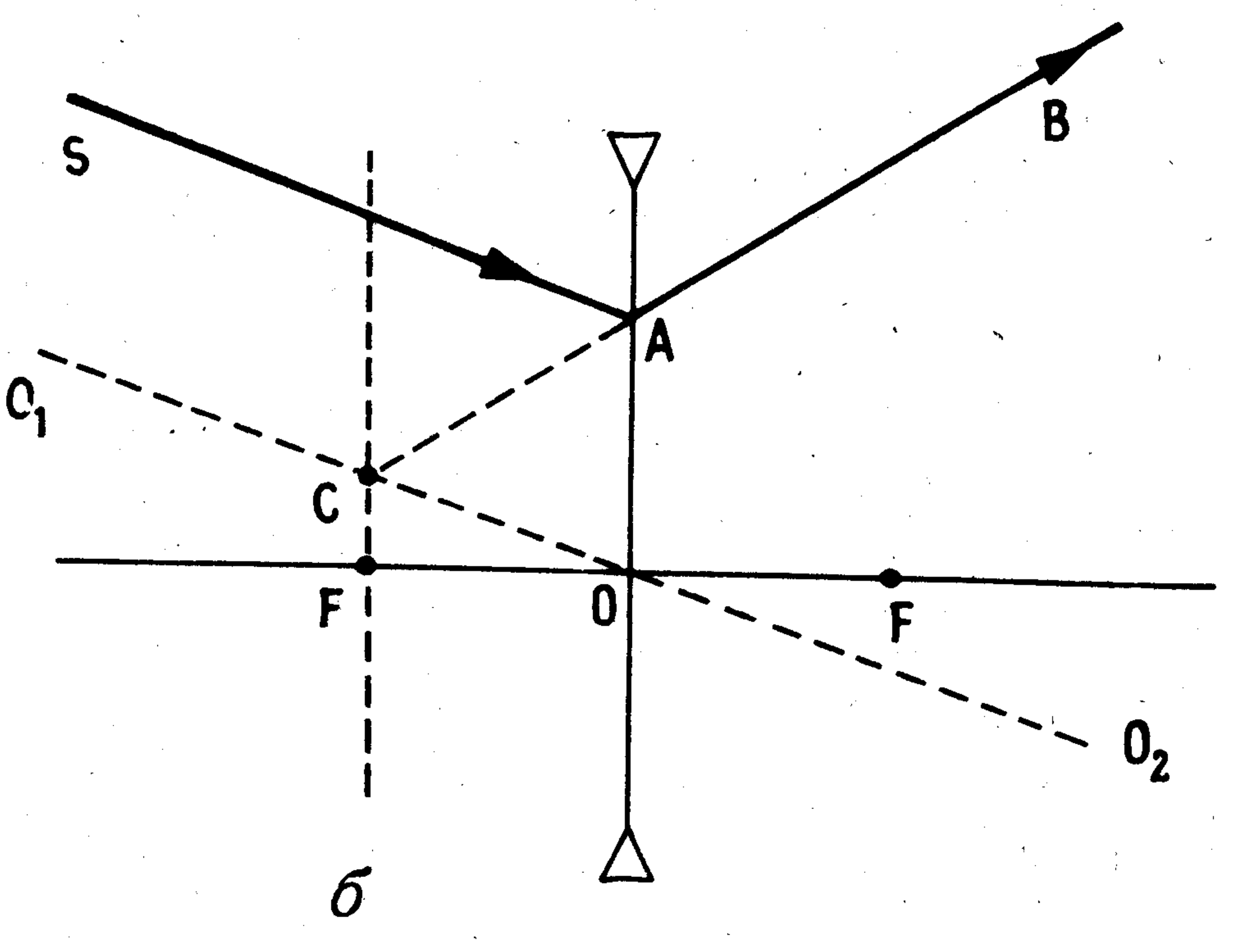


Рис. 5.19.

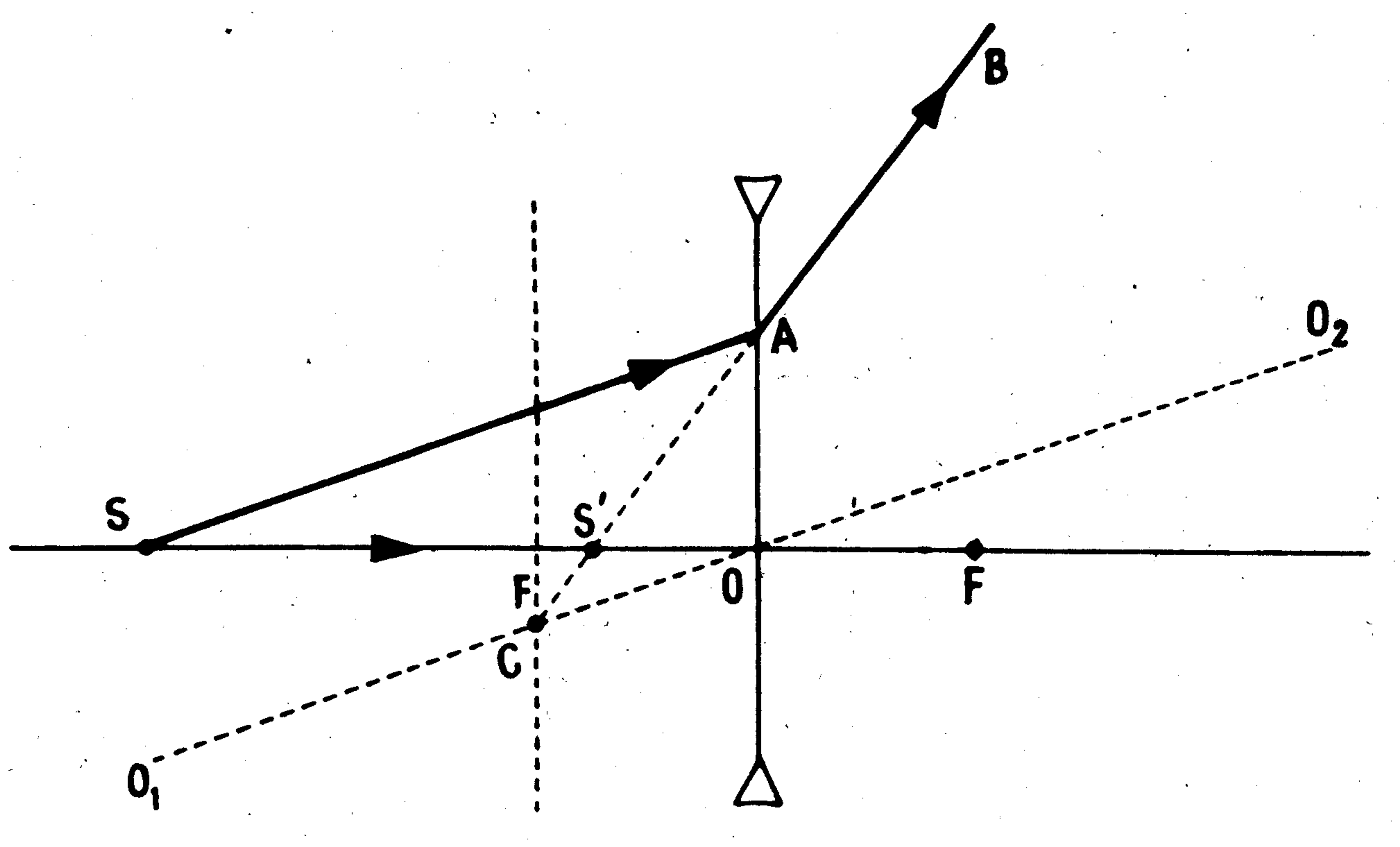


Рис. 5.20.

луча SA, проведем побочную оптическую ось O_1O_2, параллельную лучу SA. Эта ось пересекает фокальную плоскость в точке C. После преломления в линзе продолжение луча AB также должно пройти через точку C. Изображение S' находится в точке пересечения лучей OS и AB.

Задача 4. Найдите фокусное расстояние F и оптическую силу D собирающей линзы, если известно, что изображение предмета, помещенного на расстоянии 24 см от линзы, получается по другую сторону линзы на расстоянии 48 см от нее (рис. 5.21).

Дано: $d = 24$ см (0,24 м), $f = 48$ см (0,48 м); F — ? D — ?

Решение. По условию линза собирающая и изображение предмета действительное. Запишем формулу линзы

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{d} + \frac{1}{f},$$

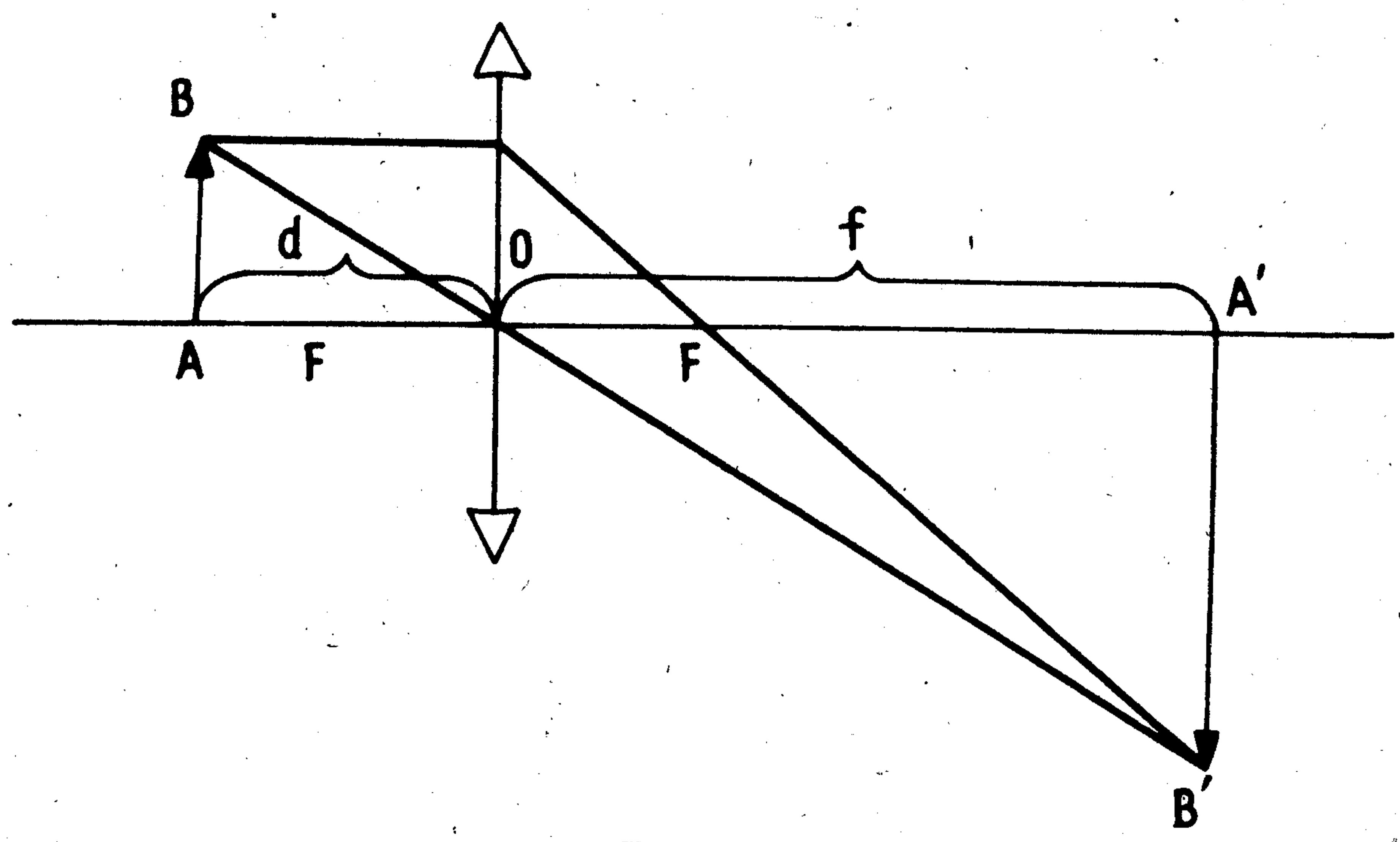


Рис. 5.21.

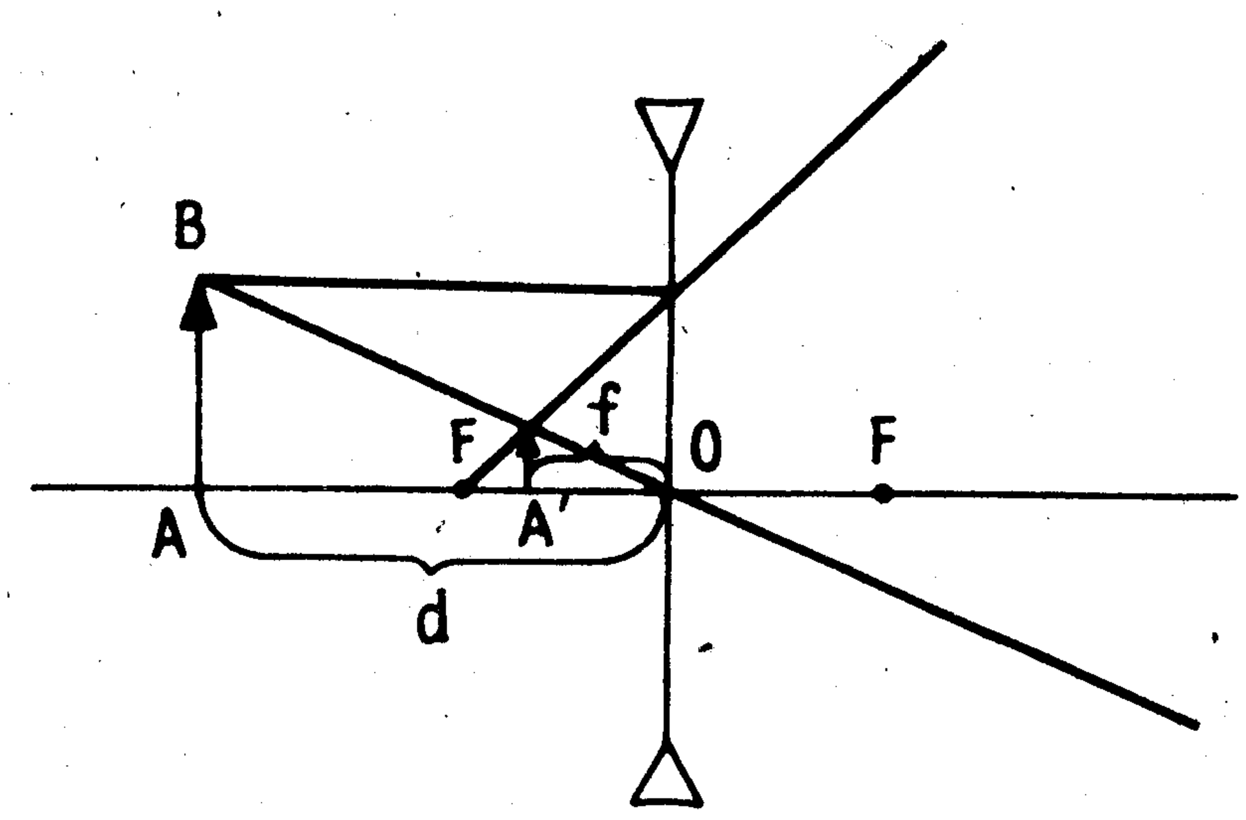


Рис. 5.22.

откуда

$$F = \frac{df}{d+f} = \frac{0,24 \cdot 0,48}{0,24+0,48}\,\text{м} = 0,16\,\text{м},$$

$$D = 1/F, \quad D = 1/0,16\,\text{м} = 6,25\,\text{дп}.$$

Задача 5. На каком расстоянии от рассеивающей линзы с оптической силой $D = -4$ дп нужно поместить предмет, чтобы его мнимое изображение получилось в 4 раза меньше самого предмета (рис. 5.22).

Дано: $D = -4$ дп, $\Gamma = 1/4$; d — ?

Решение. Поскольку $\Gamma = 1/4 = f/d$, имеем $f = d/4$. Используя формулу линзы, получим:

$$D = \frac{1}{d} - \frac{1}{f} = \frac{1}{d} - \frac{4}{d} = -\frac{3}{d},$$

откуда

$$d = -(3/D)\,\text{м} = -[3/(-4)]\,\text{м} = 0,75\,\text{м}.$$

Задача 6. Фокусное расстояние собирающей линзы $F = 30$ см, расстояние предмета от фокуса $l = 10$ см. Линейные размеры предмета 5 см. Определить размеры изображения H.

Дано: $F = 30$ см (0,3 м), $l = 10$ см (0,1 м), $h = 5$ см (0,05 м); H — ?

Решение. По условию задачи неясно, где находится предмет. Он может располагаться как за фокусом, так и перед ним. Рассмотрим сначала случай, когда $d_1 = F + l$. Запишем формулу линзы. Поскольку изображение будет действительным, имеем

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{d_1} + \frac{1}{f_1} = \frac{1}{F+l} + \frac{1}{f_1},$$

откуда

$$f_1 = \frac{F(F+l)}{l}.$$

Увеличение в этом случае равно

$$\Gamma_1 = \frac{H_1}{h} = \frac{f_1}{d_1}, \quad H_1 = \frac{f_1 h}{d_1} = \frac{F(F+l)h}{l(F+l)} = \frac{Fh}{l}.$$

Если предмет расположить между фокусом и линзой, то изображение будет мнимым. В этом случае $d_2 = F - l$ и формула линзы имеет вид

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{d_2} - \frac{1}{f_2} = \frac{1}{F-l} - \frac{1}{f_2}.$$

Выполнив необходимые преобразования, получим

$$H_2 = Fh/l.$$

Следовательно, в обоих случаях высота изображения одинакова и равна

$$H = \frac{0,3 \cdot 0,05}{0,1}\,\text{м} = 0,15\,\text{м}.$$

Задача 7. Расстояние между предметом и его изображением $L = 72$ см. Увеличение линзы равно $\Gamma = 3$. Найти фокусное расстояние линзы.

Дано: $L = 72$ см (0,72 м), $\Gamma = 3$; F — ?

Решение. Рассмотрим два случая: изображение предмета действительное и изображение предмета мнимое (рис. 5.23). Если изображение предмета действительное (рис. 5.23,*а*), то, как видно из чертежа, $L = d_1 + f_1$. Поскольку $\Gamma = f_1/d_1$, имеем систему двух уравнений относительно неизвестных d_1 и f_1:

$$0,72 = d_1 + f_1,$$
$$3 = f_1/d_1,$$

откуда $d_1 = 0,18$ м, $f_1 = 0,54$ м. Из формулы линзы

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{d_1} + \frac{1}{f_1}$$

найдем фокусное расстояние линзы:

$$F = \frac{d_1 f_1}{d_1 + f_1} = \frac{0,18 \cdot 0,54}{0,18 + 0,54}\,\text{м} = 0,135\,\text{м}.$$

Если изображение предмета мнимое (рис. 5.23,*б*), то для d_2 и f_2 можно записать

$$f_2 - d_2 = L = 0,72,$$
$$\Gamma = f_2/d_2 = 3,$$

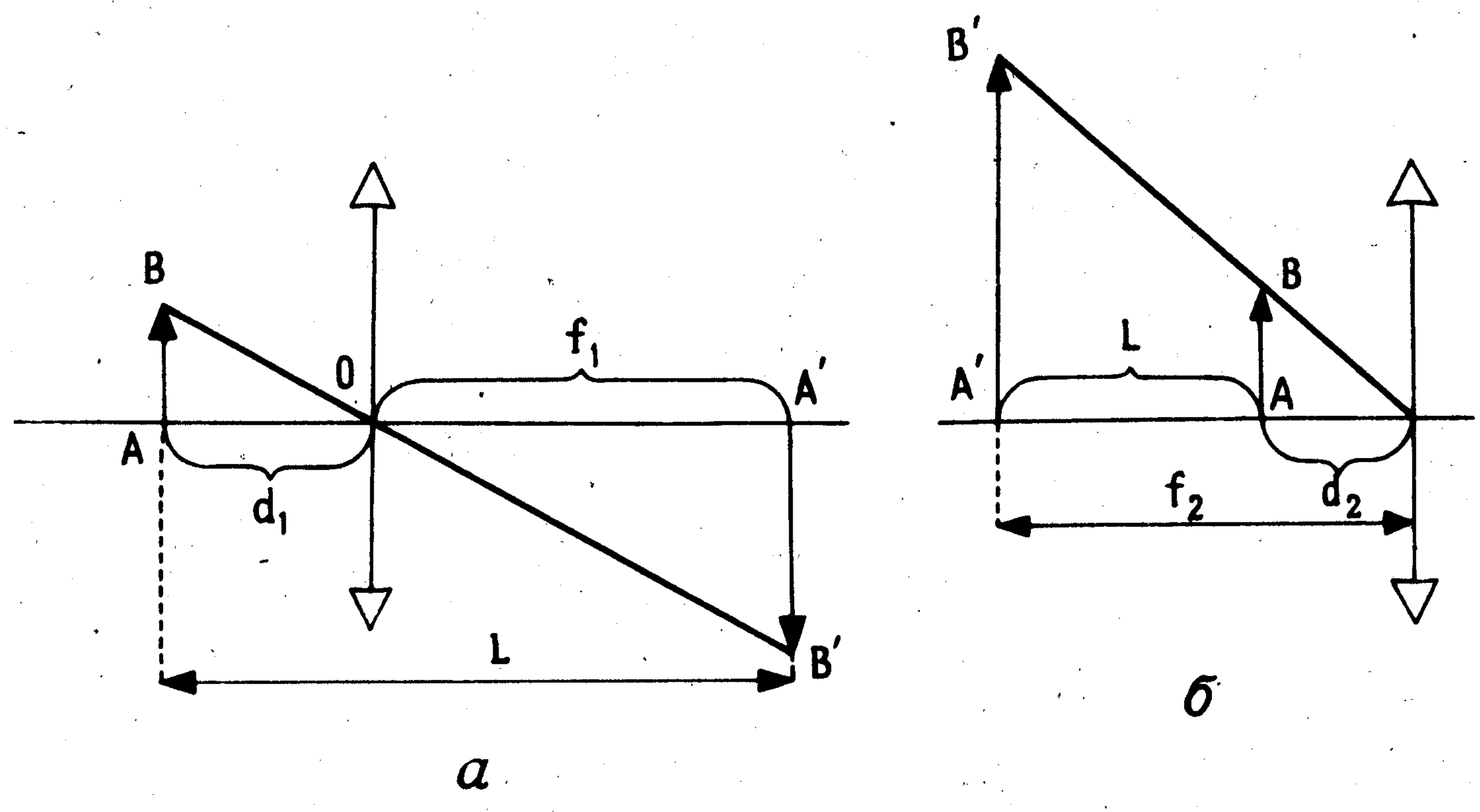


Рис. 5.23.

откуда $d_2 = 0,36$ м и $f_2 = 1,08$ м. Из формулы линзы найдем ее фокусное расстояние:

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{d_2} - \frac{1}{f_2},$$

$$F = \frac{f_2 d_2}{f_2 - d_2} = \frac{1,08 \cdot 0,36}{1,08 - 0,36}\,\text{м} = 0,54\,\text{м}.$$

Задача 8. Тонкая линза с некоторым фокусным расстоянием F_1 создает прямое изображение предмета с увеличением $\Gamma_1 = 2/3$. Каково будет увеличение Γ_2, если, не изменяя расстояние между предметом и линзой, заменить линзу на рассеивающую с оптической силой $D_2 = -D_1$.

Дано: F_1, $\Gamma_1 = 2/3$, $D_2 = -D_1$; Γ_2 — ?

Решение. В первом случае было получено уменьшенное прямое изображение. Очевидно, что такое изображение можно получить только в рассеивающей линзе. Предмет находится между фокусом и оптическим центром, так как увеличение больше 1/2. В этом случае формула линзы имеет вид

$$-\frac{1}{F_1} = \frac{1}{d} - \frac{1}{f_1};$$

увеличение равно $\Gamma_1 = f_1/d$, откуда $f_1 = d\Gamma_1$. При замене линзы на собирающую ($D_2 = -D_1$) формула линзы имеет вид

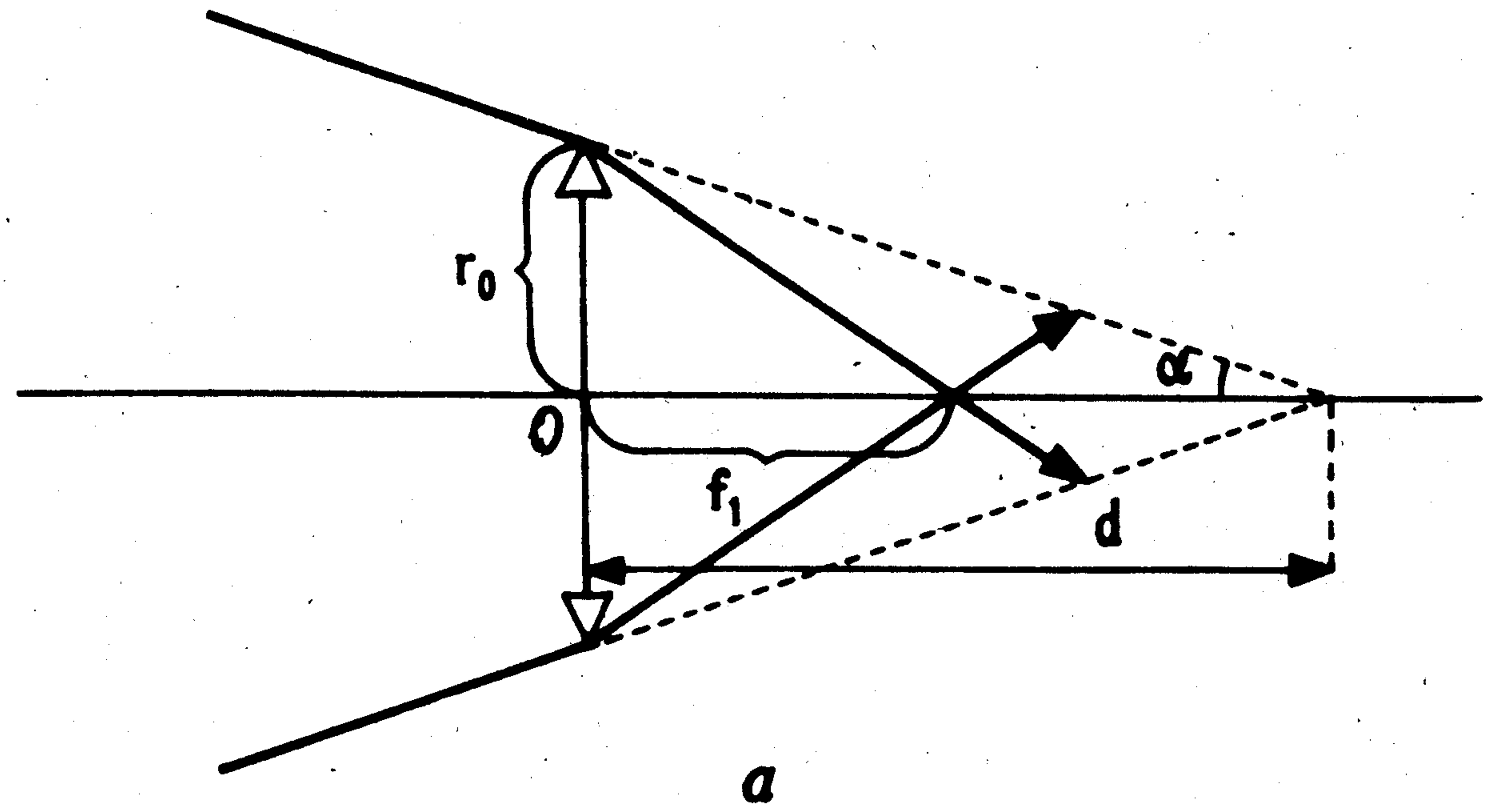
$$\frac{1}{F_2} = \frac{1}{d} - \frac{1}{f_2},$$

$$\Gamma_2 = f_2/d, \quad f_2 = d\Gamma_2.$$

Приравняв правые части формул линзы и учитывая минус, получим

$$\frac{1}{d} - \frac{1}{d\Gamma_1} = \frac{1}{d\Gamma_2} - \frac{1}{d},$$

$$2 = \frac{1}{\Gamma_1} + \frac{1}{\Gamma_2}, \quad \Gamma_2 = \frac{1}{2 - 1/\Gamma_1} = \frac{\Gamma_1}{2\Gamma_1 - 1},$$



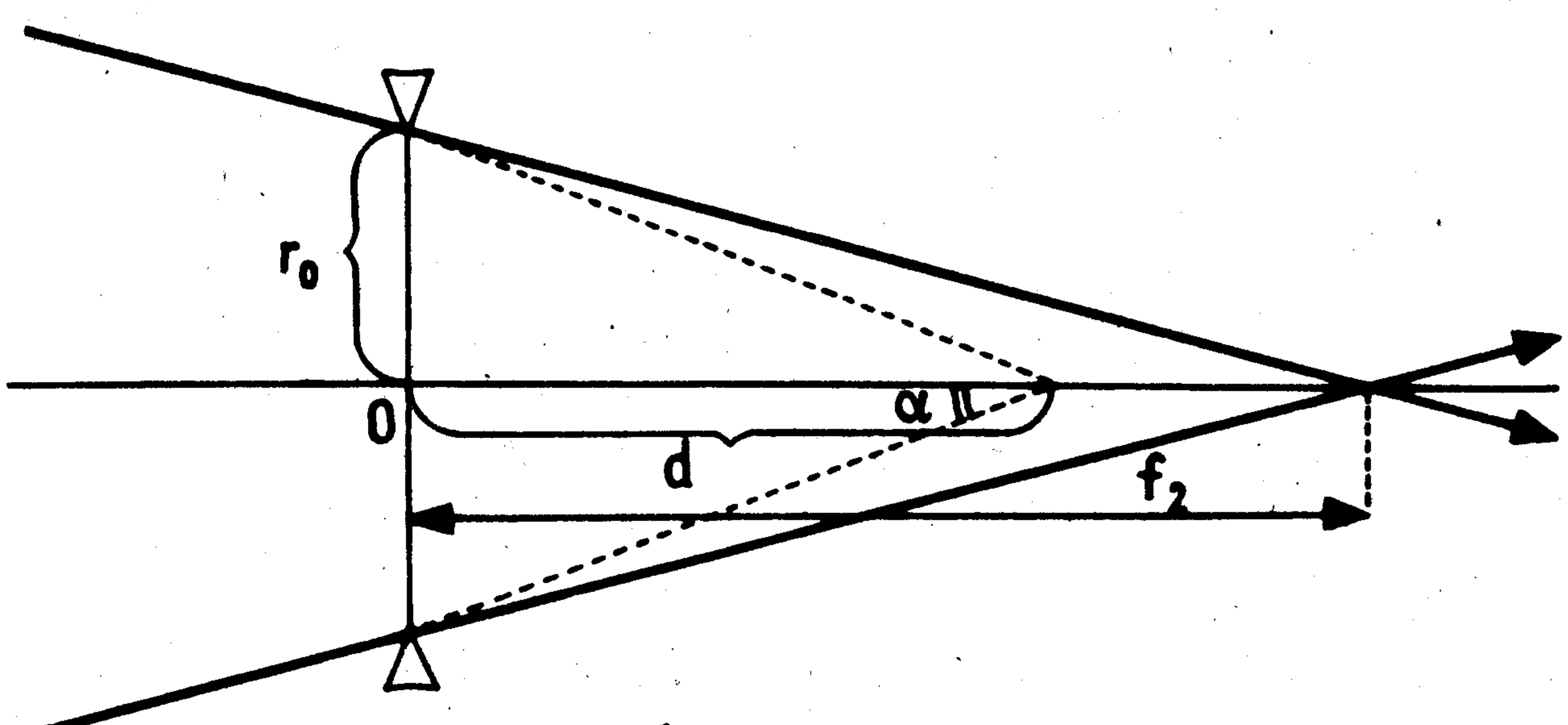


Рис. 5.24.

$$\Gamma_2 = \frac{2}{3(4/3-1)} = 2.$$

Задача 9. На экран с круглым отверстием радиуса 10 см падает сходящийся пучок света. Угол между крайним лучом и осью симметрии равен 30°. Определите точку, в которой будут сходиться лучи, если в отверстие вставляется 1) собирающая (рис. 5.24,*а*) 2) рассеивающая (рис. 5.24,*б*) линзы. $D_1 = -D_2 = 10$ дп.

Дано: $D_1 = -D_2 = 10$ дп, $\alpha = 30°$, $r_0 = 10$ см (0,1 м); f_1 — ? f_2 — ?

Решение. В данном случае источник является мнимым, находящимся на расстоянии $d = r_0 \mathrm{ctg}\alpha = r_0/\sqrt{3}$. Формула линзы в первом случае имеет вид.

$$D_1 = \frac{1}{F_1} = -\frac{1}{d} + \frac{1}{f_1},$$

где f_1 — расстояние от линзы до точки пересечения лучей, преломленных в линзе, откуда

$$f_1 = \frac{F_1 d}{d + F_1} = \frac{F_1 r_0/\sqrt{3}}{r_0/\sqrt{3} + F_1}.$$

Во втором случае формула линзы имеет вид

$$D_2 = -\frac{1}{F_2} = -\frac{1}{d} + \frac{1}{f_2},$$

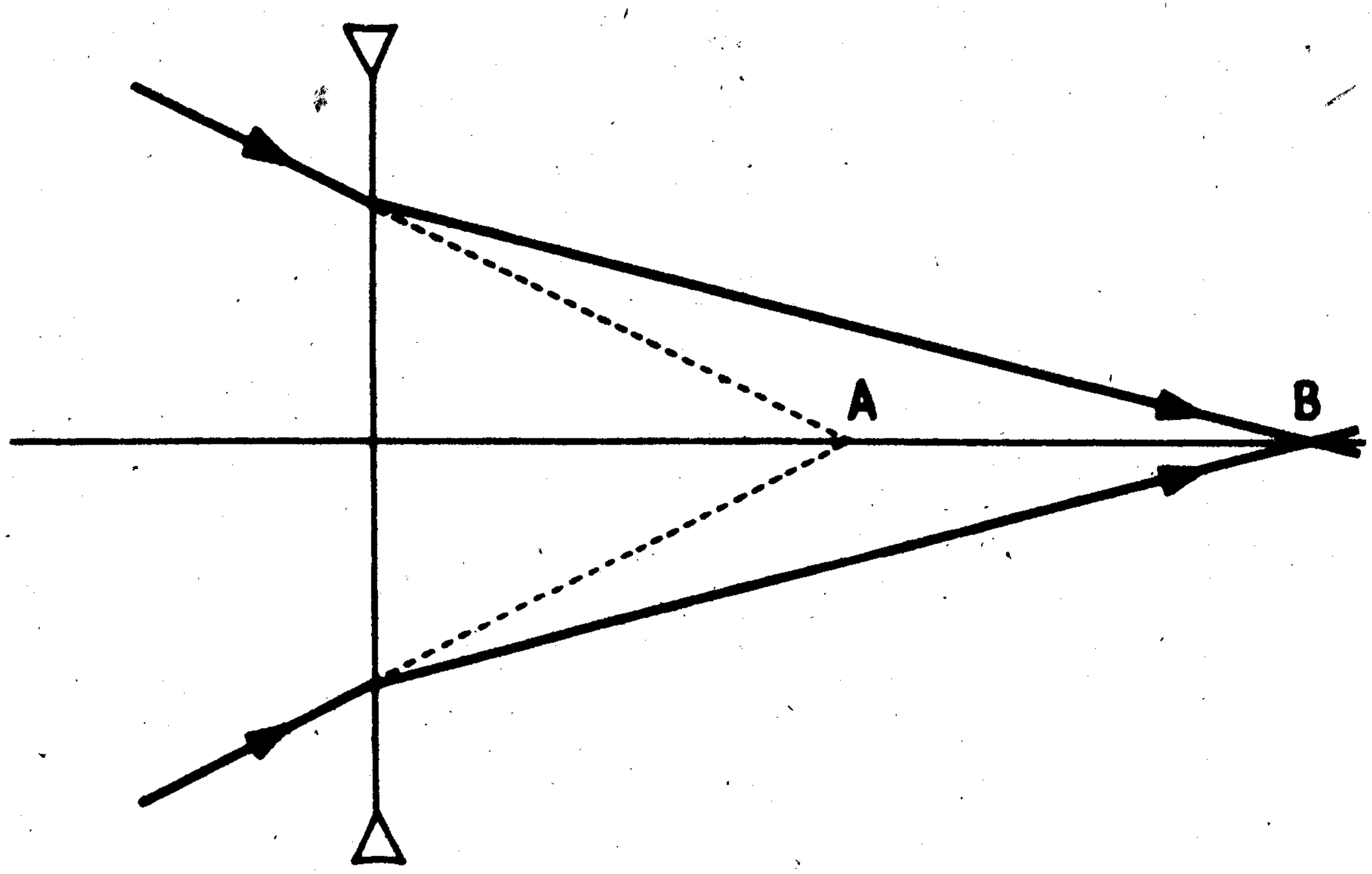


Рис. 5.25.

$$F_1 = F_2, \quad f_2 = \frac{F_2 d}{F_2 - d} = \frac{F_2 r_0/\sqrt{3}}{F_2 - r_0/\sqrt{3}}.$$

Подставив численные значения, получим $f_1 = 5,9 \cdot 10^{-2}$ м, $f_2 = 1,43 \cdot 10^{-1}$ м. Из вычислений и из построения изображений ясно, что точка пересечения лучей в первом случае станет ближе к экрану, во втором—дальше от экрана.

Задача 10. Сходящийся пучок лучей падает на рассеивающую линзу таким образом, что продолжения всех лучей пересекаются в точке, лежащей на главной оптической оси линзы на расстоянии 15 см от нее. Найти фокусное расстояние линзы, если продолжения преломленных лучей пересекаются в точке, находящейся за линзой на расстоянии 60 см от нее (рис. 5.25).

Дано: $d = 15$ см (0,15 м), $f = 60$ см (0,6 м); F — ?

Решение. Вершина конуса A, образованная пучком сходящихся лучей, служит мнимым источником (рис. 5.25). Точка B является действительным изображением точки A. Запишем формулу линзы:

$$-\frac{1}{F} = -\frac{1}{d} + \frac{1}{f},$$

откуда

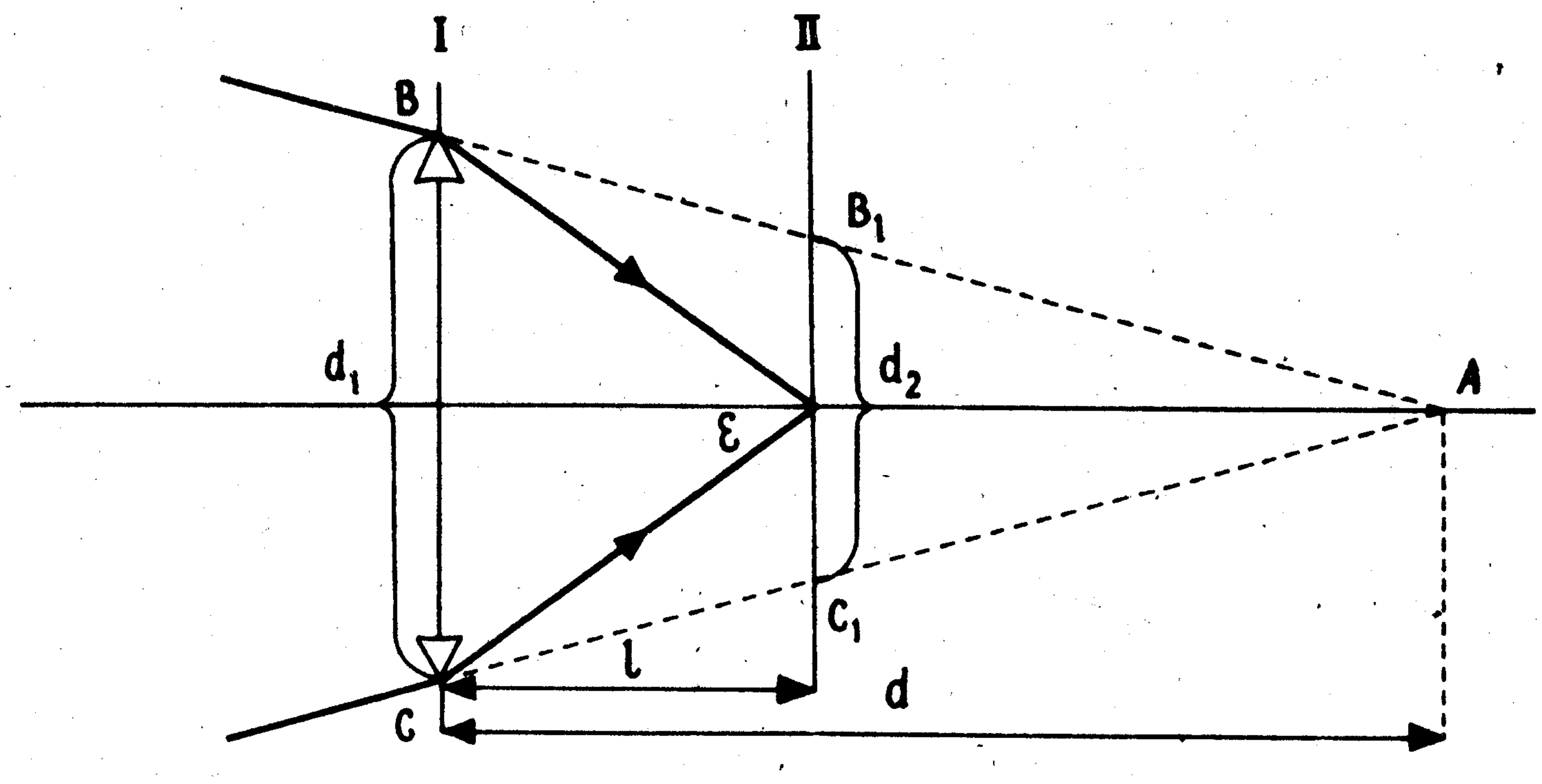
$$F = \frac{df}{f - d} = \frac{0,15 \cdot 0,6}{0,6 - 0,15}\,\text{м} = 0,2\,\text{м}.$$

(Знак минус в формуле линзы был поставлен с учетом того, что линза рассеивающая.)

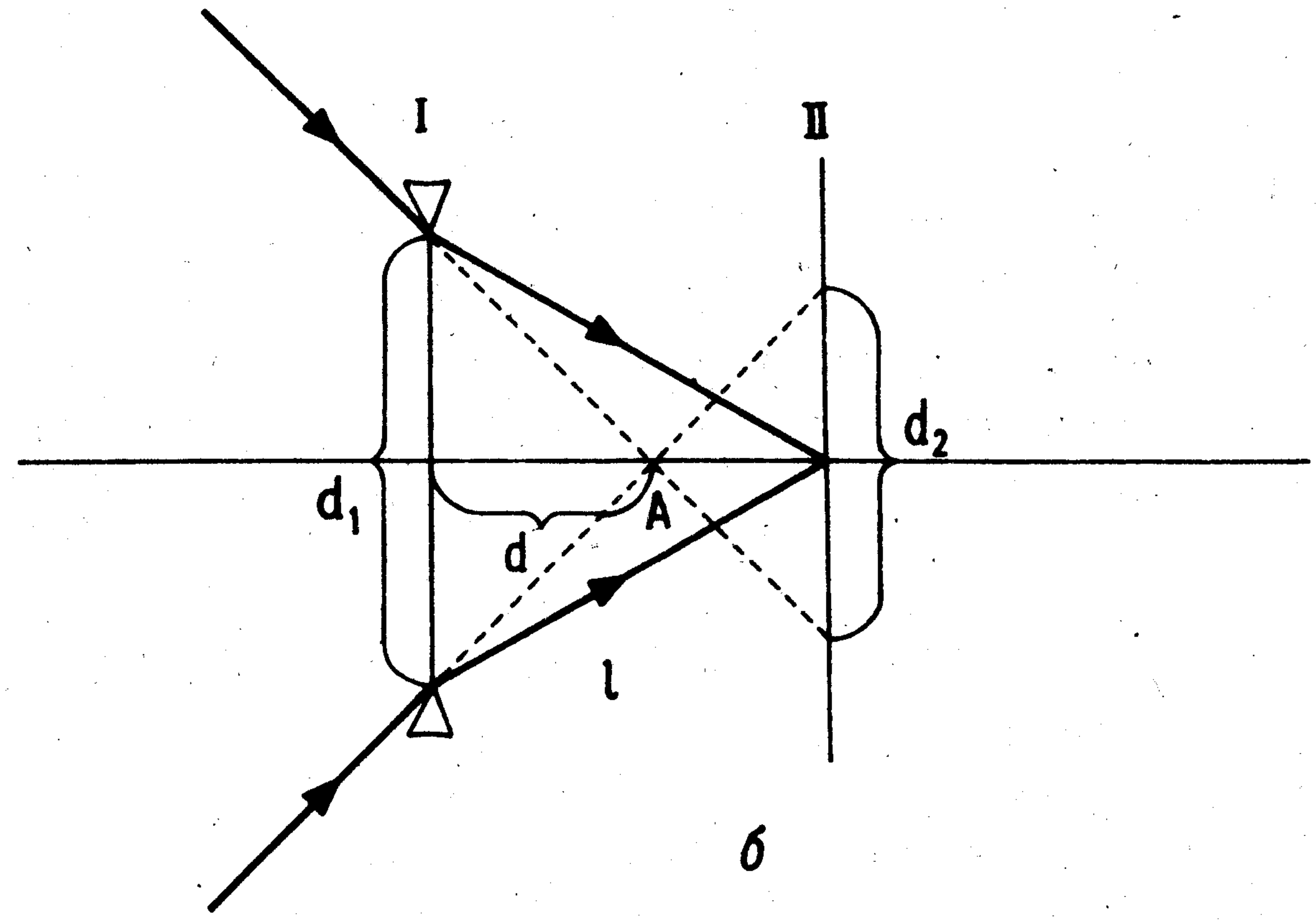
Задача 11. Сходящийся пучок, проходящий через отверстие диаметром 6 см в непрозрачном экране I, дает на экране II, находящемся за экраном I на расстоянии 50 см, светлое пятно диаметром 3 см. После того как в отверстие экрана I поместили линзу, пятно превратилось в точку. Найти фокусное расстояние линзы.

Дано: $d_1 = 6$ см (0,06 м), $d_2 = 3$ см (0,03 м), $l = 50$ см (0,5 м); F — ?

Решение. Пучок лучей в отсутствие линзы сходится в точке A, которая может лежать как 1) позади, так и 2) перед экраном (рис. 5.26). Рассмотрим



а



б

Рис. 5.26.

первый случай. Поскольку вставленная линза улучшает сходимость лучей, следовательно, линза собирающая. Из подобия треугольников ABC и AB_1C_1 можно записать:

$$\frac{d_1}{d} = \frac{d_2}{d-l}, \quad \text{или} \quad d = \frac{ld_1}{d_1 - d_2}. \tag{5.8}$$

Точка A является мнимым источником. Когда в отверстие экрана I вставлена линза, изображение получается действительным на расстоянии $f = l$ от линзы:

$$\frac{1}{F} = -\frac{1}{d} + \frac{1}{l}.$$

Подставим выражение (5.8) для d в формулу линзы:

$$F = \frac{dl}{d-l} = \frac{ld_1}{d_2} = \frac{0,5 \cdot 0,06}{0,03}\,\text{м} = 1\,\text{м}.$$

Во втором случае

$$\frac{d_1}{d} = \frac{d_2}{d-l}, \quad d = \frac{ld_1}{d_1 + d_2},$$

$$\frac{1}{F} = -\frac{1}{d} + \frac{1}{l},$$

откуда

$$F = \frac{dl}{d-l} = -\frac{ld_1}{d_2} = -1\,\text{м},$$

т. е. в отверстие нужно поместить рассеивающую линзу.

Задача 12. Собирающая линза, радиусы кривизны поверхностей которой $R_1 = 15$ см и $R_2 = 25$ см, дает действительное изображение предмета на расстоянии 50 см от линзы, если предмет находится на расстоянии 0,25 м от линзы. Найти показатель преломления материала линзы и ее оптическую силу. Линза находится в воздухе.

Дано: $R_1 = 15$ см (0,15 м), $R_2 = 25$ см (0,25 м), $d = 0,25$ м, $f = 50$ см (0,5 м); n — ? D — ?

Решение. Найдем фокусное расстояние линзы, используя формулу линзы:

$$F = \frac{df}{f+d}.$$

С другой стороны, зная геометрию линзы, можно записать

$$\frac{1}{F} = \left(\frac{n_\text{л}}{n_\text{ср}} - 1\right)\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right).$$

Оптическая сила линзы

$$D = \frac{1}{F} = \frac{f+d}{df}, \quad D = \frac{0,5+0,25}{0,5 \cdot 0,25}\,\text{дп} = 6\,\text{дп}.$$

Приравнивая выражения для $1/F$, получим

$$n_\text{л} = n_\text{ср}\left[1 + \frac{(f+d)R_1R_2}{df(R_1+R_2)}\right],$$

$$n_\text{л} = 1\left[1 + \frac{(0,5+0,25)\cdot 0,15 \cdot 0,25}{0,5 \cdot 0,25 \cdot (0,15+0,25)}\right] = 1,56.$$

Задача 13. В фокусе собирающей линзы находится предмет. Постройте изображение предмета, если за линзой перпендикулярно главной оптической оси находится плоское зеркало.

Решение. От каждой точки предмета идут лучи, которые после преломления образуют параллельные потоки. После отражения от зеркала каждый из параллельных потоков, снова пройдя через линзу, собирается в некоторой точке фокальной плоскости (рис. 5.27). Например, луч AB после преломления идет через фокус и падает на зеркало в точке C. Поскольку $\alpha = \beta$, луч, отражаясь, идет к линзе по CD. Проведя побочную оптическую ось, найдем точку A' пересечения преломленного луча CD с фокальной плоскостью. В эту же точку попадет луч AO, отразившись от зеркала и преломившись в линзе. Треугольник AOA' равнобедренный. Следовательно, линейные размеры изображения равны размерам предмета.

Задача 14. Собирающая линза с фокусным расстоянием $F = 20$ см состоит из двух половинок (рис. 5.28). Определить расстояние между изображениями точечного источника, если половинки раздвинуть

1) на расстояние $d_0 = 1$ см перпендикулярно главной оптической оси,

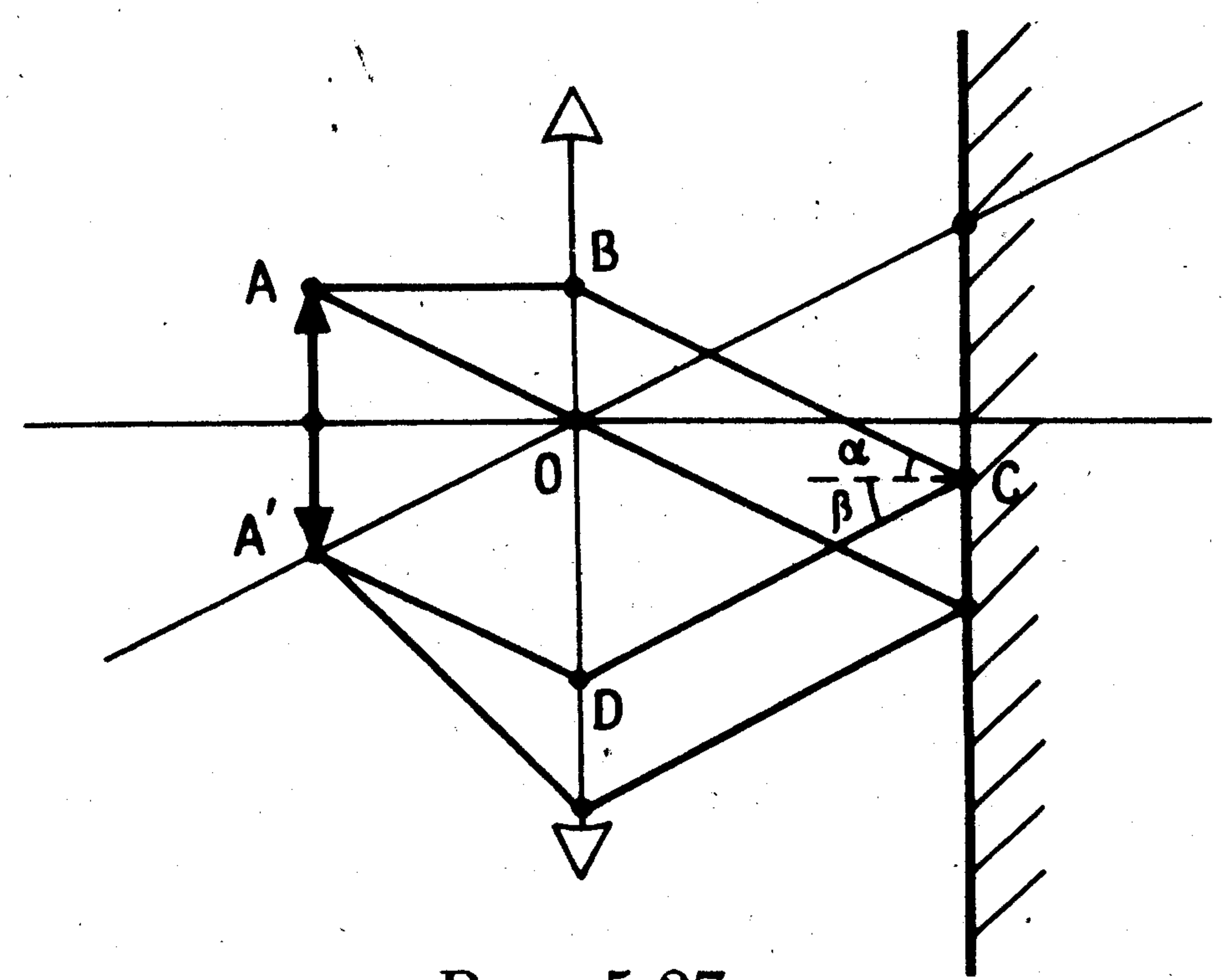


Рис. 5.27.

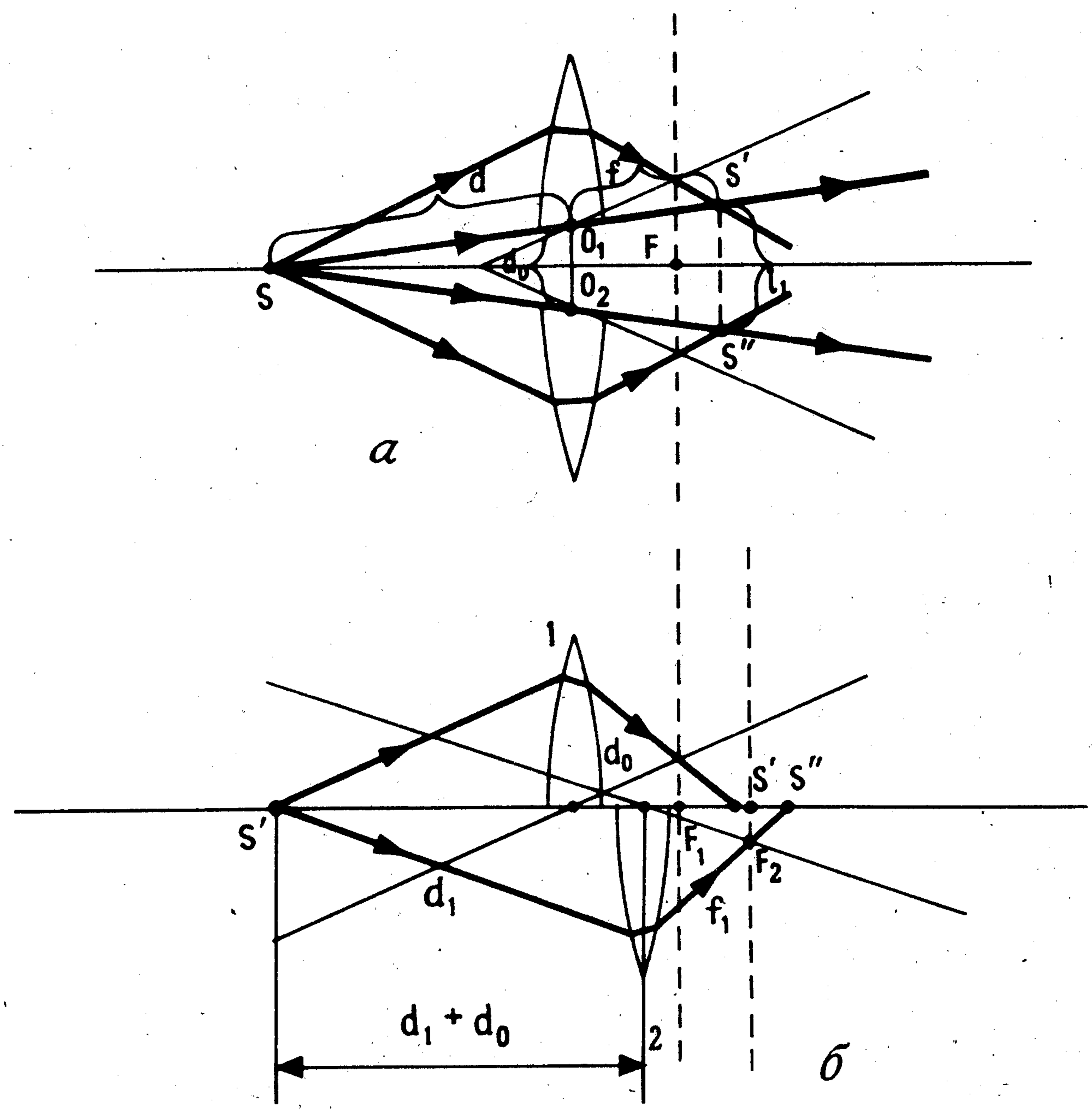


Рис. 5.28.

2) на то же расстояние одна из половинок линзы сдвигается от источника вдоль оптической оси,

3) не раздвигая линзу, закрыть ее среднюю часть непрозрачным экраном диаметром d_0.

Источник расположен на расстоянии $d = 75$ см от линзы.

Дано: $F = 20$ см (0,2 м), $d = 75$ см (0,75 м), $d_0 = 1$ см (0,01 м); l_1, l_2, l_3 — ?

Решение. Положение изображения не зависит от того, получается ли оно с помощью целой линзы или ее части. В первом случае получим два изображения источника, смещенного относительно главной оптической оси. У каждой половинки линзы будет своя главная оптическая ось. Построение изображений представлено на рис. 5.28,*а*. Из подобия треугольников O_1SO_2 и $S'SS''$ следует:

$$\frac{l_1}{d_0} = \frac{d+f}{d},$$

откуда

$$l_1 = d_0\frac{d+f}{d}.$$

Расстояние f найдем из формулы линзы

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{d} + \frac{1}{f},$$

$$f = \frac{dF}{d-F}.$$

окончательно получим

$$l_1 = d_0\frac{d + dF/(d-F)}{d} = d_0d/(d-F).$$

Во втором случае оптическая ось у обеих половинок линзы будет одна и та же, изображения S' и S'' будут смещены относительно друг друга, так как от источника до линз разные расстояния (рис. 5.28,*б*). Формула линзы для определения f_1 и f_2 имеет вид

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{d_1} + \frac{1}{f_1},$$

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{d_1+d_0} + \frac{1}{f_2},$$

откуда

$$f_1 = \frac{Fd_1}{d_1-F}, \quad f_2 = \frac{F(d_1+d_0)}{d_1+d_0-F}.$$

окончательно имеем

$$l_2 = f_2 - f_1 = \frac{F(d_1+d_0)}{d_1+d_0-F} - \frac{Fd_1}{d_1-F} = -\frac{F^2d_0}{(d_1+d_0-F)(d_1-F)}.$$

В третьем случае изображение получается там же, где и в случае открытой линзы, но образует это изображение меньшее число лучей (меньший световой поток) (рис. 5.29), $l_3 = 0$. Подставив численные значения, получим

$$l_1 = \frac{0,01\cdot 0,75}{(0,75-0,2)}\,\text{м} = 0,014\,\text{м},$$

$$l_2 = -\frac{0,04\cdot 0,01}{(0,75+0,01-0,2)(0,75-0,2)}\,\text{м} = -0,0013\,\text{м},$$

$$l_3 = 0.$$

Задача 15. Плоская поверхность плоско-выпуклой линзы посеребрена. Фокусное расстояние линзы 0,3 м. Определите, где будет находиться изображение предмета, расположенного на расстоянии 60 см от линзы.

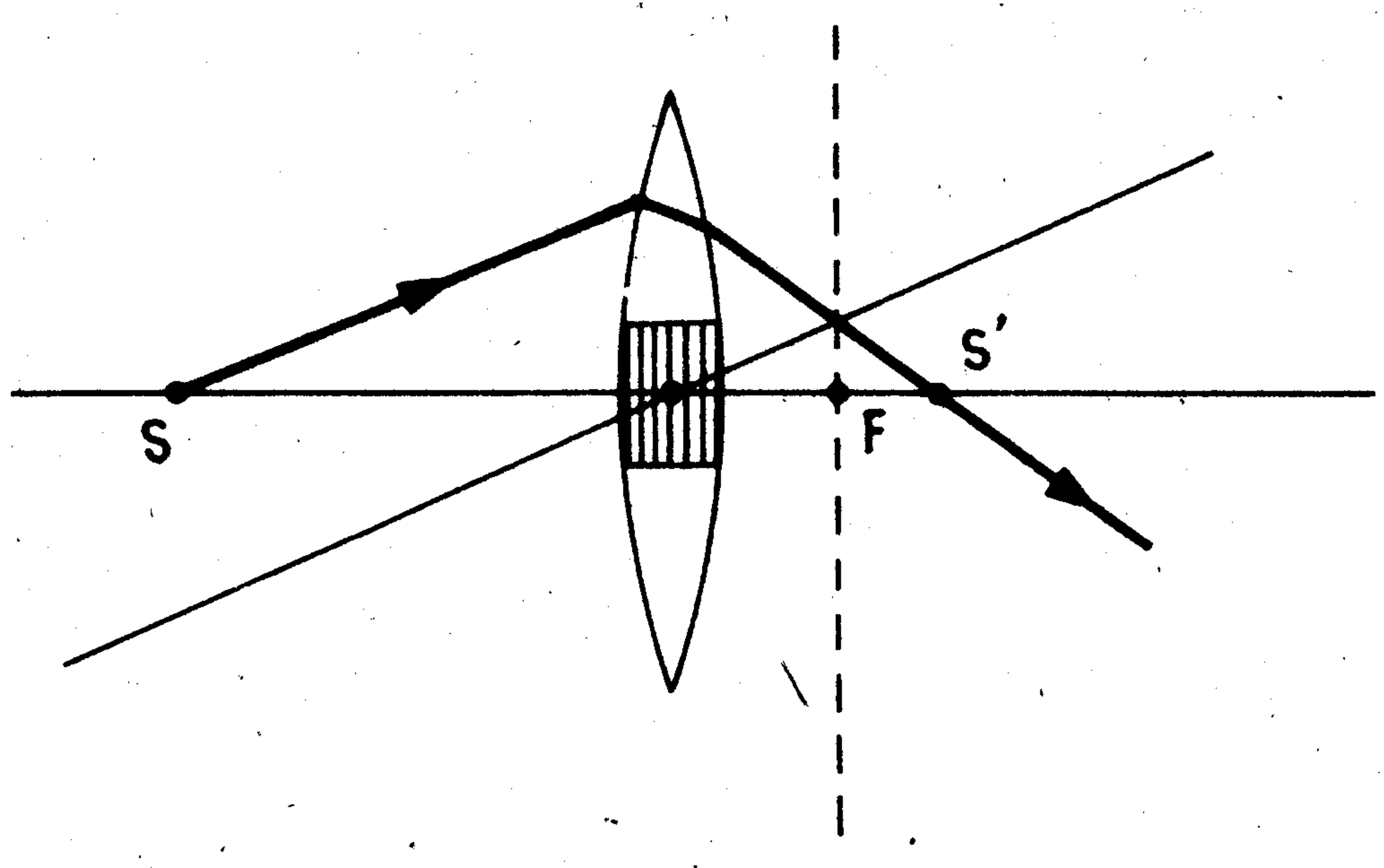


Рис. 5.29.

Дано: $F = 0,3$ м, $d = 60$ см (0,6 м); f — ?

Решение. Лучи, идущие от предмета, испытывают преломление, затем отражаются от зеркала и преломляются второй раз, выходя из линзы (рис. 5.30). Если бы поверхность не была посеребрена, то изображение предмета располагалось бы на расстоянии $2F$ от линзы, что следует из формулы

$$\frac{1}{2F} + \frac{1}{f} = \frac{1}{F}.$$

Для построения изображения берем лучи 1 и 2. Отразившись от зеркальной поверхности, лучи идут так, что, если бы не было линзы, то было бы получено изображение A_2B_2 (A_1B_1 является предметом для зеркала). Лучи 3 и 4 — это лучи, отраженные от поверхности зеркала. Эти лучи преломляются в линзе. Изображение A_2B_2 — мнимый предмет для линзы и окончательно получим действительное изображение A_3B_3. Для определения преломления луча 3 чертим побочную оптическую ось, параллельную этому лучу. Побочная оптическая ось пересечет фокальную плоскость в точке D, в эту же точку, преломившись, попадет луч 3. Луч 4 не изменяет своего направления, так как он проходит через оптический центр линзы. Пересечение лучей 5 и 4 — A_3 — дает изображение точки A.

Тогда по формуле линзы имеем:

$$\frac{1}{F} = -\frac{1}{2F} + \frac{1}{f},$$

откуда

$$f = \frac{2}{3}F, \quad f = 20\,\text{см} = 0,2\,\text{м}.$$

Эту задачу можно решить другим способом. Так как благодаря зеркалу луч два раза преломляется на выпуклой поверхности линзы, можно рассмотреть линзу с двумя преломляющими сферическими поверхностями. Соответственно фокусное расстояние этой линзы F_1 равно

$$\frac{1}{F_1} = \frac{1}{F} + \frac{1}{F} = \frac{2}{F}; \quad F_1 = F/2.$$

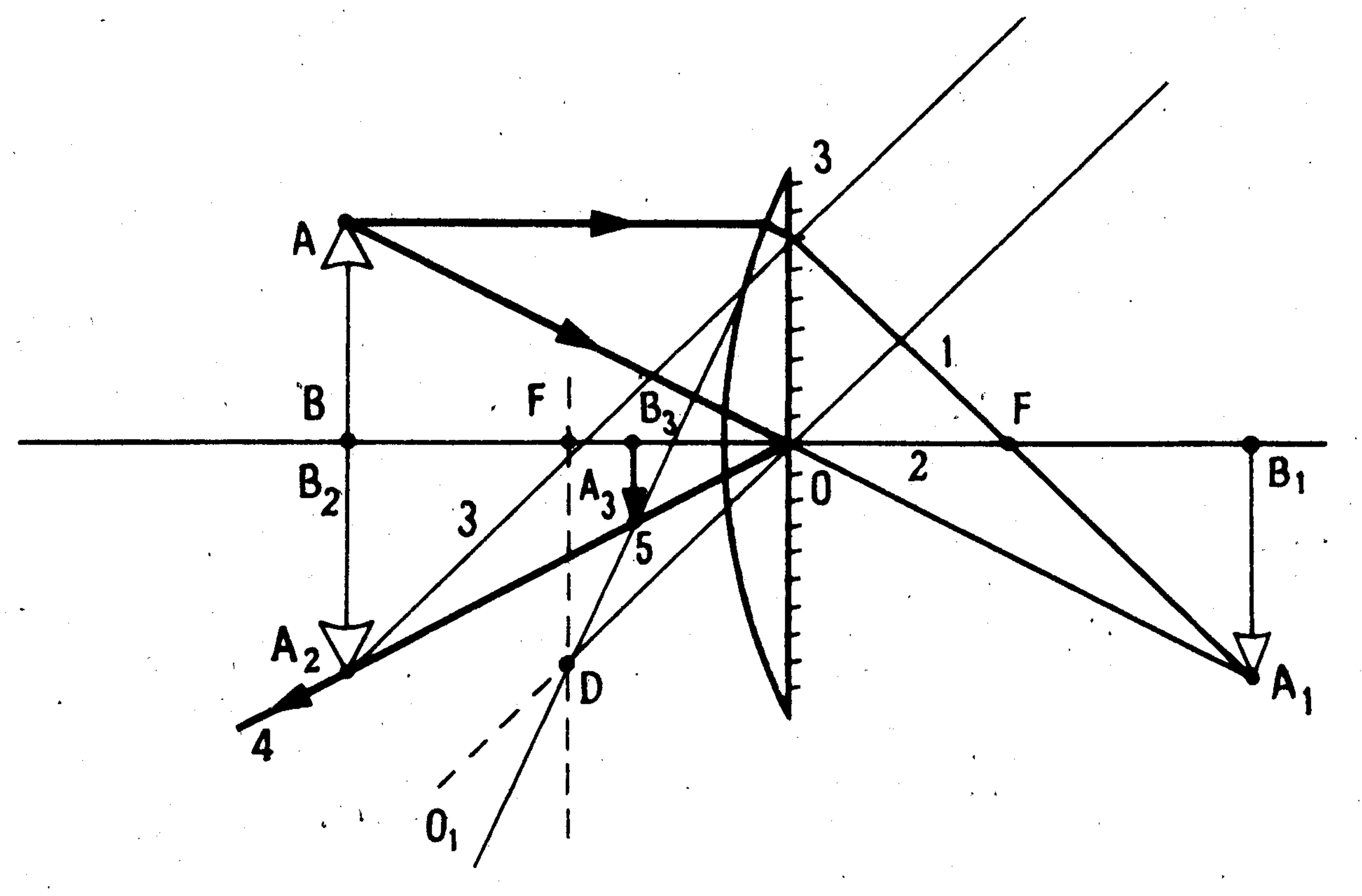


Рис. 5.30.

Тогда по формуле линзы получим

$$\frac{2}{F} = \frac{1}{d} + \frac{1}{f},$$

$$\frac{2}{F} = \frac{1}{2F} + \frac{1}{f},$$

$$f = \frac{2}{3}F.$$

Благодаря зеркалу предмет и его изображение находится слева от линзы.

Задача 16. Построить график зависимости линейного увеличения Г предмета от его расстояния от оптического центра собирающей линзы d.

Решение. Увеличение линзы равно $\Gamma = f/d$.

При $d < F$ изображение мнимое. Из формулы линзы

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{d} - \frac{1}{f}$$

следует

$$\Gamma = F/(F - d).$$

Отсюда ясно, что с приближением d к F увеличение $\Gamma \to \infty$.

При $d > F$ изображение действительное и

$$\Gamma = F/(d - F).$$

Очевидно, что при $d = 2F$ увеличение $\Gamma = 1$. При дальнейшем росте d увеличение Г уменьшается.

На рис. 5.31 изображена эта зависимость.

Задача 17. Автомобиль движется со скоростью $v = 72$ км/ч на расстоянии $d = 500$ м от фотоаппарата. Фокусное расстояние телеобъектива фотоаппарата

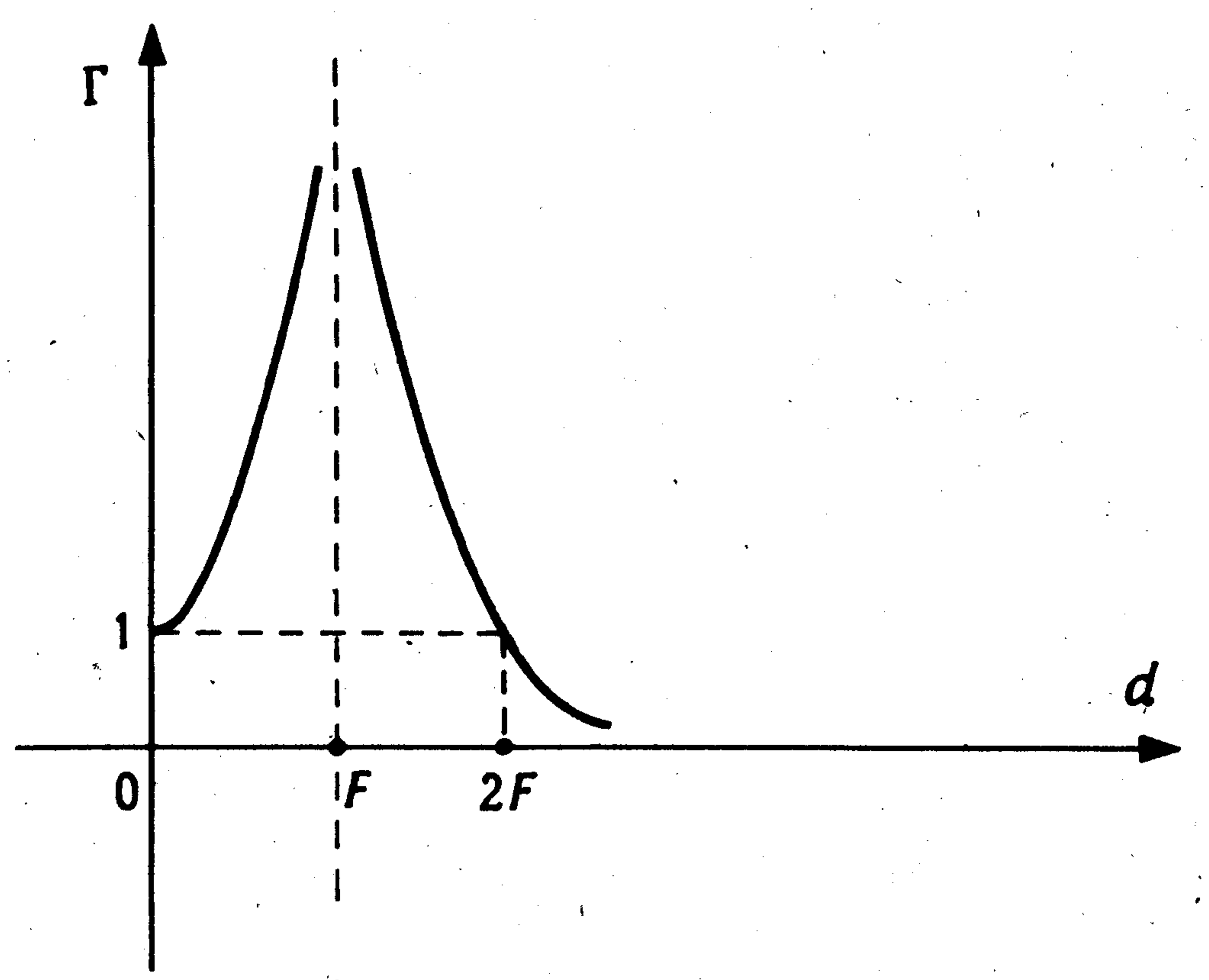


Рис. 5.31.

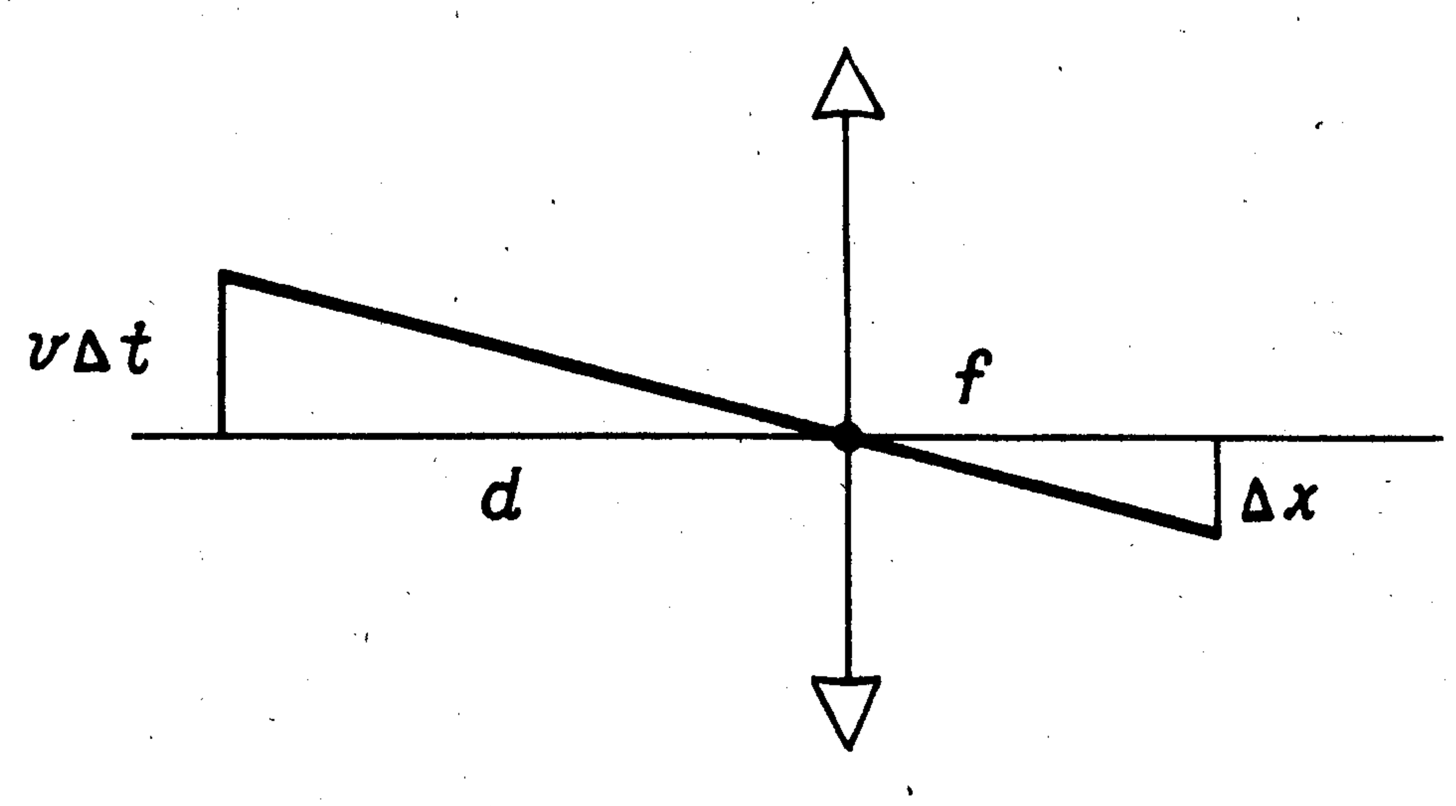


Рис. 5.32.

$F = 50$ см. Какова должна быть экспозиция Δt, чтобы размытость изображения не превышала $\Delta x = 10^{-4}$ м?

Дано: $v = 72$ км/ч (20 м/с), $d = 500$ м, $F = 50$ см (0,5 м), $\Delta x = 10^{-4}$ м; Δt — ?

Решение. За время экспозиции Δt автомобиль переместится на расстояние $v\Delta t$, а его изображение переместится на Δx. Как видно на рис. 5.32,

$$\frac{v\Delta t}{d} = \frac{\Delta x}{f},$$

откуда получаем для времени экспозиции

$$\Delta t = \frac{d\Delta x}{fv}. \tag{5.9}$$

Используя формулу линзы

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{d} + \frac{1}{f},$$

найдем

$$f = \frac{Fd}{d - F}.$$

Подставив выражение для f в (5.9), получим

$$\Delta t = \frac{\Delta x(d-F)}{vF},$$

$$\Delta t = \frac{10^{-4}(500-0,5)}{20 \cdot 0,5}\ \text{с} = 4,995 \cdot 10^{-3}\ \text{с}.$$

Задача 18. Высота изображения предмета на пленке в фотоаппарате при съемке с расстояния $d_1 = 2$ м равна $h_1 = 30$ мм, а при съемке с расстояния $d_2 = 3,9$ м высота $h_2 = 15$ мм. Определить фокусное расстояние F объектива фотоаппарата.

Дано: $d_1 = 2$ м, $h_1 = 30$ мм (0,03 м), $d_2 = 3,9$ м, $h_2 = 15$ мм (0,015 м); F — ?

Решение. Пусть высота предмета H, тогда увеличения в первом и во втором случаях

$$\Gamma_1 = h_1/H, \quad \Gamma_2 = h_2/H. \tag{5.10}$$

Запишем для каждого случая в отдельности формулу линзы:

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{d_1} + \frac{1}{f_1}, \tag{5.11а}$$

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{d_2} + \frac{1}{f_2}. \tag{5.11б}$$

Из выражений (5.10) получим:

$$\frac{h_1}{h_2} = \frac{\Gamma_1}{\Gamma_2} = \frac{f_1/d_1}{f_2/d_2},$$

откуда

$$f_1 = \frac{h_1 d_1}{h_2 d_2} f_2. \tag{5.12}$$

Приравнивая правые части уравнений (5.11а) и (5.11б) и подставляя выражение (5.12) для f_1, получим

$$\frac{h_2 d_2}{h_1 d_1 f_2} + \frac{1}{d_1} = \frac{1}{f_2} + \frac{1}{d_2}. \tag{5.13}$$

Решая уравнение (5.13) относительно f_2, найдем:

$$f_2 = \frac{d_2(h_1 d_1 - h_2 d_2)}{h_1(d_2 - d_1)}. \tag{5.14}$$

И, окончательно, подставив выражение (5.14) для f_2 в (5.11б), получим для F:

$$F = \frac{d_2 f_2}{d_2 + f_2} = \frac{h_1 d_1 - h_2 d_2}{h_1 - h_2},$$

$$F = \frac{0,03 \cdot 2 - 0,015 \cdot 3,9}{0,03 - 0,015}\ \text{м} = 0,1\ \text{м}.$$

Задача 19. Оптическая сила лупы $D = 30$ дп. Расстояние наилучшего зрения $l = 25$ см. Определите увеличение лупы при рассматривании предмета без напряжения зрения.

Дано: $D = 30$ дп, $l = 25$ см (0,25 м); Γ — ?

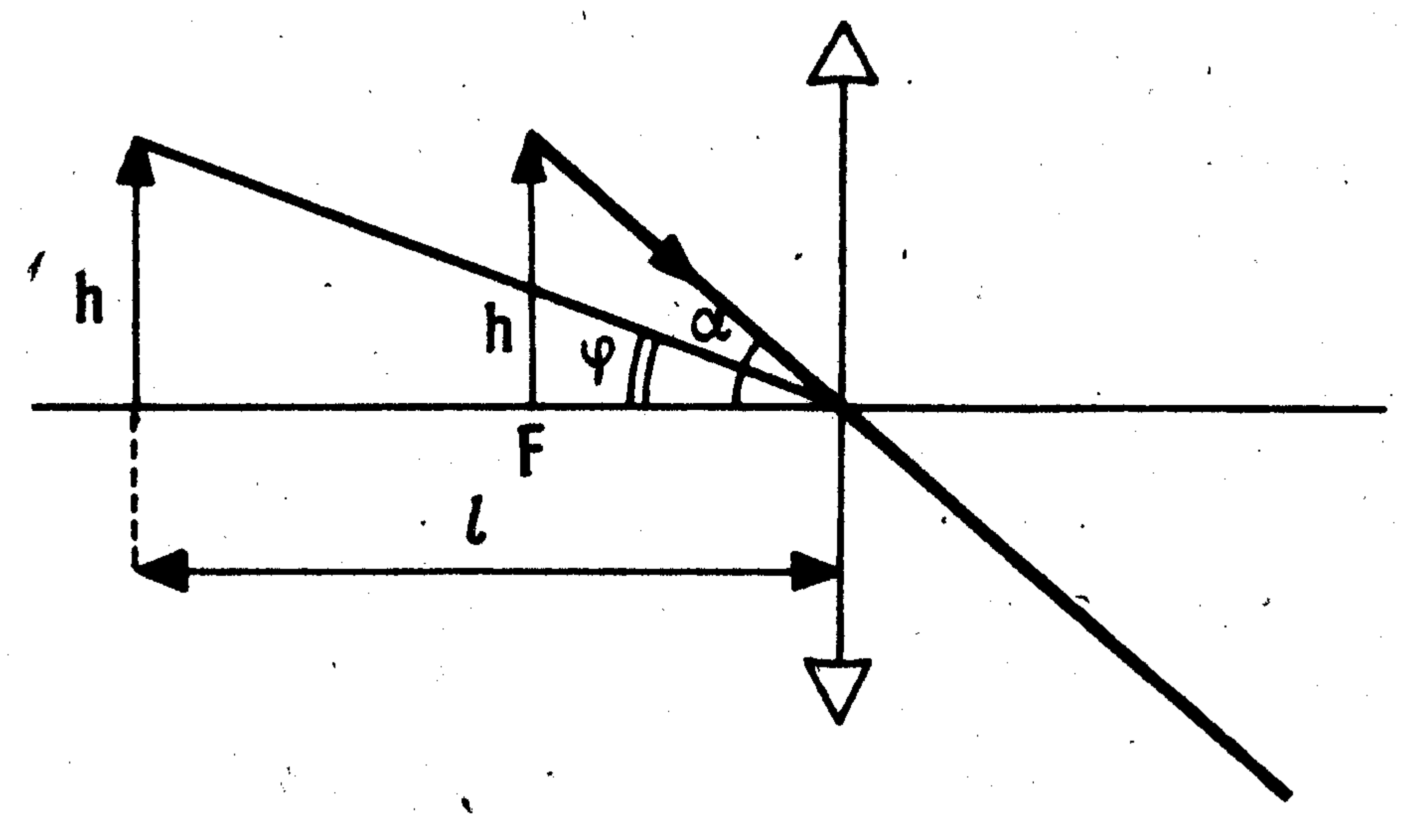


Рис. 5.33.

Решение. Для того, чтобы лучше рассмотреть предмет, надо увеличить угол зрения (для этого предмет подносится ближе к глазам). Минимальное расстояние, на котором глаз обеспечивает четкую фокусировку, называется ***расстоянием наилучшего зрения***. Считается, что это расстояние равно 25 см. Максимальное расстояние, на котором глаз обеспечивает четкую фокусировку, называется ***пределом видения***, это расстояние очень велико, при этом мышцы глаза полностью расслаблены. При рассмотрении предмета с помощью лупы предмет помещают или в фокальной плоскости собирающей линзы (лупы), чтобы мышцы глаза при рассматривании были расслаблены (изображение бесконечно удалено) и глаз аккомодирован на бесконечность, или изображение должно находиться на расстоянии наилучшего зрения, т. е. предмет должен находиться между фокусом и оптическим центром линзы. Из рис. 5.33 следует, что угловое увеличение или просто увеличение лупы равно отношению углов зрения: $\Gamma = \alpha/\varphi$, где $\alpha = h/F$ — угол, под которым предмет виден в лупу. Считаем, что h настолько мало, что $\operatorname{tg}\alpha \approx \alpha$ и $\operatorname{tg}\varphi \approx \varphi$, где $\varphi \approx h/l$ — угол, под которым предмет виден невооруженным глазом. Следовательно,

$$\Gamma = l/F = lD, \quad \Gamma = 0,25 \cdot 30 = 7,5.$$

Задача 20. Определить оптическую силу очков для дальнозоркого человека, чтобы он видел так же, как человек с нормальным зрением. Расстояние наилучшего зрения нормально видящего человека 25 см, дальнозоркого — 1 м.

Дано: $d = 1$ м; D — ?

Решение. Изображение предмета (мнимое прямое), даваемое очками, позволяет рассматривать его на расстоянии наилучшего зрения дальнозоркого человека. При этом сам предмет должен находиться на расстоянии наилучшего зрения человека с нормальным зрением ($d_0 = 0,25$ м). Тогда дальнозоркий человек будет видеть предмет так же, как и человек с нормальным зрением. В этом случае формула линзы имеет вид:

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{d_0} - \frac{1}{d},$$

откуда

$$D = \frac{1}{F} = \frac{d - d_0}{d_0 d} = \frac{1 - 0,25}{0,25 \cdot 1}\,\text{дп} = 3\,\text{дп}.$$

Задача 21. Пределы аккомодации глаза у близорукого человека лежат между 20 и 50 см. Определить, как изменятся эти пределы, если человек наденет очки с оптической силой −2 дп.

Дано: $f_1 = 20$ см (0,2 м), $f_2 = 50$ см (0,5 м), $D = -2$ дп; d_1 — ? d_2 — ?

Решение. У близорукого человека изображение удаленных предметов находится перед сетчаткой глаза, поэтому используются очки с рассеивающими линзами. В очках человек видит только те предметы, изображения которых, даваемые очками, лежат в пределах области аккомодации глаза. Очки дают мнимое прямое изображение. Формула линзы в этом случае имеет вид:

$$D = -\frac{1}{F} = \frac{1}{d_1} - \frac{1}{f_1}, \qquad -\frac{1}{F} = \frac{1}{d_2} - \frac{1}{f_2},$$

откуда

$$d_1 = \frac{Ff_1}{F - f_1}, \quad d_2 = \frac{Ff_2}{F - f_2},$$

$$d_1 = \frac{0,5 \cdot 0,2}{0,5 - 0,2}\,\text{м} = \frac{1}{3}\,\text{м}; \quad d_2 = \frac{0,5 \cdot 0,5}{0,5 - 0,5}\,\text{м} \to \infty.$$

Следовательно, человек может нормально видеть от 0,33 м до бесконечного расстояния.

Оптические системы

Оптическая система может состоять из одних линз или линз и зеркал, в которых последовательно получаются изображения предмета. Изображение, полученное в первой линзе, является предметом для второй линзы. Изображение, построенное второй линзой, в свою очередь является предметом для третьей линзы и т. д.

Пусть две собирающие линзы с фокусными расстояниями F_1 и F_2 с общей оптической осью находятся на расстоянии l друг от друга. Если расстояние от предмета до первой линзы больше ее фокусного расстояния $d > F_1$, то изображение будет находиться на расстоянии $f_1 = dF_1/(d - F_1)$.

Если $l - f_1 > F_2$, то расстояние от изображения до оптического центра второй линзы получим по формуле

$$\frac{1}{F_2} = \frac{1}{l - f_1} + \frac{1}{f_2},$$

откуда

$$f_2 = \frac{(l - f_1)F_2}{l - f_1 - F_2} = \frac{[l - dF_1/(d - F_1)]\,F_2}{l - dF_1/(d - F_1) - F_2} = \\ = \frac{[(d - F_1)l - dF_1]\,F_2}{l(d - F_1) - dF_1 - (d - F_1)F_2}.$$

Если $l = 0$, то

$$f_2 = \frac{dF_1F_2}{d(F_1 + F_2) - F_1F_2}.$$

При $d \to \infty$

$$f_2 = \frac{F_1F_2}{F_1 + F_2}, \quad \frac{1}{f_2} = \frac{1}{F_1} + \frac{1}{F_2},$$

где f_2 — расстояние, на котором собирается параллельный пучок лучей, падающих на оптическую систему. Величина $1/f_2$ определяет оптическую силу системы D, следовательно,

$$D = D_1 + D_2.$$

Оптическая сила нескольких тонких линз, вплотную прилегающих друг к другу, равна алгебраической сумме оптических сил каждой линзы, причем для собирающих линз $D > 0$, для рассеивающих $D < 0$.

Примеры решения задач

Задача 1. Из трех линз, расположенных вплотную друг к другу, составлена плоско-параллельная пластинка. Причем оптическая сила системы первой и второй линз равна 5 дп, системы второй и третьей 4 дп. Найти фокусные расстояния первых трех линз.

Дано: $D_{1,2} = 5$ дп, $D_{2,3} = 4$ дп; F_1, F_2, F_3 — ?

Решение. Оптическая сила системы первой и второй линз равна

$$D_{1,2} = D_1 + D_2. \tag{5.15}$$

Оптическая сила системы второй и третьей линз равна

$$D_{2,3} = D_2 + D_3. \tag{5.16}$$

Поскольку линзы образуют плоско-параллельную пластинку, параллельные лучи, падающие на нее, также выходят параллельным пучком. Следовательно, оптическая сила плоско-параллельной пластинки равна нулю.

С другой стороны, оптическая сила всей системы равна сумме оптических сил каждой линзы и равна нулю:

$$D_1 + D_2 + D_3 = 0. \tag{5.17}$$

Таким образом, имеем систему трех уравнений (5.15) — (5.17) относительно трех неизвестных D_1, D_2 и D_3. Из (5.15) и (5.16) получаем

$$D_1 = D_{1,2} - D_2, \quad D_3 = D_{2,3} - D_2.$$

Подставив в (5.17), получим

$$D_2 = D_{1,2} + D_{2,3}.$$

Тогда $D_1 = -D_{2,3}$, $D_3 = -D_{1,2}$, и окончательно имеем$D_1 = -4$ дп, $D_2 = 9$ дп, $D_3 = -5$ дп. Следовательно, $F_1 = 0,25$ м, $F_2 = 1/9$ м, $F_3 = 0,2$ м.

Задача 2. На рис. 5.34 изображена линза, состоящая из двух собирающих тонких линз. Если оставить только первую линзу, то она дает увеличение предмета $\Gamma_1 = 2$. Если оставить только вторую линзу, то увеличение станет равным $\Gamma_2 = 4$. Расстояние от предмета до линзы не изменяется. Определить увеличение Γ, даваемое обеими линзами, сложенными вместе.

Дано: $\Gamma_1 = 2$, $\Gamma_2 = 4$; Γ — ?

Решение. Увеличение линзы определяется соотношением

$$\Gamma = f/d.$$

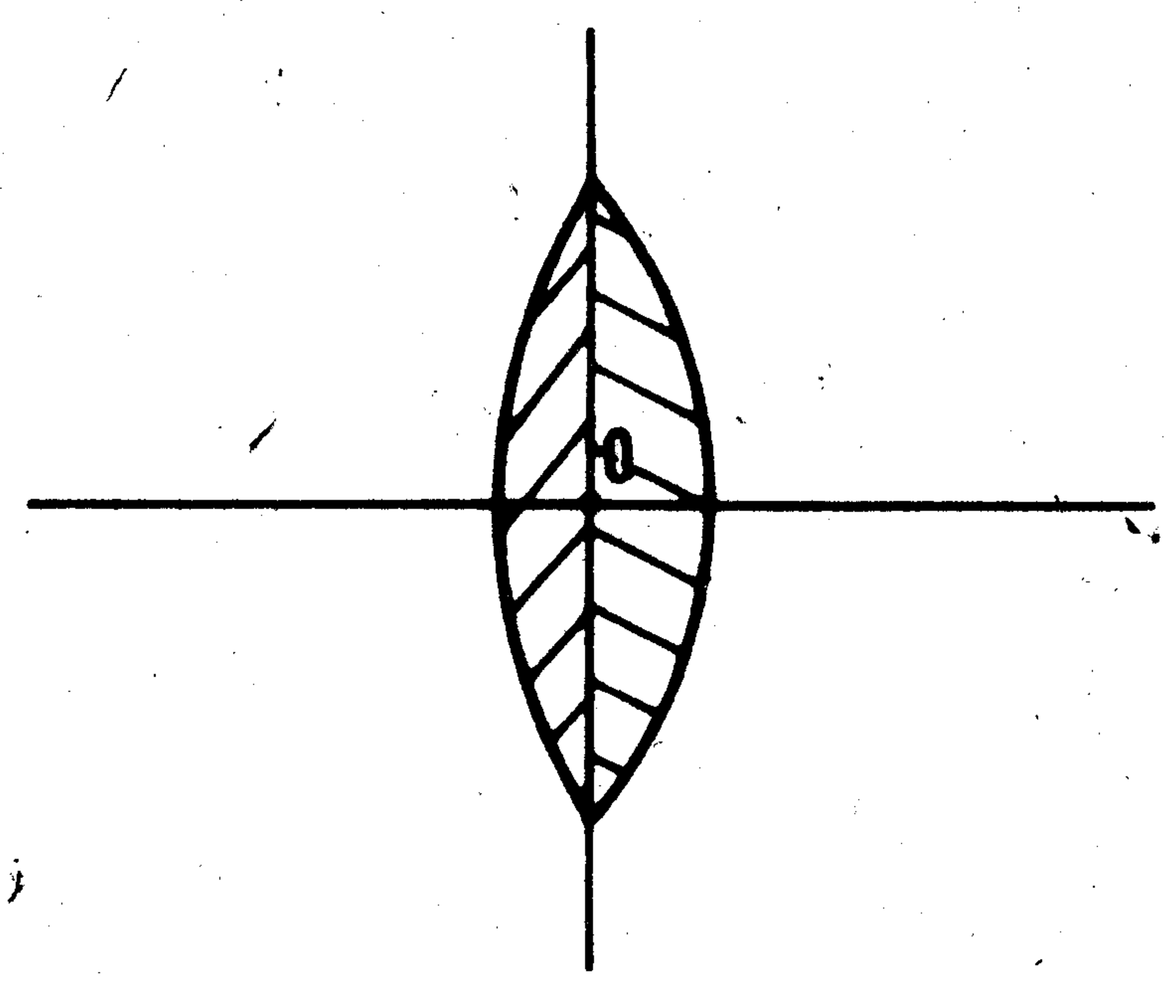


Рис. 5.34.

Формула линзы имеет вид

$$\frac{1}{d}+\frac{1}{f}=\frac{1}{F}=D.$$

Выразив отсюда f, имеем для Г:

$$\frac{1}{\Gamma}=\frac{d}{d/(dD-1)}=dD-1.$$

Тогда

$$\frac{1}{\Gamma_1}=D_1d-1, \quad \frac{1}{\Gamma_2}=D_2d-1.$$

По условию задачи тонкие линзы сложены вместе, поэтому оптическая сила системы этих линз равна $D=D_1+D_2$ и увеличение Г дается выражением

$$\frac{1}{\Gamma}=(D_1+D_2)d-1.$$

Выразим D_1 и D_2 через Γ_1 и Γ_2:

$$D_1=\left(\frac{1}{\Gamma_1}+1\right)\frac{1}{d}, \quad D_2=\left(\frac{1}{\Gamma_2}+1\right)\frac{1}{d},$$

следовательно,

$$\frac{1}{\Gamma}=\frac{1}{\Gamma_1}+\frac{1}{\Gamma_2}+1,$$

$$\frac{1}{\Gamma}=0,5+0,25+1=1,75,$$

$$\Gamma=\frac{1}{1,75}=\frac{4}{7}.$$

Увеличение при неизменном расстоянии d зависит только от оптической силы линзы. Если предмет находится на одинаковом расстоянии от линз с разными оптическими силами ($D_1 > D_2 > D_3 \ldots$) и при этом за фокусом линзы, то увеличение линз будет тем меньше, чем больше оптическая сила линзы ($\Gamma_1 < \Gamma_2 < \Gamma_3 < \ldots$).

Задачи для самостоятельного решения

Задача 1. На стеклянную призму с углом при вершине 30° перпендикулярно боковой грани падает луч света. Определить, на какой угол отклонится луч после выхода из призмы, если показатель преломления стекла 1,5. При каком показателе преломления материала призмы луч не выйдет из призмы?

Ответ: $18,6^\circ$, при $n \geq 2$ луч не выйдет из призмы.

Задача 2. Луч света падает из воздуха на плоско-параллельную стеклянную пластинку с показателем преломления 1,73 под углом 60°. Какова толщина пластинки, если при выходе из нее луч света сместится на 2 см?

Ответ: 3,3 см.

Задача 3. Предмет помещен между двумя взаимно перпендикулярными плоскими зеркалами. Сколько получается изображений? Постройте эти изображения.

Ответ: три.

Задача 4. Луч света из воздуха падает на пластинку так, что преломленный и отраженный лучи взаимно перпендикулярны. Определить угол падения, если показатели преломления материала пластинки 2, воздуха 1.

Ответ: $63^\circ 40'$.

Задача 5. Расстояние в воздухе от лампы до поверхности воды 2,4 м. На глубине 1,8 м в воде под лампой находится водолаз. На каком расстоянии от себя он будет видеть эту лампу? Показатель преломления воды равен 4/3.

Ответ: 5 м.

Задача 6. Луч, отраженный от поверхности стекла с показателем преломления 1,7, образует с преломленным лучом прямой угол. Определить угол падения и угол преломления.

Ответ: 59°, 36°.

Задача 7. На дне водоема глубиной 4 м находится точечный источник света. На поверхности воды плавает круглый диск так, что центр диска находится над источником света. При каком минимальном диаметре диска ни один луч света не выйдет на поверхность воды? Показатель преломления воды равен 4/3.

Ответ: 9,1 м.

Задача 8. Оптическая сила линзы равна 12 дп. Определить расстояние от линзы до предмета, если изображение получается мнимое, прямое и увеличенное в 3 раза.

Ответ: $5,5 \cdot 10^{-2}$ м.

Задача 9. Собирающая линза дает изображение предмета, увеличенное в 4 раза. Экран придвинули к предмету на 20 см, затем переместили линзу так, что изображение предмета на экране получается в натуральную величину. Найти первоначальное расстояние между предметом и экраном.

Ответ: 0,55 м.

Задача 10. От предмета высотой 1 см получили с помощью линзы действительное изображение высотой 6 см. Когда предмет передвинули на 6 см, то получили мнимое изображение высотой 3 см. Определить фокусное расстояние линзы.

Ответ: 0,12 м.

Задача 11. На оптической оси линзы с фокусным расстоянием 20 см помещена светящаяся точка на расстоянии 30 см от линзы.По другую сторону от линзы в ее фокальной плоскости находится экран. Определить диаметр пятна на экране, если диаметр линзы 3 см.

Ответ: 2 см.

Задача 12. Собирающая линза с фокусным расстоянием F дает действительное изображение светящейся точки, расположенной на оптической оси линзы. Найти наименьшее расстояние между точкой и ее изображением.

Ответ: 4.

Задача 13. Два одинаковых предмета, находящихся по одну сторону линзы на расстоянии 60 см друг от друга, изображаются линзой с увеличением 2 и 4 соответственно. Найти расстояние между изображениями предметов.

Ответ: 4,8 м.

Задача 14. Предмет, сфотографированный с расстояния 10 м, получился на пленке высотой 17,9 мм, а с расстояния 6 м—высотой 30 мм. Найти оптическую силу объектива.

Ответ: 12 дп.

Задача 15. На рассеивающую линзу с фокусным расстоянием 0,2 м падает параллельный пучок лучей, направленный параллельно оптической оси линзы. На каком расстоянии от рассеивающей линзы надо поставить собирающую линзу с фокусным расстоянием 0,4 м, чтобы пучок света, пройдя систему линз, остался параллельным?

Ответ: 0,2 м.

Задача 16. Собирающая линза с фокусным расстоянием 20 см находится на расстоянии 10 см от рассеивающей линзы с фокусным расстоянием 60 см. Найти, на каком расстоянии от второй линзы получится изображение точки S, если сама святящаяся точка находится на расстоянии 30 см от первой линзы.

Ответ: 3 м.

Задача 17. С какой выдержкой надо фотографировать бегуна, скорость которого 3 м/с, чтобы размытость изображения не превышала 0,1 мм? Фокусное расстояние объектива 15 см, расстояние от фотоаппарата до бегуна 10 м.

Ответ: $2,2 \cdot 10^{-3}$ с.

Глава 6
Волновая оптика

В этой главе мы рассмотрим явления, доказывающие волновую природу света. Для любого волнового процесса характерны явления *интерференции* и *дифракции*.

Интерференция света

Интерференция света — это явление наложения волн с образованием устойчивой картины максимумов и минимумов. При интерференции света на экране наблюдается чередование светлых и темных полос, если свет *монохроматический* (излучаются электромагнитные волны одной длины волны), или цветных полос, если свет белый или состоит из волн разной длины. При рассмотрении интерференции механических волн мы говорили, что необходимым условием наблюдения интерференционной картины является когерентность волн. Два различных источника света не могут быть когерентны. Свет излучается возбужденными атомами, время излучения атома длится $\sim 10^{-8}$ с, период колебаний, возбуждаемых световой волной, $\sim 10^{-15}$ с. Невозможно согласовать излучение двух атомов одного источника, тем более невозможно согласовать излучение двух разных источников. (Исключение составляют лазеры, так как разность фаз колебаний, возбуждаемых излучением двух лазеров в данной точке, не зависит от времени, а зависит только от расстояния до точки.)

Каждый атом излучает короткий цуг волн, который можно представить как сумму монохроматических волн с начальной фазой, определяемой моментом излучения. Поэтому интерферировать могут лишь волны, испускаемые в одном и том же акте излучения. Для получения интерференционной картины видимого света необходимо разделить излучение от одного источника на два потока, эти потоки направить по двум разным траекториям, а затем соединить их в некоторой области пространства. В этом случае в данной точке пространства будут сходиться волны, излучаемые одной группой атомов, и разность фаз колебаний, возбуждаемых в этой точке этими волнами, будет определяться только разностью хода волн. Например, луч, падающий непосредственно на экран, SA, и луч, отразившийся от зеркала, OA, будут когерентны (рис. 6.1). Разность геометрических длин в данном случае является разностью хода волн

$$\Delta = (SO + OA) - SA.$$

Очевидно, что разность хода волн не должна превышать 3 м. Если $\Delta > 3$ м, то в точке A встречаются волны, излученные разными атомами, так как за время

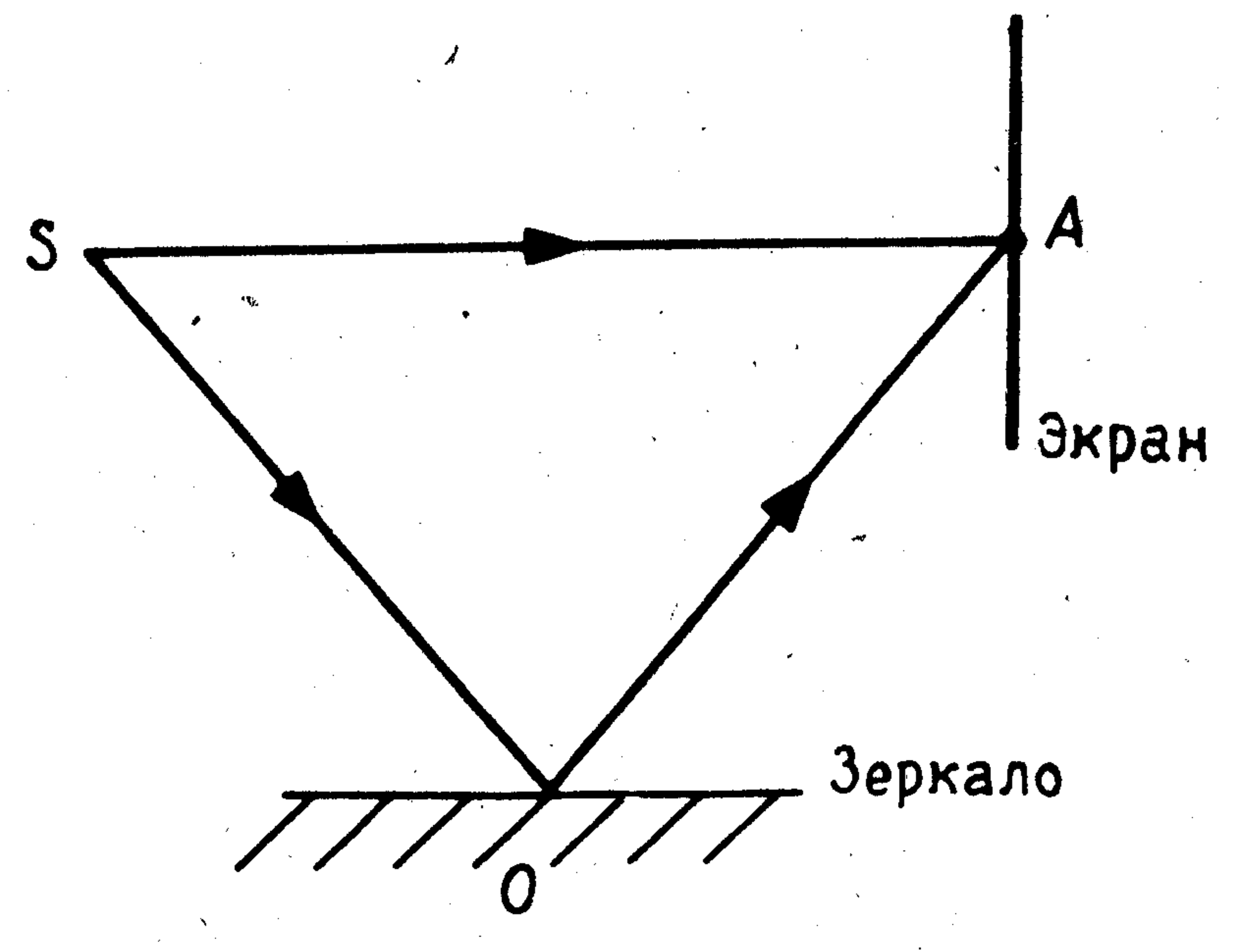


Рис. 6.1.

10^{-8} с одним атомом излучается цуг волн длиной $l = ct = 3$ м, где c — скорость света, равная 300 000 км/с.

Если волны распространяются в среде с показателем преломления n, то длина волны изменяется (задача 4) и в условиях берется оптическая разность хода волн. Для того же примера (рис. 6.1) имеем

$$\Delta = [(SO + OA) - AS]\, n.$$

Если лучи распространяются в различных оптических средах с показателями преломления n_1 и n_2 и проходят расстояния l_1 и l_2, то оптическая разность хода волн равна

$$\Delta = n_1 l_1 - n_2 l_2.$$

Если разность хода волн равна четному числу длин полуволн или целому числу длин волн $\delta = \pm n\lambda$, то в этих точках пространства наблюдаются интерференционные максимумы (яркие полосы). Если же разность хода волн равна нечетному числу длин полуволн $\Delta = \pm(2n+1)\lambda/2$, где $n = 0, 1, 2, \ldots$, то в этих точках пространства наблюдаются интерференционные минимумы (темные полосы).

Если в данной точке пространства накладываются некогерентные волны, то они возбуждают колебания, разность фаз между которыми будет непрерывно изменяться во времени. В результате сложения этих колебаний амплитуда результирующего колебания будет изменяться. В результате глаз зафиксирует среднюю освещенность экрана, равную сумме освещенностей, создаваемых каждым источником в отдельности (интерференции нет).

Дифракция света

Явление огибания волнами препятствий и попадания света в область геометрической тени называется *дифракцией*.

Пусть плоская волна падает на щель в плоском экране AB. Согласно ***принципу Гюйгенса — Френеля***, каждая точка волнового фронта является источником вторичных волн, причем все эти вторичные источники когерентны. Огибающая к фронтам волн от вторичных источников дает положение нового фронта волны. На рис. 6.2 видно, что после прохождения отверстия волны будут распространяться в область геометрической тени. Явление дифракции наблюдается при условии соизмеримости препятствия с длиной волны $\lambda \sim d$. Все вторичные

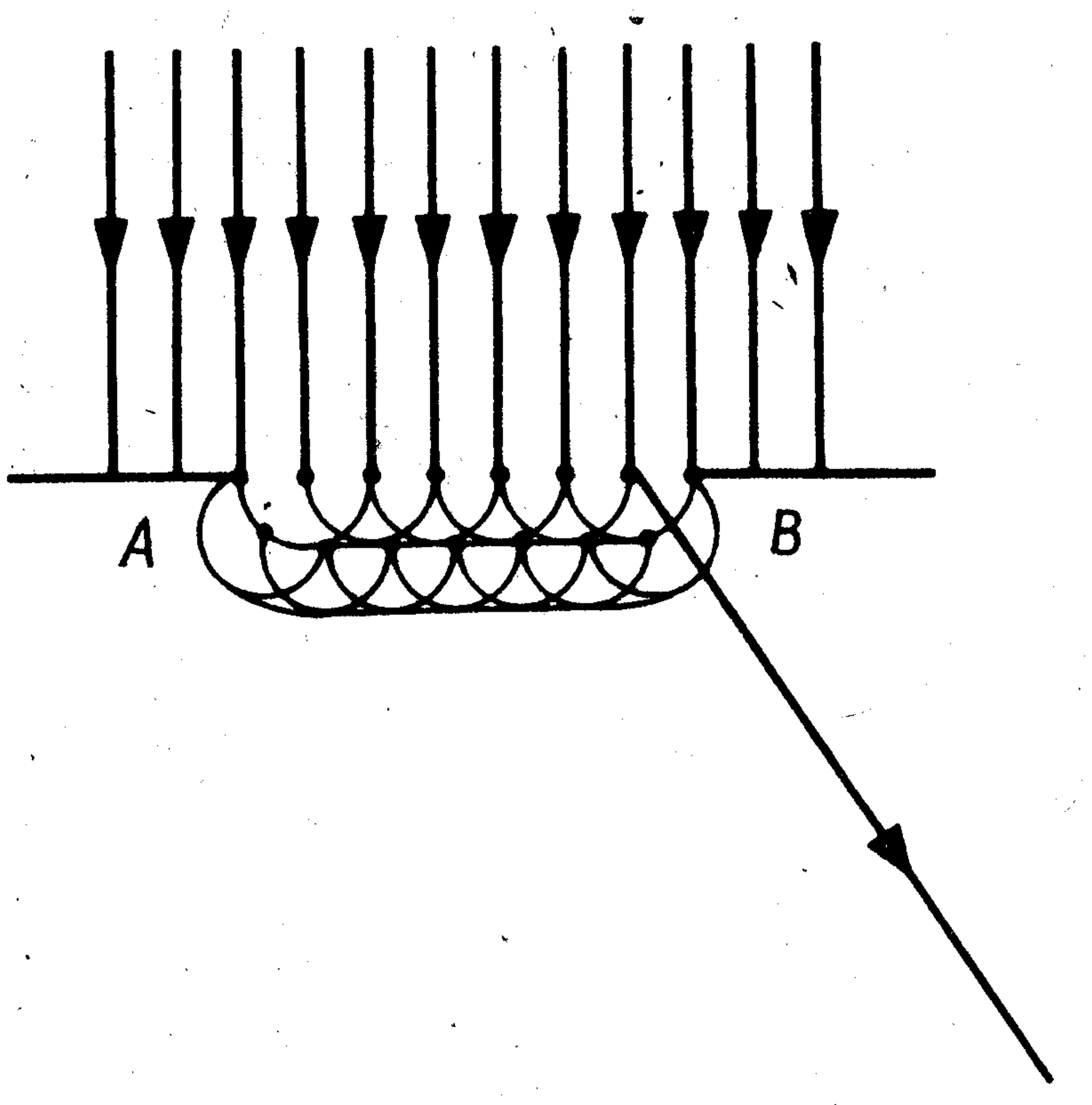


Рис. 6.2.

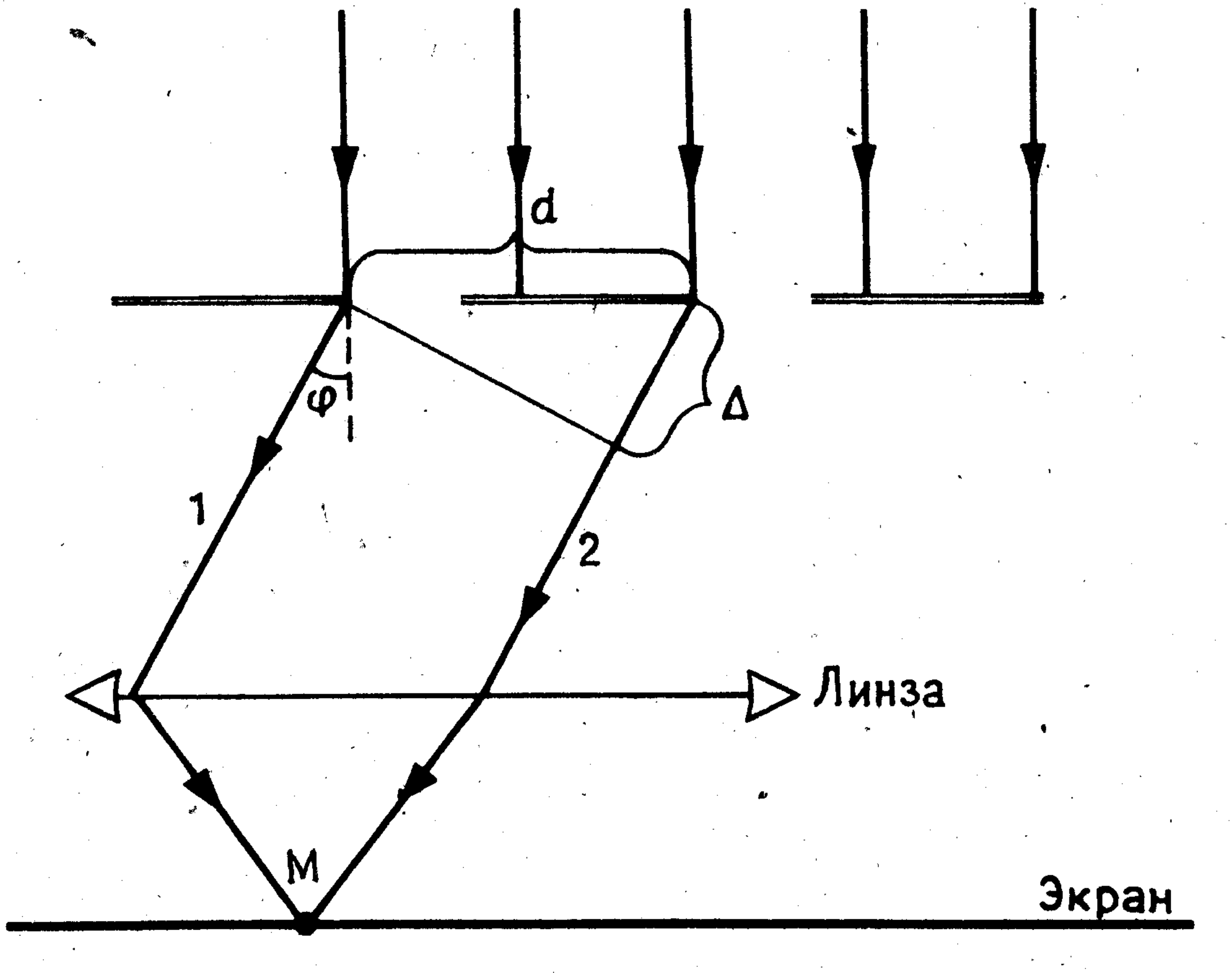


Рис. 6.3.

источники когерентны и распределение интенсивности есть результат интерференции волн, излучаемых вторичными источниками.

Дифракционная решетка состоит из чередующихся прозрачных и непрозрачных полос. Суммарная ширина прозрачной и непрозрачной полос называется периодом дифракционной решетки d.

Так как ширина щелей и непрозрачных полос постоянна, то достаточно рассмотреть интерференцию параллельных пучков от двух соседних щелей.

Пусть на решетку падает плоская волна. Так как $d \sim \lambda$, то лучи начинают отклоняться от первоначального направления распространения. Щели являются когерентными источниками. Рассмотрим два луча от соответствующих точек двух соседних щелей, отклонившиеся на одинаковый угол φ (φ — угол дифракции) (рис. 6.3). Заметим, что угол φ принимает любое значение в пределах $0 \leq \varphi \leq \pi/2$.

Разность хода лучей 1 и 2 равна $\delta = d \sin\varphi$. После дифракционной решетки

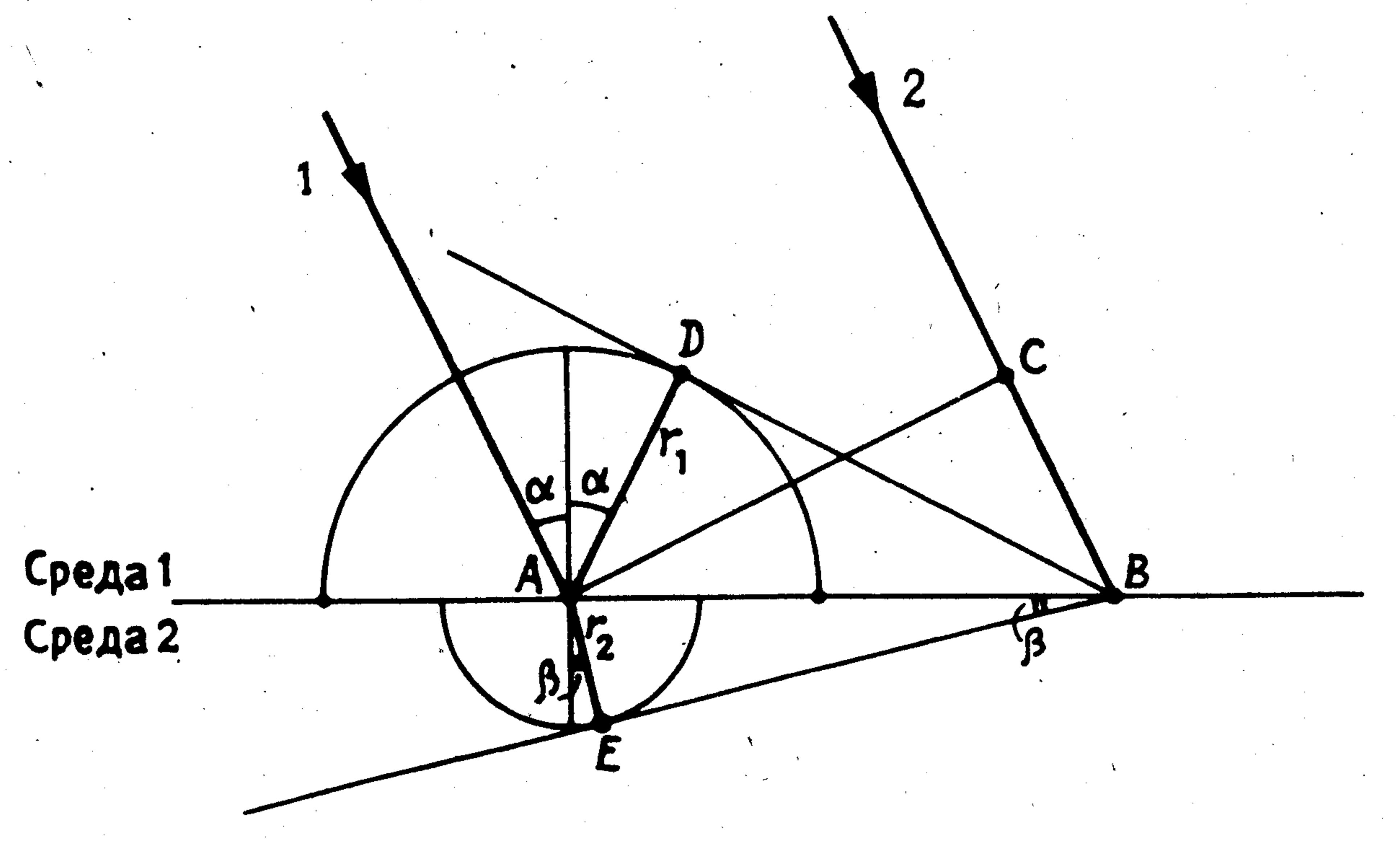


Рис. 6.4.

установлена собирающая линза, в фокальной плоскости которой помещен экран. Лучи собираются в фокальной плоскости в точке M. Линза не изменяет разность хода волн.

Если разность хода волн $d \sin\varphi = \pm n\lambda$, то на экране появится светлая полоса, если $d \sin\varphi = \pm(2n+1)\lambda/2$, то на экране появится темная полоса. Следовательно, на экране будут видны чередующиеся светлые и темные полосы, если источник света монохроматический.

Если источник является источником белого света, то на экране будут видны полосы разного цвета. Монохроматические пучки, относящиеся к различным значениям n, называются порядками спектра, а создаваемые ими изображения — спектральными линиями. Все порядки, соответствующие $\pm n$, симметричны относительно спектра нулевого порядка. Если n — порядок спектра, то при $n = 0$ (спектр нулевого порядка) в центре экрана будет белая полоса, так как условие максимума $d \sin\varphi = 0\lambda$ выполняется для всех длин волн. Условие максимума в спектре первого порядка $d \sin\varphi = \pm\lambda$. Фиолетовый цвет имеет наименьшую длину волны и, соответственно, условие максимума выполняется для фиолетовой области спектра при наименьшем угле отклонения. Для больших углов последовательно выполняются условия максимума для синей, голубой, зеленой, желтой, оранжевой, красной полос. Также очевидно, что в спектре ближайшей к центру будет фиолетовая полоса, а наиболее удаленной красная и т. д.

Примеры решения задач

Задача 1. С помощью принципа Гюйгенса—Френеля докажите, что при падении плоской волны на границу раздела сред

1) угол падения равен углу отражения;

2) отношение синуса угла падения к синусу угла преломления равно относительному показателю преломления.

Решение. Пусть угол падения лучей равен α (рис. 6.4). Точка A является источником вторичных волн. За промежуток времени Δt фронт волны в среде 1 будет иметь форму сферы радиуса $r_1 = v_1 \Delta t$, а в среде 2 — $r_2 = v_2 \Delta t$. За это время луч 2 только дойдет до границы раздела в точке B. Из точки B проведем касательные к фронтам волны в первой и второй средах BD и BE. Очевидно, что BD даст положение фронта отраженной волны, а BE — положение фронта преломленной волны, причем

$$AD = CB = v_1 \Delta t;$$

откуда треугольник ADB равен треугольнику ACB. Следовательно, угол CBA равен углу DAB и угол между нормалью и отраженным лучом 1 равен углу падения α.

Из треугольника AEB (угол AEB прямой) следует, что сторона AB равна

$$AB = \frac{AE}{\sin\beta} = \frac{v_2 \Delta t}{\sin\beta}.$$

Из треугольника ACB следует, что

$$AB = \frac{CB}{\sin\alpha} = \frac{v_1 \Delta t}{\sin\alpha}.$$

Приравняв эти выражения для AB, получим

$$\frac{v_2 \Delta t}{\sin\beta} = \frac{v_1 \Delta t}{\sin\alpha},$$

откуда

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{v_1}{v_2} = n,$$

где n относительный показатель преломления.

Задача 2. В некоторую точку пространства приходит излучение с оптической разностью хода волн 1,8 мкм. Определить, усилится или ослабнет свет в этой точке с длиной волны 1) 600 нм; 2) 400 нм.

Дано: $\lambda_1 = 600$ нм ($6 \cdot 10^{-7}$ м), $\lambda_2 = 400$ нм ($4 \cdot 10^{-7}$ м), $\Delta = 1,8$ мкм ($1,8 \cdot 10^{-6}$ м).

Решение. Максимум или минимум интерференционной картины зависит от числа полуволн, укладывающихся на разности хода. Для λ_1 и λ_2 получим

$$\frac{\Delta}{\lambda_1} = \frac{1,8 \cdot 10^{-6}}{6 \cdot 10^{-7}} = 3, \quad \frac{\Delta}{\lambda_2} = \frac{1,8 \cdot 10^{-6}}{4 \cdot 10^{-7}} = 4,5,$$

т. е. для излучения с длиной волны 600 нм в этой точке будет наблюдаться усиление света, а для излучения с длиной волны 400 нм, для которого разность хода составляет нечетное число полуволн, будет наблюдаться ослабление света.

Задача 3. Падая на две щели, расположенные на расстоянии 0,0026 мм друг от друга, монохроматический свет образует полосу четвертого порядка под углом $\varphi = 6,4°$. Чему равна длина волны падающего света.

Дано: $d = 0,0026$ мм ($2,6 \cdot 10^{-6}$ м), $\varphi = 6,4°$, $n = 4$; λ — ?

Решение. Две щели можно рассматривать как когерентные источники. Разность хода лучей, идущих от них, равна (рис. 6.5)

$$\Delta = d \sin\varphi.$$

Условие наблюдения интерференционного максимума

$$\Delta = \pm n\lambda,$$

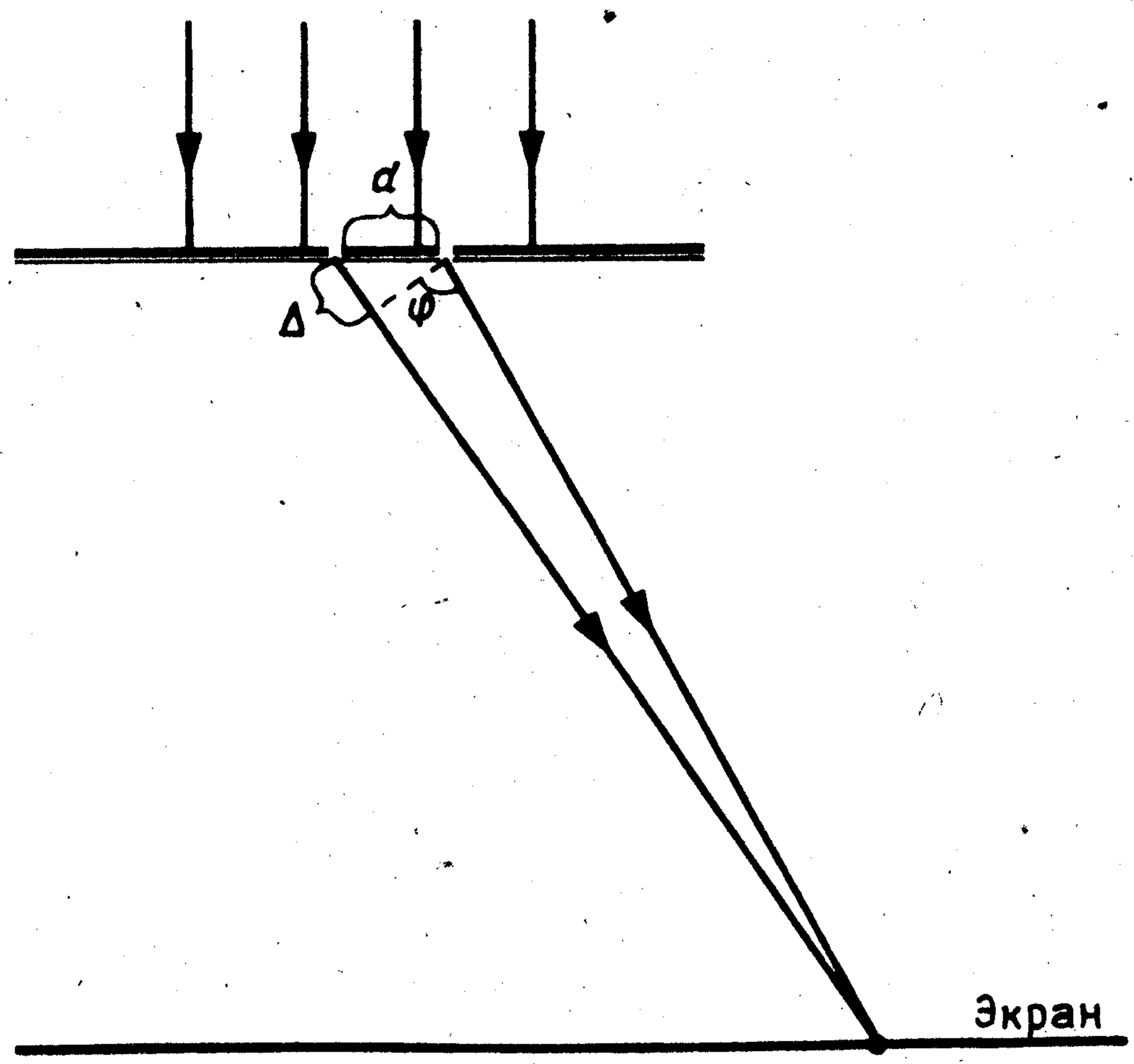


Рис. 6.5.

следовательно, $d \sin\varphi = \pm n\lambda$. По условию задачи $n = 4$, отсюда

$$d \sin\varphi = 4\lambda.$$

Окончательно имеем

$$\lambda = (d/4)\sin\varphi,$$

$$\lambda = \frac{2,6 \cdot 10^{-6} \cdot \sin 6,4^\circ}{4}\ \text{м} = \frac{2,6 \cdot 10^{-6} \cdot 0,11}{4}\ \text{м} = 7,15 \cdot 10^{-7}\ \text{м}.$$

Задача 4. Как изменяется длина волны при нормальном падении света на границу раздела сред воздух — стекло? Показатель преломления стекла n, длина волны в воздухе λ_0.

Решение. Частота колебаний при распространении электромагнитной волны во всех средах одинакова. Скорость распространения волны зависит от показателя преломления среды.

$$v = c/n.$$

Длина волны равна

$$\lambda = \frac{v}{\nu} = \frac{c}{n\nu} = \frac{\lambda_0}{n}.$$

Следовательно, при переходе в оптически более плотную среду длина волны уменьшается в n раз.

Задача 5. Период дифракционной решетки 3 мкм. Найдите наибольший порядок спектра для желтого света (длина волны 580 нм).

Дано: $d = 3$ мкм $(3 \cdot 10^{-6}$ м$)$, $\lambda = 580$ нм $(5,8 \cdot 10^{-7}$ м$)$; $n_{\max}$ — ?

Решение. Запишем формулу дифракционной решетки:

$$d \sin\varphi = n\lambda.$$

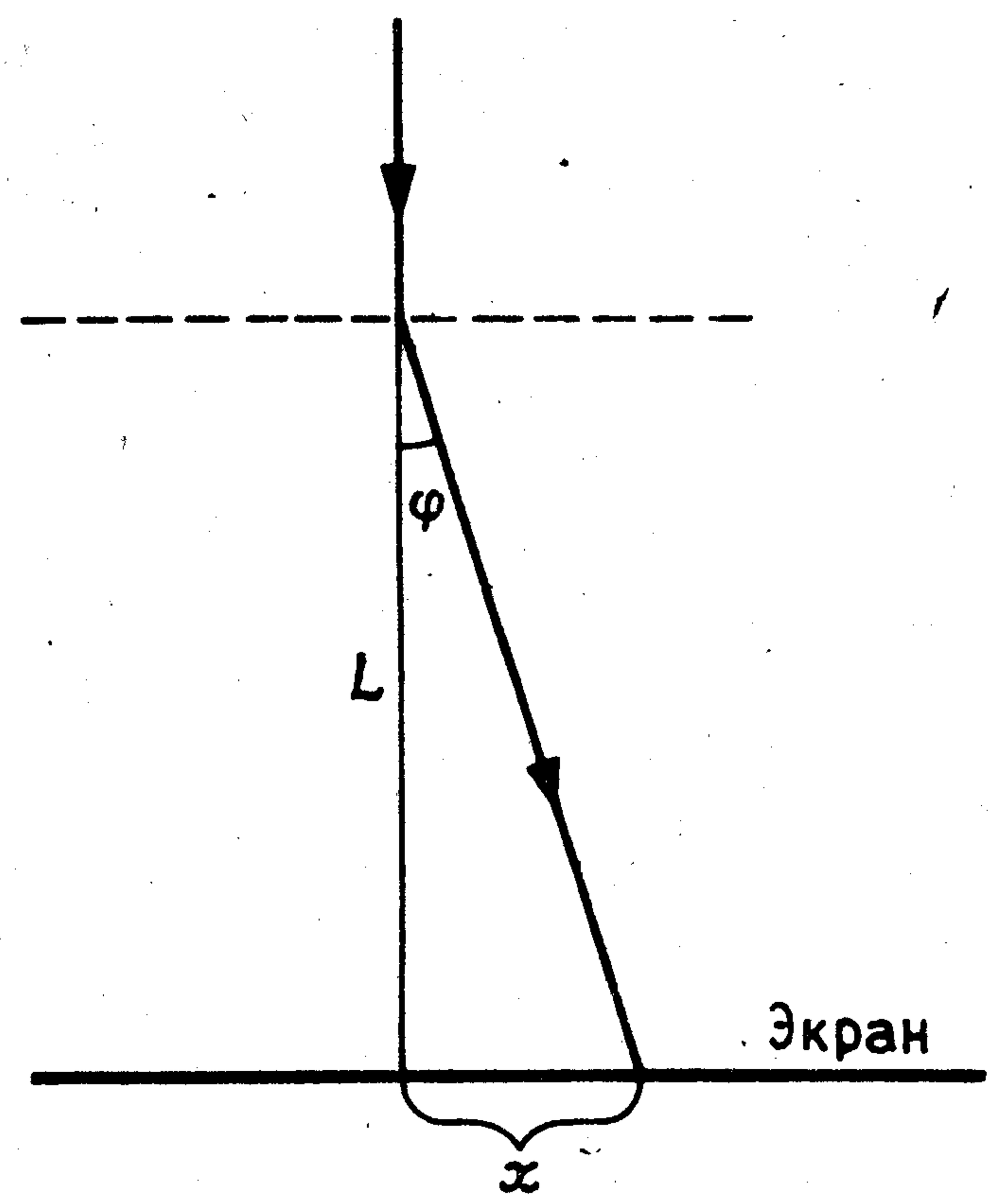


Рис. 6.6.

Очевидно, что максимальный порядок спектра n_{max} достигается при максимальном значении $\sin\varphi$. Положим $\sin\varphi \sim 1$, тогда

$$d = n\lambda, \quad n_{max} = d/\lambda < 6, \quad n_{max} = 5.$$

Задача 6. Спектр получен с помощью дифракционной решетки с периодом 22 мкм. Дифракционное изображение второго порядка находится на расстоянии 5 см от центрального и на расстоянии 1 м от решетки. Определите длину световой волны. Наблюдение ведется без линзы.

Дано: $d = 22$ мкм $(2,2\cdot 10^{-5}$ м), $n = 2$, $x = 5$ см $(5\cdot 10^{-2}$ м), $L = 1$ м; λ — ?

Решение. Используем формулу дифракционной решетки

$$d\sin\varphi = n\lambda.$$

Так как $x \ll L$, угол φ мал, поэтому можно считать $\sin\varphi \approx \mathrm{tg}\varphi \approx x/L$ (рис. 6.6). Тогда

$$dx/L = n\lambda,$$

$$\lambda = \frac{dx}{nL} = \frac{2,2\cdot 10^{-5}\cdot 5\cdot 10^{-2}}{2\cdot 1}\,\text{м} = 5,5\cdot 10^{-7}\,\text{м}.$$

Задача 7. В опыте Юнга (рис. 6.7) расстояние между двумя щелями S_1 и S_2 равно d, а расстояние от щелей до экрана равно $L(d \ll L)$. Найти расстояние x до первого интерференционного максимума.

Дано: d, L, $n = 1$; x — ?

Решение. Опыт Юнга (1801 г.) подтвердил волновую природу света. Свет от источника (параллельные лучи) проходит через щель S, а затем падает на непрозрачный экран, в котором прорезаны две щели S_1 и S_2, параллельные S и находящиеся на малом расстоянии друг от друга. На экране наблюдается интерференционная картина в виде чередующихся ярких линий.

Точка O, равноудаленная от щелей S_1 и S_2, является центральным максимумом. Определим оптическую разность хода лучей S_1B и S_2B, равную $\Delta = l_2 - l_1$. Из треугольника S_1AB имеем

$$l_1^2 = L^2 + (x - d/2)^2,$$

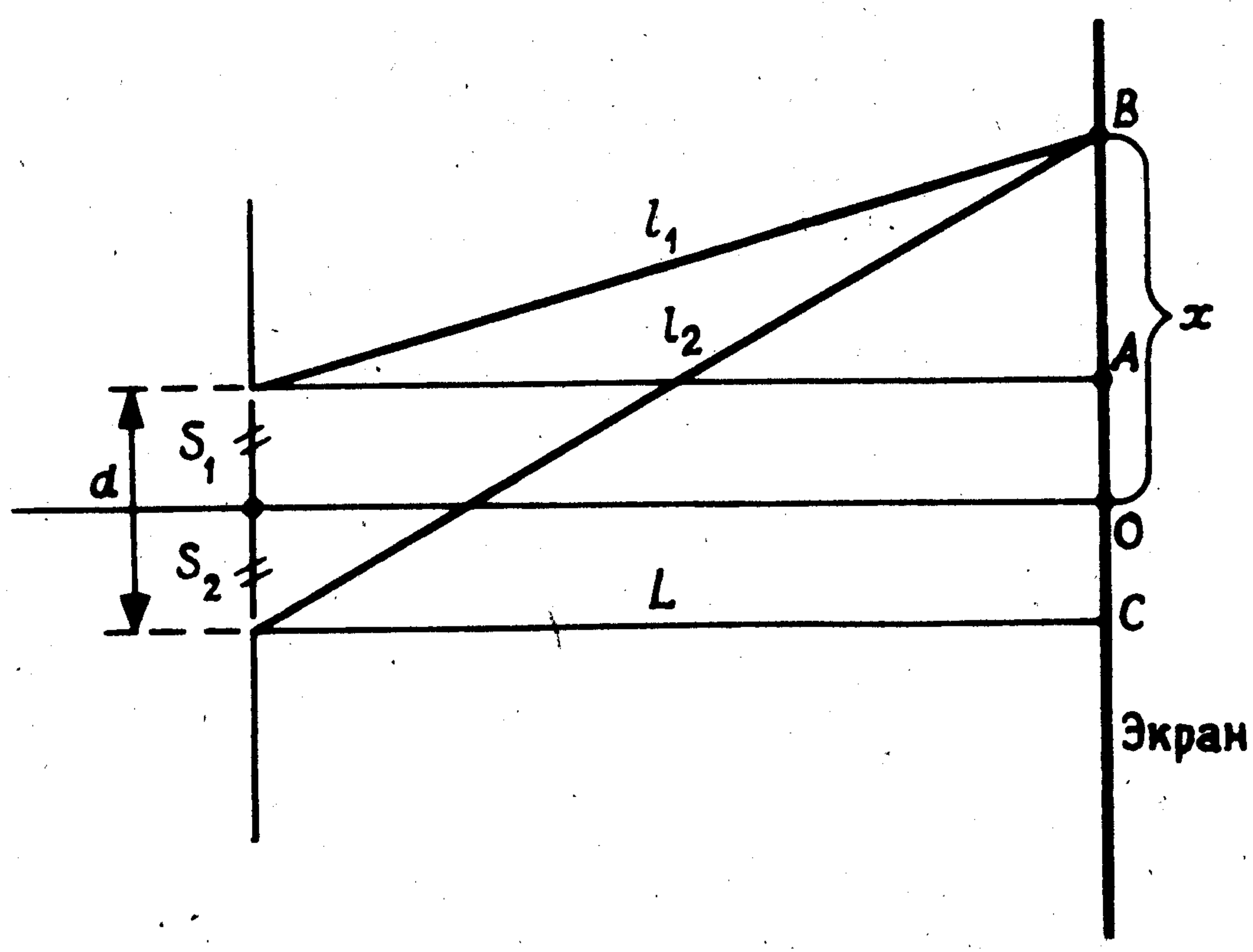


Рис. 6.7.

из треугольника S_2BC

$$l_2^2 = L^2 + (x + d/2)^2,$$

следовательно,

$$l_1^2 - l_2^2 = 2xd, \quad \text{или} \quad (l_1 + l_2)(l_1 - l_2) = 2xd.$$

Поскольку

$$l_1 + l_2 \approx 2L,$$

$$\Delta = xd/L.$$

Для первого максимума можно записать

$$\Delta = n\lambda = \lambda, \quad \text{или} \quad xd/L = \lambda,$$

$$x = \lambda L/d.$$

Задачи для самостоятельного решения

Задача 1. Длина волны желтого света в воздухе равна 580 нм, а в жидкости 400 нм. Определить оптическую плотность жидкости.

Ответ: 1,45.

Задача 2. Световые волны в некоторой жидкости имеют длину волны 500 нм и частоту $4,5 \cdot 10^{14}$ Гц. Определить абсолютный показатель преломления этой жидкости.

Ответ: 1,33.

Задача 3. В установке Юнга расстояние между щелями 1,5 мм, а экран расположен на расстоянии 2 м от щелей. Определить расстояние между интерференционными полосами на экране, если длина волны монохроматического света 670 нм.

Ответ: $8,9 \cdot 10^{-4}$ м.

Задача 4. Дифракционная решетка содержит 500 штрихов на 1 мм. На решетку падает свет длиной волны 500 нм. Под каким углом виден первый максимум?

Ответ: $\sin\varphi \approx 2,5 \cdot 10^{-3}$, $\varphi \approx 0,45°$.

Глава 7
Фотоэффект

Явления дифракции и интерференции, как мы видели, хорошо объясняются волновой природой света. Изучение фотоэффекта выявило корпускулярную природу света.

Фотоэлектрическим эффектом называется испускание электронов с поверхности металла под действием света (*внешний фотоэффект*, или *фотоэлектронная эмиссия*). Если к электродам откачанной трубки приложить напряжение, ток по цепи не потечет, так как в пространстве между катодом и анодом нет носителей тока. Но при облучении катода световым потоком в цепи появится ток. Зависимость силы тока от напряжения представлена на рис. 7.1. При увеличении напряжения сила тока растет, все большее число электронов, покинувших катод под действием света, достигает анода. Начиная с некоторого значения напряжения U_1 сила тока в цепи не изменяется. Это означает, что все электроны, вышедшие из катода за 1 с, достигают анода. Этот ток $I_н$ называется *фототоком насыщения*. Он позволяет определить количество электронов, покидающих катод за 1 с. При U, равном нулю, фототок отличен от нуля. Это объясняется тем, что электроны вылетают из металлической пластинки с некоторой скоростью и не нужно создавать электрического поля для того, чтобы они достигали анода. Для того, чтобы фототок был равен нулю, надо создать по-

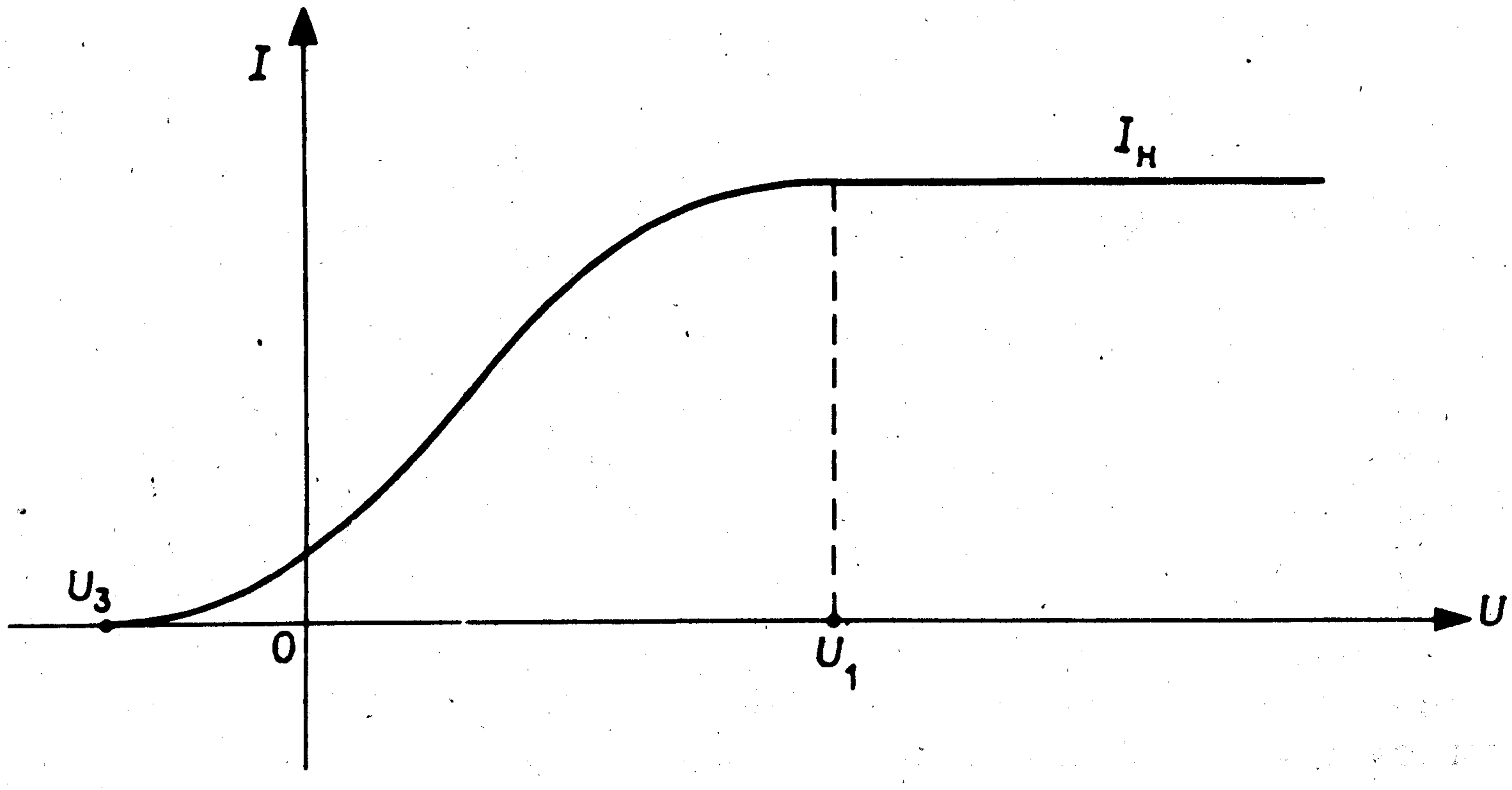


Рис. 7.1.

ле, препятствующее движению электронов к аноду. Разность потенциалов, при которой электроны не достигают анода, называется задерживающим напряжением $U_з$. Изменение кинетической энергии электрона должно быть равно работе электростатических сил поля, созданного между электродами:

$$q_e U_з = mv^2/2, \tag{7.1}$$

где q_e и $U_з < 0$.

Законы Столетова для фотоэффекта

1. Сила фототока насыщения тем больше, чем больше падающий на катод световой поток (средняя по времени энергия, падающая на поверхность катода, за единицу времени). С увеличением падающего потока возрастает количество электронов, покидающих катод.

2. Максимальная начальная скорость фотоэлектронов определяется частотой света и не зависит от его интенсивности.

Фотоэффект наблюдается, если длина волны падающего излучения меньше некоторой определенной длины волны, называемой *красной границей фотоэффекта*, т. е. при $\lambda < \lambda_{кр}$. Длина волны, соответствующая красной границе фотоэффекта, зависит от свойств металла.

Последний закон невозможно объяснить с позиций классической физики. Была выдвинута гипотеза, что свет излучается и поглощается порциями — *квантами* или *фотонами*. Энергия фотона

$$\varepsilon = h\nu,$$

где h — постоянная Планка, равная $h = 6,63 \cdot 10^{-34}$ Дж·с. Фотон — элементарная частица, движущаяся в вакууме со скоростью c, равной скорости света. Масса покоя фотона равна нулю. Импульс фотона

$$p = mc = h\nu/c. \tag{7.2}$$

Согласно Эйнштейну, энергия фотона, падающего на металл, идет на работу выхода электрона из металла и на сообщение электрону кинетической энергии. *Уравнение Эйнштейна* имеет вид

$$h\nu = A_{вых} + mv^2/2. \tag{7.3}$$

С учетом (7.1) можно записать

$$h\nu = A_{вых} + qU_з, \tag{7.4}$$

где $A_{вых}$ — работа выхода электрона из металла.

Работой выхода $A_{вых}$ называется минимальная энергия, которую надо сообщить электрону, чтобы он покинул металл. Свободные электроны, выходя за пределы кристаллической решетки металла, образуют вокруг него *электронное облако*. Между ним и кристаллической решеткой создается электрическое поле, препятствующее дальнейшему выходу электронов из металла. Для того, чтобы электрон покинул металл, он должен обладать достаточной энергией для преодоления этого поля. Скорости электронов в системе различны. Электрону с меньшей энергией надо сообщить большую порцию энергии, чем электрону с большей энергией, для того, чтобы они покинули металл.

Работа выхода $A_{вых}$ зависит только от химического состава металла и от состояния его поверхности. Из определения работы выхода ясно, что в формуле

(7.3) $mv^2/2$ представляет собой максимальную кинетическую энергию выбитого электрона. Из формулы (7.3) очевидно также, что фотоэффект наблюдается, если $\nu > \nu_{кр}$, где

$$\nu_{кр} = A_{вых}/h.$$

Соответственно,

$$\lambda_{кр} = \frac{c}{\nu_{кр}} = \frac{ch}{A_{вых}}.$$

Примеры решения задач

Задача 1. На рис. 7.2,*а* дана вольт-амперная характеристика фотоэффекта. Начертить вольт-амперные характеристики

1) при увеличении частоты падающего излучения,
2) при увеличении падающего светового потока.

Решение. 1) При увеличении частоты растет скорость электронов и соответственно увеличивается задерживающее напряжение. При том же световом потоке сила тока насыщения останется прежней (рис. 7.2,*б*, кривая 1).

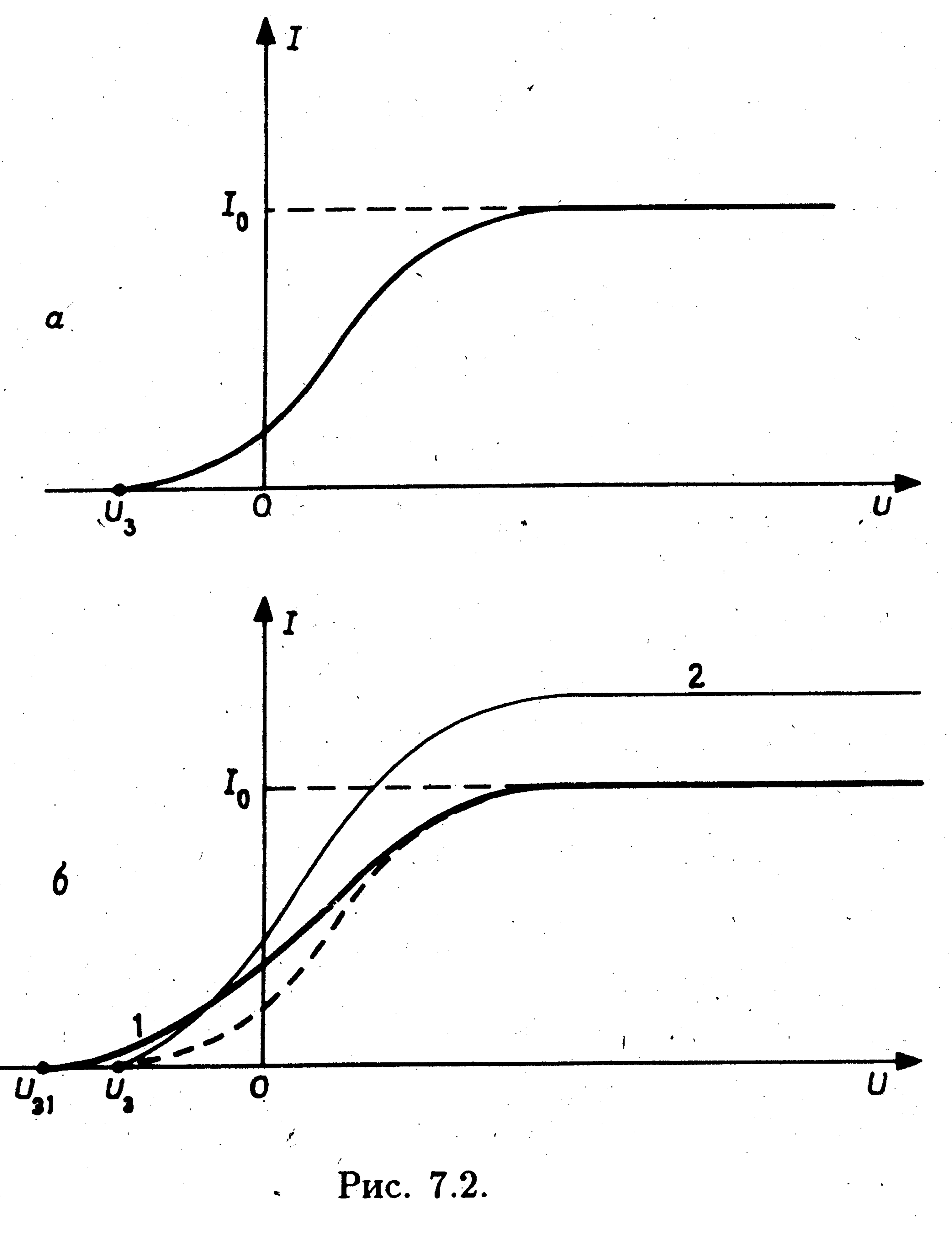


Рис. 7.2.

2) При увеличении падающего светового потока и при той же частоте растет ток насыщения (рис. 7.2,*б* кривая 2).

Задача 2. Отрицательно заряженная цинковая пластинка освещалась монохроматическим светом длиной волны 300 нм. Красная граница для цинка составляет $\lambda_{кр} = 332$ нм. Какой максимальный потенциал приобретет цинковая пластинка?

Дано: $\lambda_{кр} = 332$ нм $(3,32 \cdot 10^{-7}$ м), $\lambda = 300$ нм $(3,0 \cdot 10^{-7}$ м); $U_з$ — ?

Решение. Согласно формуле Эйнштейна,

$$\frac{mv_{\max}^2}{2} = \frac{hc}{\lambda} - A_{вых}.$$

Максимальный потенциал цинковой пластинки $U_з$ определяется из выражения $mv^2/2 = q_eU_з$ (условие прекращения фототока):

$$U_з = \frac{hc/\lambda - A_{вых}}{q_e} = \frac{hc}{q_e}\left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda_{кр}}\right),$$

$$U_з = \frac{6,62 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8}{1,6 \cdot 10^{-19}}\left(\frac{1}{3 \cdot 10^{-7}} - \frac{1}{3,32 \cdot 10^{-7}}\right) \text{В} = 0,4\,\text{В}.$$

Задача 3. Определите наибольшую скорость электрона, вылетевшего из цезия при освещении его светом длиной волны $\lambda = 3310\mathring{A}$. Работа выхода $A_{вых} = 2$ эВ, масса электрона $9,1 \cdot 10^{-31}$ кг.

Дано: $\lambda = 3310\mathring{A}$ $(3,31 \cdot 10^{-7}$ м), $A_{вых} = 2$ эВ $(2 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}$ Дж), $m = 9,1 \cdot 10^{-31}$ кг; $v_{\max}$ — ?

Решение. Из формулы Эйнштейна для фотоэффекта

$$h\frac{c}{\lambda} = A_{вых} + \frac{mv^2}{2}$$

имеем

$$v = \sqrt{\frac{2(hc/\lambda - A_{вых})}{m}},$$

$$v = \sqrt{\frac{2}{9,1 \cdot 10^{-34}}\left(\frac{6,62 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8}{3,31 \cdot 10^{-7}} - 3,2 \cdot 10^{-19}\right)}\,\frac{\text{м}}{\text{с}} =$$

$$= \sqrt{0,615 \cdot 10^{15}}\,\text{м/с} = 2,5 \cdot 10^7\,\text{м/с}.$$

Задача 4. Определите массу фотона красного света $\lambda = 6,3 \cdot 10^{-5}$ см.

Дано: $\lambda = 6,3 \cdot 10^{-5}$ см $(6,3 \cdot 10^{-7}$ м); m — ?

Решение. Согласно теории относительности Эйнштейна, энергия и масса связаны соотношением

$$E = mc^2.$$

Энергия фотона равна

$$E = mc^2 = hc/\lambda,$$

откуда

$$m = h/c\lambda,$$

$$m = \frac{6,63 \cdot 10^{-34}}{3 \cdot 10^8 \cdot 6,3 \cdot 10^{-7}} \text{ кг} = 3,5 \cdot 10^{-36} \text{ кг}.$$

Задача 5. Покажите, что свободный электрон не поглощает фотон.

Решение. В металле электрон, строго говоря, не является свободным, так как он взаимодействует с ионами кристаллической решетки и с другими электронами, обеспечивающими проводимость металла. Поэтому система электрон-фотон не является замкнутой. Если же электрон—отдельная частица, то при его взаимодействии с фотоном должны выполняться законы сохранения импульса и энергии. Пусть свободный покоящийся электрон поглотит фотон. По закону сохранения энергии энергия фотона равна энергии электрона после того, как от поглотит фотон

$$h\nu = mv^2/2, \tag{7.5}$$

где ν — частота электромагнитной волны, m — масса электрона, v — его скорость. Система фотон-электрон — изолированная система и закон сохранения импульса для нее имеет вид

$$h\nu/c = mv. \tag{7.6}$$

Из (7.5) имеем

$$v = \sqrt{2h\nu/m},$$

а из (7.6)

$$v = \frac{h\nu}{mc}.$$

Мы получили два разных выражения для скорости электрона, откуда следует, что свободный электрон не может поглотить фотон.

Задачи для самостоятельного решения

Задача 1. Сколько фотонов в 1 с испускает электрическая лампочка накаливания, полезная мощность которой 100 Вт, если средняя длина волны излучения составляет 650 нм?

Ответ: $3,27 \cdot 10^{20}$.

Задача 2. Какую скорость получают вырванные из калиевого фотокатода электроны при облучении его фиолетовым светом с длиной волны $\lambda = 420$ нм? Работа выхода $A_{\text{вых}} = 2$ эВ.

Ответ: $5,75 \cdot 10^5$ м/с.

Задача 3. Рубиновый лазер излучает в импульсе $2,0 \cdot 10^{19}$ световых квантов с длиной волны $6,94 \cdot 10^{-7}$ м. Чему равна средняя мощность лазера, если длительность импульса $2 \cdot 10^{-3}$ с?

Ответ: $2,85 \cdot 10^3$ Вт.

Задача 4. Вычислить длину волны фотона, энергия которого равна энергии покоя электрона.

Ответ: $2,4 \cdot 10^{-12}$ м.

Задача 5. Определить энергию и массу фотона, длина волны которого 0,1 нм (γ-излучение).

Ответ: 1,24 МэВ; $2,21 \cdot 10^{-26}$ кг.

Глава 8
Атомная и ядерная физика

Атомы состоят из положительного ядра и обращающихся вокруг него электронов (планетарная модель атома). Атомы электрически нейтральны, следовательно, заряд ядра по модулю равен суммарному заряду электронов. Размеры атома малы, порядка $\sim 10^{-10}$ м, размеры ядра порядка 10^{-14} м, т. е. существенно меньше размеров атома. Движущийся по круговой орбите с нормальным ускорением электрон должен излучать энергию (согласно законам электродинамики, при любом неравномерном движении заряженной частицы будет излучаться электромагнитная волна и частица будет терять энергию), при этом кинетическая энергия электрона, его скорость и радиус орбиты должны уменьшаться и он должен упасть на ядро. Однако известно, что атомы устойчивы и излучают линейчатые спектры. Для объяснения линейчатости спектров и устойчивости атомов Нильс Бор сформулировал следующие постулаты:

1. Электроны могут двигаться в атоме только по определенным орбитам, называемым стационарными, при движении по которым энергия не теряется.

2. Излучение и поглощение энергии атомом происходит при переходе электрона с одной стационарной орбиты на другую.

Энергия испускаемого (поглощаемого) фотона равна

$$h\nu = E_2 - E_1, \tag{8.1}$$

где h — постоянная Планка, $h = 6,626176 \cdot 10^{-34}$ Дж·с, ν — частота испускаемого (поглощаемого) фотона. Если электрон переходит с более удаленной от ядра орбиты на более близкую, то при этом излучается фотон, обратный переход может произойти при поглощении фотона. Условие стационарности n-й орбиты по Бору:

$$mv_n r_n = n\hbar, \tag{8.2}$$

где $\hbar = h/2\pi = 1,0545887 \cdot 10^{-34}$ Дж · с, v_n и r_n — скорость и радиус электрона на n-й орбите. Величина $(mv_n)r_n$ — момент импульса электрона, n — положительное число, называемое *главным квантовым числом*. Оно указывает номер орбиты, по которой может обращаться электрон. Согласно Бору, электрон может двигаться в атоме не по любым, а по строго определенным орбитам. Условие (8.2) называется *условием квантования орбит*.

Рассчитаем радиусы возможных орбит электронов в водородоподобном атоме, т. е. атоме, потерявшем все электроны, кроме одного. На электрон действует кулоновская сила

$$F_{\text{К}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Zq_e^2}{r_n^2},$$

где Z — число положительных зарядов в ядре, равное числу электронов, $Z|q_e|$ — заряд ядра. Основной закон динамики имеет вид

$$\frac{mv_n^2}{r_n} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Zq_e^2}{r_n^2}. \tag{8.3}$$

Уравнения (8.2) и (8.3) образуют систему двух уравнений относительно двух неизвестных r_n и v_n. Решая ее, получим

$$r_n = \frac{n^2h^2\varepsilon_0}{\pi m Z q_e^2}. \tag{8.4}$$

Расчеты показывают, что радиус первой орбиты равен

$$r_1 = 0,529 \cdot 10^{-10}\,\text{м}, \quad r_n = r_1 n^2.$$

Энергия электрона на n-й орбите равна сумме потенциальной и кинетической энергий:

$$E_n = E_{\text{пот}\,n} + E_{\text{кин}\,n} = -\frac{Zq_e^2}{4\pi\varepsilon_0 r_n} + \frac{mv_n^2}{2}.$$

(Потенциальная энергия электрона в атоме отрицательна, так как нулевой уровень отсчета берется на бесконечности, а по мере приближения электрона к ядру его потенциальная энергия уменьшается.) Из (8.3) следует

$$\frac{mv_n^2}{2} = \frac{Zq_e^2}{4\pi\varepsilon_0 2r_n},$$

откуда

$$E_n = -\frac{Zq_e^2}{4\pi\varepsilon_0 2r_n}.$$

Подставив в это выражение r_n из (8.4), получим

$$E_n = -\frac{Z^2q_e^4m}{8\varepsilon_0^2h^2}\frac{1}{n^2}, \quad n = 1,\, 2,\, 3, \ldots. \tag{8.5}$$

При переходе электрона с k-й орбиты на n-ю будет излучаться фотон, энергия которого $h\nu$ равна

$$h\nu = E_k - E_n = \left(\frac{Z^2q_e^4m}{8\varepsilon_0^2h^2}\right)\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{k^2}\right).$$

Длина волны излучения определяется соотношением

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{\nu}{c} = \frac{Z^2q_e^4m}{8\varepsilon_0^2h^3c}\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{k^2}\right). \tag{8.6}$$

Формула (8.6), полученная теоретически на основании модели атома Бора, совпадает с формулой Бальмера, полученной экспериментально на основе изучения спектров излучения атомов:

$$\frac{1}{\lambda} = R\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{k^2}\right), \tag{8.7}$$

где R — постоянная Ридберга, равная

$$R = 1,0974 \cdot 10^7\,\text{м}^{-1}.$$

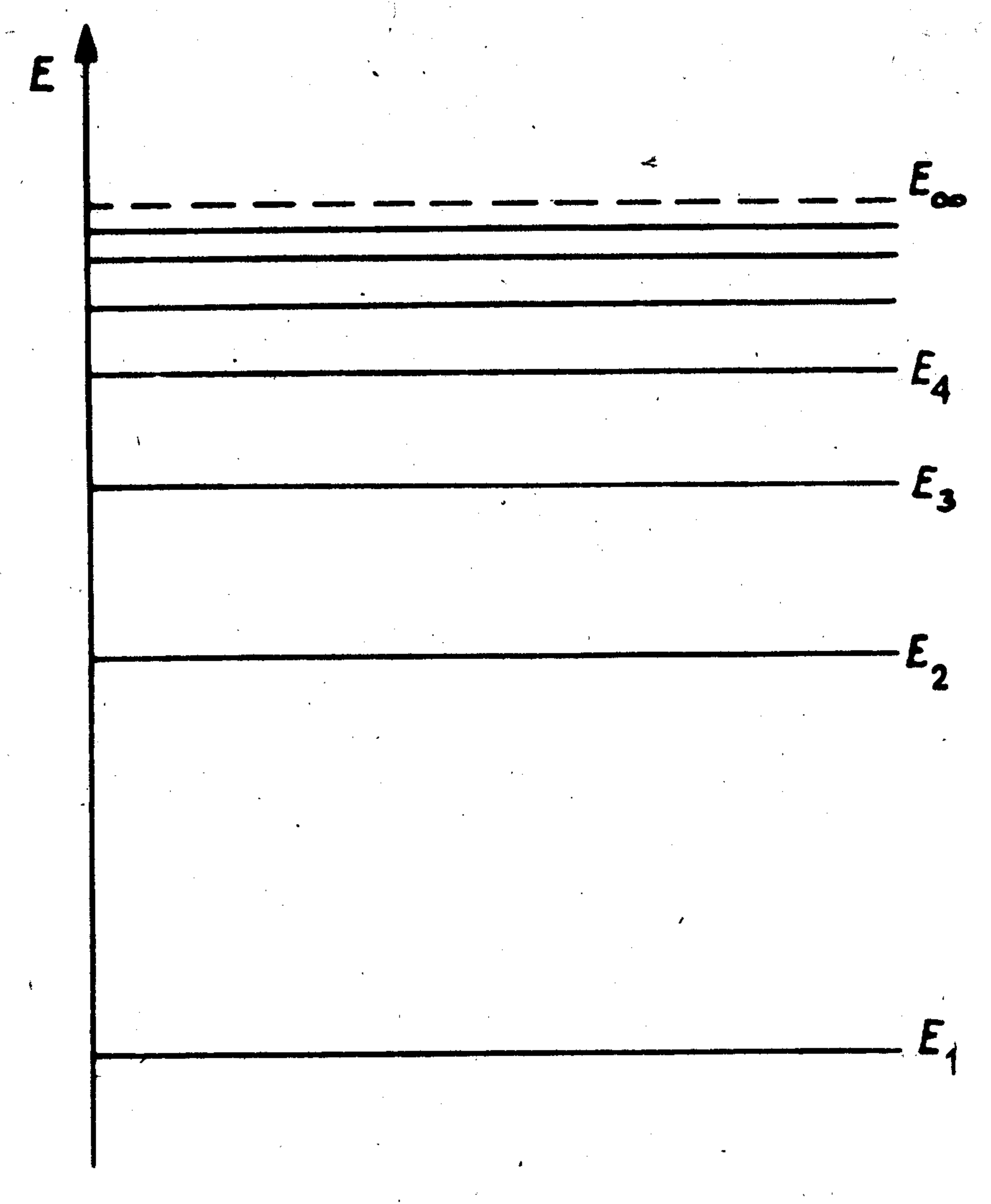


Рис. 8.1.

Для атома водорода при $Z = 1$, постоянный коэффициент в формуле (8.6)

$$\frac{Z^2 q_e^4 m}{8\varepsilon_0^2 h^3 c}$$

совпадает по величине с R. Формула (8.5) показывает что энергия электрона в атоме может принимать *дискретный набор* значений, т. е. энергия *квантуется*.

Наименьшее значение энергии имеют электроны, вращающиеся по первой боровской орбите.

На рис. 8.1 изображена схема энергетических уровней электрона в атоме водорода. Расчеты и эксперименты показывают, что видимой области спектра соответствуют переходы электронов на вторую боровскую орбиту. В атомной и ядерной физике энергия измеряется в электронвольтах. Энергия 1 эВ — это значение энергии, которую приобретает электрон, пройдя ускоряющую разность потенциалов 1 В:

$$1\,\text{эВ} = 1,6 \cdot 10^{-19}\,\text{Дж}.$$

Примеры решения задач

Задача 1. Определите значение энергии, соответствующее первому (низшему) и второму энергетическим уровням в атоме водорода (энергию вычислить в электронвольтах).

Дано: $n = 1, 2$, $q_e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл, $m = 9,1 \cdot 10^{-31}$ кг; E_1 — ? E_2 — ?

Решение. Согласно (8.5),

$$E_n = -\frac{Z^2 q_e^4 m}{8\varepsilon_0^2 h^2}\frac{1}{n^2}.$$

Для водорода $Z = 1$. Подставим численные значения:

$$E_n = -\frac{1^2 \cdot (1,6 \cdot 10^{-19})^4 \cdot 9,1 \cdot 10^{-31}}{8 \cdot (8,85 \cdot 10^{-12})^2 \cdot (6,62 \cdot 10^{-34})^2} \frac{1}{n^2} \text{ Дж} =$$
$$= -2,17 \cdot 10^{-18} 1/n^2 \text{ Дж},$$
$$E_n = -\frac{13,6}{n^2} \text{ эВ}.$$

Окончательно имеем

$$E_1 = -13,6 \text{ эВ}, \quad E_2 = -3,4 \text{ эВ}.$$

Задача 2. Найти энергию ионизации иона гелия He^+.

Дано: $n = 1$, $Z = 2$; E_1 — ?

Решение. У Не два электрона, заряд ядра равен $Z = 2q_e$. Электрон в атоме гелия, находящийся на ближайшей к ядру орбите ($n = 1$), имеет энергию

$$E_1 = -\frac{Z^2 q_e^4 m}{8\varepsilon_0^2 h^2} \frac{1}{1^2}.$$

У гелия $Z = 2$. Будем считать, что энергия электрона, вырванного из атома, равна 0. Следовательно, энергия, которую надо сообщить электрону, чтобы он покинул атом — ***энергия ионизации*** — равна

$$E_и = 0 - E_1 = \frac{4q_e^4 m}{8\varepsilon_0^2 h^2},$$
$$E_и = 54,4 \text{ эВ}.$$

Задача 3. Определите, на какую орбиту с основной ($n = 1$) перейдет электрон в атоме водорода при поглощении фотона энергией $E_ф = 2,46 \cdot 10^{-18}$ Дж.

Дано: $E_ф = 2,46 \cdot 10^{-18}$ Дж, $n = 1$; k — ?

Решение. Переход электрона с первой орбиты на более высокую происходит при поглощении фотона. Энергия фотона связана с длиной волны формулой

$$E_ф = h\nu = hc/\lambda.$$

Согласно формуле Бальмера (8.7),

$$\frac{1}{\lambda} = R\left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{k^2}\right),$$

где $R = 1,0974 \cdot 10^7 \text{ м}^{-1}$,

$$k = \frac{1}{\sqrt{1 - R\lambda}} = \frac{1}{\sqrt{1 - Rhc/E_ф}},$$

$$k = \frac{1}{\sqrt{1 - 1,0974 \cdot 10^7 \cdot 6,63 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8 / 2,46 \cdot 10^{-18}}} = 3.$$

Задача 4. В результате поглощения фотона электрон в атоме водорода перешел с первой боровской орбиты на вторую. Определить частоту этого фотона.

Дано: $n = 1$, $k = 2$; ν — ?

Решение. Длину волны поглощенного фотона можно определить по формуле Бальмера

$$\frac{1}{\lambda} = \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{k^2}\right).$$

Частота фотона $\nu = c/\lambda$, где c — скорость света, равная $3 \cdot 10^8$ м/с, следовательно,

$$\nu = cR\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{k^2}\right),$$

$$\nu = 3 \cdot 10^8 \cdot 1,0974 \cdot 10^7 \left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2}\right) \text{ Гц} = 2,5 \cdot 10^{15} \text{ Гц}.$$

Задача 5. Электрон в атоме водорода с первой орбиты переходит на орбиту, радиус которой в девять раз больше. Какую энергию ΔE должен поглотить атом?

Дано: $r = 9r_1$; ΔE — ?

Решение. Радиусы разрешенных орбит $r_n = r_1 n^2$, следовательно, электрон переходит на третью боровскую орбиту. Атом при этом должен поглотить энергию

$$\Delta E = E_3 - E_1 = \left(-\frac{Z^2 q_e^4 m}{8\varepsilon_0^2 h^2}\frac{1}{3^2}\right) - \left(-\frac{Z^2 q_e^4 m}{8\varepsilon_0^2 h^2}\frac{1}{1^2}\right) =$$

$$= \frac{Z^2 q_e^4 m}{8\varepsilon_0^2 h^2}\frac{8}{9} = \frac{Z^2 q_e^4 m}{9\varepsilon_0^2 h^2},$$

$$\Delta E = \frac{(1,6 \cdot 10^{-19})^4 \cdot 9,1 \cdot 10^{-31}}{9(8,85 \cdot 10^{-12})^2 \cdot (6,62 \cdot 10^{-34})^2} \text{ Дж} = 1,91 \cdot 10^{-18} \text{ Дж}.$$

Строение ядра

Ядро атома состоит из протонов и нейтронов. Масса протона $m_p = 1,673 \cdot 10^{-27}$ кг, заряд протона равен по величине заряду электрона $q_p = +1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл.

Масса нейтрона $m_n = 1,675 \cdot 10^{-27}$ кг. Нейтрон — электрически нейтральная частица.

Массы ядер принято измерять в атомных единицах массы. 1 атомная единица массы (а. е. м.) равна 1/12 массы атома углерода. В этих единицах масса нейтрона равна

$$m_n = 1,008665 \text{ а.е.м.},$$

а масса протона

$$m_p = 1,007276 \text{ а.е.м.}$$

Нейтроны и протоны, составляющие ядро, называются *нуклонами*. Между нуклонами в ядре действуют силы, удерживающие их на малом расстоянии друг от друга — *ядерные силы*. Ядерное взаимодействие гораздо сильнее кулоновского и гравитационного взаимодействий. Ядерные силы — *короткодействующие*, это значит, что они действуют только на малых расстояниях порядка размеров ядра, т. е. на 10^{-10} см. Общее число нуклонов в ядре равно числу целых единиц атомной массы элемента и называется массовым числом A. Число протонов в ядре обозначается буквой Z и называется *зарядовым числом*. Очевидно, что

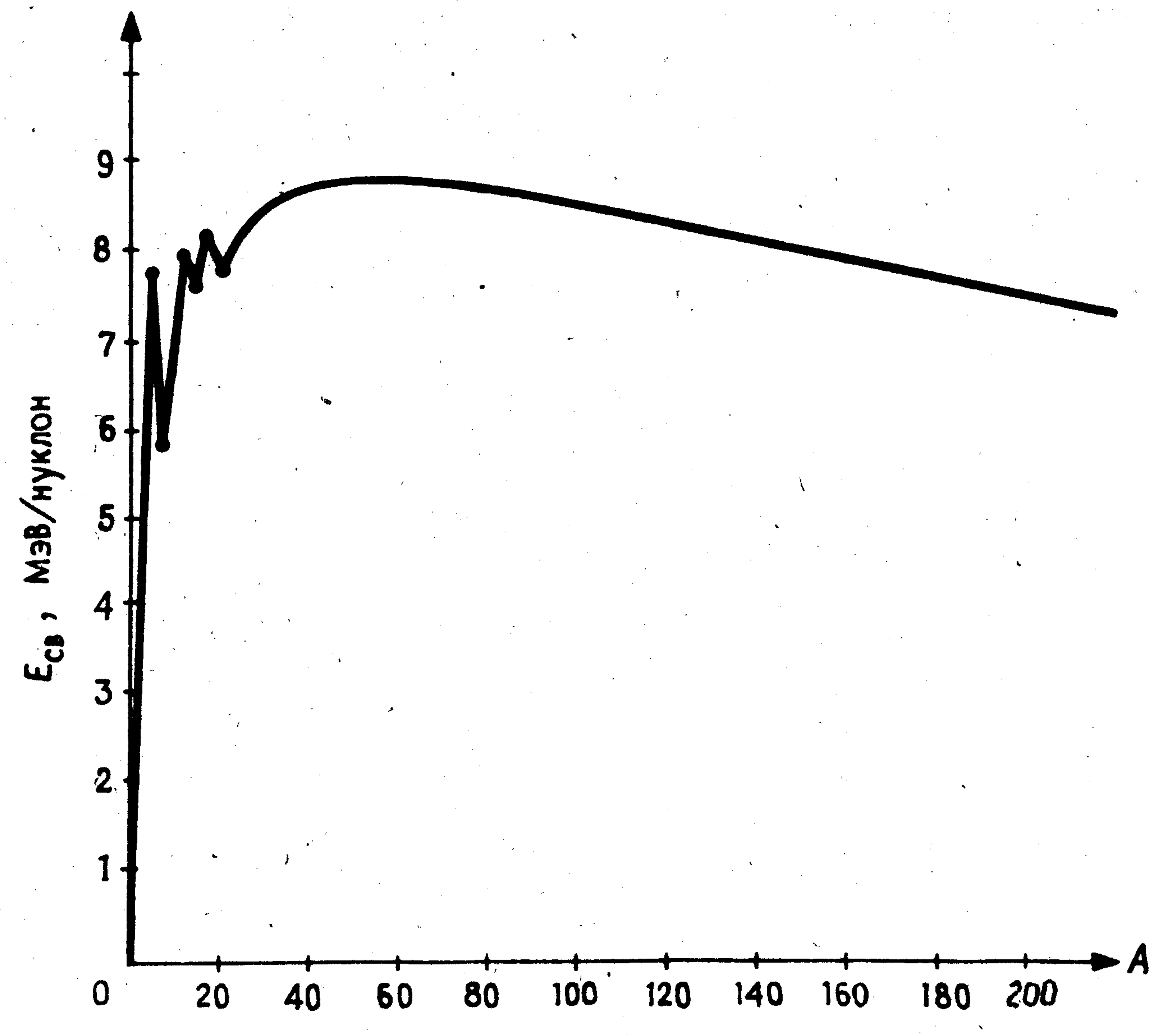


Рис. 8.2.

число нейтронов в ядре равно $N = A - Z$. Элемент принято обозначать ${}^{A}_{Z}X$, где X — символ химического элемента.

Ядра одного и того же химического элемента, содержащие одинаковое число протонов, но разное число нейтронов, называются *изотопами*. Например, водород имеет три изотопа: ${}^{1}_{1}H$, ${}^{2}_{1}H$, ${}^{3}_{1}H$. Если подсчитать суммарную массу частиц, составляющих ядро, и сравнить ее с массой ядра, то оказывается, что первая больше второй. Разность этих масс

$$\Delta m = Zm_p + (A - Z)m_n - m_я$$

называется *дефектом массы*. Из формулы Эйнштейна, связывающей массу и энергию

$$E = mc^2,$$

определим энергию, необходимую для того, чтобы разделить ядро на составляющие его частицы — *энергию связи*:

$$E_{св} = \Delta mc^2 = [Zm_p + (A - Z)m_n - m_я]\,c^2.$$

На рис. 8.2 представлен график зависимости удельной энергии связи (энергии связи на один нуклон) от массового числа A. Видно, что наиболее стабильными являются ядра с $A = 56$. Анализ графика зависимости $E_{св}$ от A показывает, что возможно выделение энергии при синтезе (соединении) легких ядер или при делении тяжелых. Первая реакция называется реакцией термоядерного синтеза, так как для того, чтобы ядра приблизились друг к другу на расстояние меньше 10^{-14} м и преодолели силы кулоновского отталкивания, они должны иметь очень большую энергию. Энергия, выделяемая при термоядерной реакции соединения дейтерия $^2_1$H с тритием $^3_1$H, составляет 3,5 МэВ/нуклон. Эта реакция имеет вид

$$^2_1\mathrm{H} + ^3_1\mathrm{H} \rightarrow ^4_2\mathrm{He} + ^1_0 n. \qquad (8.8)$$

Наиболее распространенной реакцией деления является деление ядер урана $^{235}_{92}$U. Запишем типичную реакцию деления:

$$^{235}_{92}\mathrm{U} + ^1_0 n \rightarrow ^{236}_{92}\mathrm{U} \rightarrow ^{141}_{56}\mathrm{Ba} + ^{92}_{36}\mathrm{Kr} + 3^1_0 n. \qquad (8.9)$$

Ядро урана $^{235}_{92}$U сначала поглощает нейтрон, образуя промежуточное ядро $^{236}_{92}$U, существующее 10^{-12} с, затем это ядро распадается на два осколка. Реакция деления происходит практически мгновенно.

При реакции деления на один нуклон приходится энергия, равная 1 МэВ. Выделяющиеся при реакции деления нейтроны могут поглощаться другими ядрами, что вызывает дальнейшие реакции деления. Так происходит цепная реакция, при которой выделяется огромная энергия (атомная бомба). В ядерном реакторе осуществляется управляемая реакция деления. Среднее число нейтронов при каждом акте деления, вызывающих деление других ядер, называется *коэффициентом размножения нейтронов* f. В реакторах $f \sim 1$, при взрыве атомной бомбы $f > 1$. В ядерных реакторах используются стержни из кадмия, которые поглощают нейтроны и поддерживают реактор в рабочем состоянии. Если стержни вынуть, то произойдет цепная реакция, если их вставить полностью, то реакции деления прекращаются.

Радиоактивность

В природе существуют нестабильные ядра, которые превращаются в ядра других элементов, при этом происходит излучение. Известны три вида радиоактивного излучения: α-, β- и γ-излучение. α-лучи — это поток ядер гелия $^4_2$He.

Примером α-распада является превращение радия в родон:

$$^{226}_{88}\mathrm{Ra} \rightarrow ^{222}_{86}\mathrm{Rn} + ^4_2\mathrm{He}. \qquad (8.10)$$

Дочернее ядро Rn возникло из материнского ядра радия.

Отметим, что при всех ядерных превращениях (8.8)–(8.10) сохраняются массовые и зарядовые числа. При всех ядерных превращениях выполняются все известные законы сохранения: энергии, импульса, момента импульса, заряда, а также закон сохранения нуклонов. При β-распаде происходит излучение электронов. Пример β-распада — распад ядра углерода:

$$^{14}_6\mathrm{C} \rightarrow ^{14}_7\mathrm{N} + ^{0}_{-1}e + \tilde{\nu}.$$

Дополнительная частица $\tilde{\nu}$ — антинейтрино — обеспечивает выполнение фундаментальных законов сохранения энергии и импульса. При γ-распаде происходит излучение фотонов очень высокой энергии. (Энергия фотонов от нескольких кэВ до МэВ.) При γ-распаде не происходит превращение одного элемента в другой. При α-распаде ядро теряет положительный заряд, равный $2q_e$, и в результате элемент смещается на две клетки к началу периодической системы элементов; при β-распаде элемент смещается на одну клетку к концу периодической системы элементов. Приведенные выше правила называются правилами смещения.

При поглощении частиц стабильными атомными ядрами они могут стать радиоактивными. Такая радиоактивность называется искусственной.

Например, при поглощении ядрами алюминия α-частиц образуется радиоактивный изотоп фосфора, который затем распадается, испуская *позитрон* (античастица электрона):

$$^{27}_{13}\mathrm{Al} + ^4_2\mathrm{He} \to ^{30}_{15}\mathrm{P} + ^1_0 n,$$

$$^{30}_{15}\mathrm{P} \to ^{30}_{14}\mathrm{Si} + ^{\ 0}_{+1} e.$$

Закон радиоактивного распада

Основная характеристика радиоактивного вещества — *период полураспада.* Это промежуток времени, за который распадается половина имеющихся радиоактивных ядер. За период полураспада радиоактивность снижается в 2 раза. Следовательно, через $t_1 = T$ число ядер будет равно $N_0/2$, через следующий промежуток времени $t_2 = 2T$ число ядер будет равно $N_0/2 \cdot 2$ и т. д. Через промежуток времени $t = nT$ число ядер будет равно

$$N = N_0/2^n,$$

или

$$N = N_0 e^{-t/T}.$$

Этот закон выражает основной закон радиоактивного распада.

Примеры решения задач

Задача 1. Закон радиоактивного распада можно записать в виде:

$$N = N_0 e^{-\lambda t}$$

где λ — известная постоянная распада. Определите период полураспада T.

Дано: λ; T — ?

Решение. За время T распадется $N_0/2$ ядер и останется $N_0/2$ ядер:

$$N_0/2 = N_0 e^{-\lambda T},$$

отсюда $2^{-1} = e^{-\lambda T}$.

Прологарифмируем левую и правую части равенства по основанию e (натуральный логарифм):

$$\ln 2 = \lambda T.$$

Окончательно имеем

$$T = \ln 2/\lambda = 0,693\lambda.$$

Задача 2. Определите число нуклонов A и атомный номер Z ядер, образующихся при двух α- и двух β-превращениях урана $^{238}_{92}\mathrm{U}$.

Дано: $^{238}_{92}\mathrm{U}$, α, β; A — ? Z — ?

Решение. В результате двух α-распадов

$$^{238}_{92}\mathrm{U} \to ^{234}_{90}\mathrm{X}_1 + ^4_2\alpha \to ^{230}_{88}\mathrm{X}_2 + ^4_2\alpha + ^4_2\alpha$$

получается дочернее ядро X_2.

В результате двух β-распадов получается ядро:

$$^{224}_{88}\mathrm{X}_2 \to ^{224}_{89}\mathrm{X}_3 + ^{\ 0}_{-1}e \to ^{224}_{90}\mathrm{X}_4 + ^{\ 0}_{-1}e + ^{\ 0}_{-1}e.$$

Итак, число нуклонов в образовавшемся ядре $A = 224$, число протонов (атомный номер) $Z = 90$, число нейтронов 134. Значит, это ядро иония $^{224}_{90}\mathrm{Io}$.

Задачи для самостоятельного решения

Задача 1. Минимальная частота спектральной серии Бальмера излучения атома водорода равна $2,5 \cdot 10^{15}$ Гц. Вычислите максимальную частоту излучения этой серии.

Ответ: $4,5 \cdot 10^{15}$ Гц.

Задача 2. Фотон с энергией 16,5 эВ выбил электрон из невозбужденного атома водорода. Какую скорость будет иметь электрон, вылетев из атома?

Ответ: 10^6 м/с.

Задача 3. Вычислите дефект массы ядра кислорода $^{17}_{8}$O.

Ответ: $2,27503 \cdot 10^{-28}$ кг.

Задача 4. Определить энергию, которая освобождается при термоядерной реакции $^6_3\mathrm{Li} +^2_1 \mathrm{H} \rightarrow 2^4_2\mathrm{He}$.

Ответ: 22,4 МэВ.

Задача 5. В некоторый момент времени счетчик радиоактивного излучения, помещенный вблизи препарата ^{18}F с малым периодом полураспада, зафиксировал $N_0 = 100$ отсчетов в секунду. Через время $\tau = 22$ мин показание уменьшилось до $N_1 = 87$ отсчетов в секунду. Определите период полураспада ^{18}F.

Ответ: $\tau_{1/2} = 110$ мин.

Задача 6. В результате взаимодействия ядер дейтерия и трития образуется ядро гелия и нейтрон: $^2_1\mathrm{H} +^3_1 \mathrm{H} \rightarrow^4_2 \mathrm{He} +^1_0 n$. При этом выделяется значительная энергия. Какую часть ее уносит нейтрон? Кинетическими энергиями дейтерия и трития до реакции можно пренебречь по сравнению с выделившейся энергией.

Ответ: 0,8.

Список литературы

[1] Баканина Л.П., Белучкин В.Е., Козел С.М., Мазанько И.П. Сборник задач по физике. — М.: Наука, 1990.

[2] Балаш В.А. Задачи по физике и методы их решения. — М.: Просвещение, 1983.

[3] Бендриков Г.А., Буховцев Б.Б., Керженцев В.В., Мякишев Г.Я. Задачи по физике для поступающих в ВУЗы. — М.: Наука, 1987.

[4] Буховцев Б.Б., Кривченков В.Д., Мякишев Г.Я., Сараева И.М. Сборник задач по элементарной физике. — М.: Наука, 1972.

[5] Варшавская Р.С. Методические указания и контрольные задания по физике для слушателей заочных курсов по подготовке в институт. — М.: Московский автомобильно-дорожный институт, 1976.

[6] Виноградов Ю.К., Суров О.И., Уварова Р.А. Типовые экзаменационные варианты по физике. Московский авиационный институт, 1981, 1985.

[7] Гладкова Р.А., Добронравов В.Е., Жданов Л.С., Цодиков Ф.С. Сборник задач и вопросов по физике. — М.: Наука, 1977.

[8] Гольдфарб Н.И. Сборник вопросов и задач по физике. — М.: Высшая школа, 1973.

[9] Детлаф А.А., Яворский Б.М. Курс физики. — М.: Высшая школа, 1989.

[10] Джанколи Д. Физика. — М: Мир, 1989.

[11] Задачи по физике/ Под редакцией О. Л. Савченко — М.: Наука, 1988.

[12] Зарецкая Н.Б., Черкес И.Д. Физика, пособие для поступающих. — М.: Московский горный институт.

[13] Зубов В.Г., Шальнов В.П. Задачи по физике. — М.: Наука, 1972.

[14] Карагодин Ю.А., Кортукова В.М. Методические указания по физике для поступающих в Московский медицинский стоматологический институт им. Н.А. Семашко. — М.: 1982.

[15] Кобушкин В.К., Кондратьев А.С., Прияткин Н.А. Сборник задач по физике. — Л.: Изд-во Ленинградского университета, 1965.

[16] Коган В.Ю. Задачи по физике. — М.: Просвещение, 1971.

[17] Козел С.М., Колачевский Н.Н., Косоуров Г.И., Мазанько И.П. Сборник задач по физике. — М.: Наука, 1965.

[18] Козел С.М., Рашба Э.И., Славатинский С.А. Сборник задач по физике. — М.: Наука, 1978.

[19] Меледин Г.В. Физика в задачах. — М.: Наука, 1985.

[20] Николаев В.И., Чернышев К.В. Пособие для поступающих в ВУЗы. — М.: изд-во МГУ, 1972.

[21] Пантюхов Г.И., Светозаров В.В., Руденко А.И. Сборник задач по физике: МФТИ, 1980.

[22] Задачи по математике, химии и физике/ Ред. Саргсян И.С. — М.: Изд-во МПИ, 1990.

[23] Слободецкий И.Ш., Орлов В.А. Всесоюзные олимпиады по физике. — М.: Просвещение, 1985.

Оглавление

Учебное издание

Наталья Андреевна Парфентьева
Марина Васильевна Фомина

Решение задач по физике

В помощь поступающим в вузы

Часть 2

Ведущий редактор М. Я. Рутковская
Художник А. В. Захаров
Художественные редакторы Н. В. Дубова О. Н. Адаскина
Технический редактор О. Г. Лапко

Оригинал-макет подготовлен О. Г. Лапко в пакете LaTeX
с использованием кириллических шрифтов,
разработанных в редакции АИП издательства «Мир».

ИБ № 8381

Лицензия ЛР № 010174 от 22.01.92 г.

Подписано к печати 17.07.95. Формат 70 × 100/16. Бумага офсетная.
Печать офсетная. Объем 6,50 бум. л. Усл. печ. л. 16,90. Усл. кр.-отт. 18,20.
Уч.-изд. л. 12,05. Изд. № 2/9535. Тираж 22 000 экз. Зак. 476. С 087.

Издательство «Мир»
Комитета Российской Федерации по печати
129820, Москва, 1-й Рижский пер., 2.

АООТ Тверской полиграфический комбинат
170024, г. Тверь, пр. Ленина, 5.